Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.518+517.54

ОЦЕНКА МЕРЫ ПРООБРАЗА ШАРА ПРИ $Q_{q,p}$–ГОМЕОМОРФИЗМАХ

А. О. Томилов

Аннотация. Рассматриваются гомеоморфизмы между областями в евклидовом пространстве, принадлежащие классу Соболева, геометрические свойства которых обусловлены контролем поведения емкости конденсаторов в прообразе через весовую емкость конденсатора в образе. Получена оценка меры прообраза шара и изучено асимптотическое поведение в точке.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.614

Ключевые слова: квазиконформный анализ, пространство Соболева, оператор композиции, емкость конденсатора, мера шара, асимптотика в точке.

1. Введение

Пусть D, D' — открытые области (т. е. открытые связные множества) в $\mathbb{R}^n$. Локально суммируемая функция $\omega : D' \to \mathbb{R}$ называется *весовой*, если $0 < \omega(y) < \infty$ для п. в. $y \in D'$.

Функция $u : D' \to \mathbb{R}$ *принадлежит весовому классу Соболева* $L^1_p(D', \omega)$, $p \in [1, \infty)$, если u локально суммируема в D', а обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial y_j}$ принадлежат $L_p(D', \omega)$ для любого $j = 1, \dots, n$.

Полунорма функции $u \in L^1_p(D', \omega)$ равна

$$\|u\|_{L^1_p(D',\omega)} = \left(\int\limits_{D'} |\nabla u|^p \omega(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отображение $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, если $\varphi_j(x)$ принадлежит $L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ и обобщенные производные $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ принадлежат $L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ для любых $j, i = 1, \dots, n$.

Символом $\mathrm{Lip}_l(D')$ будем обозначать пространство локально липшицевых функций, определенных на области D'.

Будем говорить, что гомеоморфизм φ *порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \to L^1_q(D), \quad 1 \le q \le p < \infty,$$

если оператор

$$\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

действующий по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, где $u \in L^1_p(D', \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D')$, ограничен: с некоторой постоянной $K_{q,p} < \infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi^* u\|_{L^1_q(D)} \leq K_{q,p} \|u\|_{L^1_p(D')} \quad \text{для всех } u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D', \omega).$$

Конденсатором в области $D' \subset \mathbb{R}^n$ называется пара $E = (F_1, F_0)$ связных компактов (континуумов) в D': $F_1, F_0 \subset D'$. Если континуум F содержится в U, где $U \Subset D'$ — открытое связное компактно вложенное в D' множество, то конденсатор $E = (F, \partial U)$ будем обозначать символом $E = (F, U)$.

Конденсатор $E = (F, U)$ называется *кольцевым*, если дополнение в $\mathbb{R}^n$ к открытому множеству $U \setminus F$ состоит из двух замкнутых связных множеств: ограниченной компоненты — континуума F — и неограниченной — $\mathbb{R}^n \setminus U$.

Непрерывная функция $u \in L^1_p(D', \omega)$ называется *допустимой для конденсатора* (F, U), если $u \equiv 1$ на F и $u \equiv 0$ на ∂U.

Емкость конденсатора (F, U) в весовом пространстве $u \in L^1_p(D', \omega)$ определим как величину

$$\operatorname{cap}\big(E; L^1_p(D', \omega)\big) = \inf \|u\|^p_{L^1_p(D'; \omega)},$$

где инфимум берется по всем допустимым для конденсатора (F, U) функциям класса $\mathrm{Lip}_l(D'; \omega)$.

Функция Φ, определенная на открытых подмножествах из D' и принимающая неотрицательные значения, называется *счетно-аддитивной функцией множества*, если

1) для всякой точки $x \in D'$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D')$, такое, что $0 < \Phi(B(x, \delta)) < \infty$;

2) для всякого счетного набора $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ попарно не пересекающихся открытых множеств из D' имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U_i) \leq \Phi(U), \quad \text{где} \quad \bigcup_i U_i \subset U. \tag{2}$$

Первое описание гомеоморфизмов $\varphi : D \to D'$, индуцирующих ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \to L^1_p(D)$, $1 \leq p < \infty$, $\omega \equiv 1$, получено в [1, теорема 8.7; 2, 3]. В работе [4] введено понятие $Q_{q,p}$-гомеоморфизмов, т. е. гомеоморфизмов, удовлетворяющих одному из условий следующей теоремы.

Теорема 1 [4, теорема 1]. *Пусть заданы гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ и весовая локально суммируемая функция $\omega : D' \to (0, \infty)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D), \quad 1 < q \leq p < \infty,$$

по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, где $u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$;

2) *существует ограниченная абсолютно непрерывная счетно-аддитивная функция $\Phi_{q,p}$ при $q < p$, заданная на открытых множествах в D, такая, что для всякого конденсатора $E = (F, U)$, расположенного в D', и прообраза $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F), \varphi^{-1}(U))$, расположенного в D, выполняются неравенства:*

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\big) \leq \begin{cases} \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D'; \omega)\big), & 1 < q < p < \infty, \\ K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D'; \omega)\big), & 1 < q = p < \infty; \end{cases} \tag{3}$$

3) *операторная функция искажения*

$$K^{1,\omega}_{q,p}(x) = \begin{cases} \frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}}\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } |J(x,\varphi)| \neq 0, \\ 0, & \text{если } |J(x,\varphi)| = 0, \end{cases}$$

принадлежит L_σ, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *если* $q < p$, *и* $\sigma = \infty$, *если* $q = p$.

Символ $K^{1,1}_{q,p}(x)$ *применяется в тех случаях, когда* $\omega \equiv 1$.

Данная теорема содержит в качестве частного случая результаты, полученные в [1–3] (случай $q = p$, $\omega \equiv 1$) и [5–7] ($q \leq p$, $\omega \equiv 1$).

Замечание 2. Вообще класс отображений $Q_{q,p}$ определяется искажением только кубических конденсаторов [8, теорема 18], но в данной работе будем рассматривать кольцевые конденсаторы.

В работе [9] доказана эквивалентность двух подходов к описанию гомеоморфизмов: гомеоморфизм изменяет контролируемым способом емкость образа конденсатора через весовую емкость конденсатора в прообразе тогда и только тогда, когда модуль образа семейства кривых оценивается через весовой модуль исходного семейства кривых.

2. Искажение мер под действием $Q_{q,p}$-гомеоморфизмов

Перейдем к формулировке результатов данной работы.

Теорема 3. *Пусть гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *удовлетворяет одному из условий теоремы* 1, ω *локально суммируема в* D', $\vartheta_{x_0}(r)$ — *среднее значение весовой функции* ω *над сферой* $|x - x_0| = r$, Ω_n — *объем* n-*мерного шара единичного радиуса,* m — *мера Лебега,* α — *константа, равная половине расстояния от* x_0 *до границы множества* D'. *Тогда выполняется оценка меры прообраза шара:*

1) *в случаях, когда* $n - 1 < q < p \leq n$, $n - 1 < q = p < n$ *и* $r < \alpha$ (*или* $1 \leq q \leq p \leq 2$, *при* $n = 2$):

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \leq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_r^\alpha \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \quad (4)$$

2) *в случае* $n < q \leq p < \infty$ *и* $r > \varepsilon > 0$:

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \geq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_\varepsilon^r \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \quad (5)$$

3) *в случае* $n = q \leq p < \infty$ *и* $r < \alpha$:

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \leq \Omega_n \exp\left(-n^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} \Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}} \int\limits_r^\alpha \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-n}{p(n-1)}}}\right). \quad (6)$$

где

$$\Lambda(t) = \frac{1}{|S(x_0,t)|} \int\limits_{S(x_0,t)} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(\gamma)|}{|\det D\varphi(\gamma)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(\gamma)}\right)^\sigma d\gamma.$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо $A_t = \{x \mid t < |x| < t + \Delta t\}$. Обозначим $F = \overline{B(x_0, t)}$ и $U = B(x_0, t + \Delta t)$. Тогда $E = (F, U)$ и $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F), \varphi^{-1}(U))$ — конденсаторы.

Так как гомеоморфизм φ удовлетворяет условию теоремы 1, выполняется емкостное неравенство

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\big) \leq \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D'; \omega)\big). \tag{7}$$

Левую часть этого неравенства можно оценить снизу согласно [12, предложение 5]:

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\big) \geq \frac{\inf m_{n-1}\sigma}{(m(\varphi^{-1}(U) \setminus \varphi^{-1}(F)))^{\frac{q-1}{q}}}. \tag{8}$$

где $H^{n-1}\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma = \partial T$ ограниченного открытого множества T, содержащего $\varphi^{-1}(F)$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{T}$ в $\varphi^{-1}(U)$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

Для оценки правой части неравенства (7) выберем пробную функцию

$$\eta(r) = \begin{cases} \int\limits_0^r \frac{1}{It^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}, & \text{если } r \in (t, t + \Delta t), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\vartheta_{x_0}(t)$ — среднее значение весовой функции ω над сферой $|x - x_0| = t$,

$$I = \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Выбор данной пробной функции объясняется тем, что при ее использовании правая часть неравенства (7) достигает инфимума среди радиальных функций (подробное доказательство можно увидеть в [10]). Нетрудно убедиться, что $\eta(r) \equiv 1$ на $\overline{B(x_0, t)}$ и $\eta(r) \equiv 0$ на $\partial(B(x_0, t + \Delta t))$, т. е. эта функция является допустимой для конденсатора $E = (F, U)$.

Подставляем эту пробную функцию в правую часть неравенства (7):

$$\Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D'; \omega)\big) \leq \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{9}$$

где ζ_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, комбинируя неравенства (6) и (7), получаем

$$\frac{\inf m_{n-1}\sigma}{\big(m\big(\varphi^{-1}(U) \setminus \varphi^{-1}(F)\big)\big)^{\frac{q-1}{q}}} \leq \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Согласно изопериметрическому неравенству

$$\inf m_{n-1}\sigma \geq n\Omega_n^{\frac{1}{n}} (m(\varphi^{-1}(F)))^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(m(\varphi^{-1}(F)))^{\frac{n-1}{n}} \leq \Phi(U\backslash F)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}(m(\varphi^{-1}(U)\setminus\varphi^{-1}(F)))^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}. \tag{10}$$

Положим $\Theta(t) = m(\varphi^{-1}(B(x_0,t)))$ и $\Psi(t) = \Phi(B(x_0,t))$. Тогда неравенство (8) принимает вид

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(\Theta(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq (\Psi(t+\Delta t)-\Psi(t))^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}(\Theta(t+\Delta t)-\Theta(t))^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{11}$$

или

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(\Theta(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq \left(\frac{\Psi(t+\Delta t)-\Psi(t)}{\Delta t}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Theta(t+\Delta t)-\Theta(t)}{\Delta t}\right)^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}. \tag{12}$$

Так как $\Theta(t)$ монотонна, можно перейти к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(\Theta(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}(\Theta'(t))^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\frac{1}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{13}$$

для п. в. t. С учетом того, что $\zeta_{n-1} = n\Omega_n$, получаем

$$\frac{n^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(p-n)}{pn(q-1)}}}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}} \leq (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\frac{\Theta'(t)}{(\Theta(t))^{\frac{q(n-1)}{n(q-1)}}}, \tag{14}$$

$$\frac{n^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(p-n)}{pn(q-1)}}}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}(\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}} \leq \frac{\Theta'(t)}{(\Theta(t))^{\frac{q(n-1)}{n(q-1)}}}. \tag{15}$$

В случаях $q < p \leq n$ и $q = p < n$, так как $\Theta(t)$ — монотонная функция, можно написать:

$$\int\limits_r^{\alpha}\frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}\ (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}} \leq n^{\frac{q-p}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(n-p)}{pn(q-1)}}\frac{q-1}{q-n}(\Theta(\alpha)^{\frac{q-n}{n(q-1)}}-\Theta(r)^{\frac{q-n}{n(q-1)}}). \tag{16}$$

Отсюда

$$\Theta(r) \leq \left(\Theta(\alpha)^{\frac{q-n}{n(q-1)}}+n^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(p-n)}{pn(q-1)}}\frac{n-q}{q-1}\int\limits_r^{\alpha}\frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}(\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \tag{17}$$

Так как $m(\varphi^{-1}(B(x_0,\alpha))) \leq \Omega_n$, то

$$\Theta(r) \leq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_r^\alpha \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \tag{18}$$

Согласно [13, формула 3.12]

$$\Psi'(t) = \Bigg[\int\limits_{B(x_0,t)} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi^{-1}(y)|}{|\det D\varphi^{-1}(y)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(y)}\right)^\sigma dy\Bigg]'$$

$$= \Bigg[\int\limits_0^t dt \int\limits_{S(x_0,t)\setminus Z'} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi^{-1}(\gamma)|}{|\det D\varphi^{-1}(\gamma)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(\gamma)}\right)^\sigma d\gamma\Bigg]'$$

$$= \int\limits_{S(x_0,t)} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi^{-1}(\gamma)|}{|\det D\varphi^{-1}(\gamma)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(\gamma)}\right)^\sigma d\gamma.$$

Отсюда выводим финальную оценку (4).

В случае $n < q \leq p$ интегрируем неравенство (15) в пределах $[\varepsilon, r]$, $\varepsilon > 0$, что приводит к

$$\Theta(r) \geq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_\varepsilon^r \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}, \tag{20}$$

после чего, выполняя подстановку (19), приходим к финальной оценке (5).

В случае $n = q \leq p$ неравенство (15) принимает вид

$$\frac{n^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} \Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}}}{t^{\frac{n}{p}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-n}{p(n-1)}}} \leq \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}. \tag{21}$$

Последнее после интегрирования в пределах $[r, \alpha]$ дает оценку

$$\Theta(r) \leq \Omega_n \exp\left\{-n^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} \Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}} \int\limits_r^\alpha \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-n}{p(n-1)}}}\right\}, \tag{22}$$

или, с учетом (19), финальную оценку (6).

Замечание 4. Основной результат, доказанный выше, содержит в качестве частного случая некоторые результаты работ [10, 11], в которых рассмотрены случаи $q = p \leq n$ и $n \leq q = p < \infty$. В данной работе доказан более широкий результат, так как рассматриваются условия, простирающиеся за пределы ограничений работ [10, 11]. Продемонстрируем, как на основе результатов теоремы 3 можно вывести одно из утверждений работы [10]. В теореме 3.1 той же работы при условиях $1 < p < n$ и $n \geq 2$ приведена следующая оценка:

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \leq \Omega_n \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}. \tag{23}$$

Легко убедиться, что при $p = q < n$ данная оценка соответствует оценке (4).

3. Асимптотическое поведение

Оценки теоремы 3 позволяют описать асимптотическое поведение отображения φ в точке.

Теорема 5. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ удовлетворяет условиям теоремы 3, $f = \varphi^{-1}$, $f(0) = 0$. Тогда имеет место оценка*

$$\lim_{x\to 0} \inf \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \leq 1,$$

где

1) *в случае $n-1 < q < p \leq n$:*

$$R(|x|) = \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_{|x|}^{\alpha} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{q-1}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{1-q}{n-q}};$$

2) *в случае $n = q < p$:*

$$R(|x|) = \exp\left(-n^{\frac{p-n}{p(n-1)}} \Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}} \int\limits_{|x|}^{\alpha} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-n}{p(n-1)}}}\right).$$

Доказательство. Положим $l_f(r) = \min\limits_{|x|=r} |f(x)|$. Тогда с учетом условия $f(0) = 0$ получаем $\Omega_n l_f^n(r) \leq m(f(B_r))$, т. е.

$$l_f(r) \leq \left(\frac{m(f(B_r))}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Из теоремы 3 следует, что

$$m(f(B_r)) \leq \Omega_n R^n(r).$$

Таким образом, можно написать

$$\lim_{x\to 0} \inf \frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \lim_{r\to 0} \inf \frac{l_f(r)}{R(r)} \leq \lim_{r\to 0} \inf \left(\frac{m(f(B_r))}{\Omega_n}\right)^{1/n} \frac{1}{R(r)} \leq 1,$$

откуда и вытекают доказываемые оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. Новосибирск: НГУ, 1988.
2. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.
3. *Водопьянов С. К.* Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 1992.
4. *Водопьянов С. К., Томилов А. О.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85, № 5. С. 925–951.
5. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 185–192.
6. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.

7. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 11–33.

8. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $Q_{q,p}$-отображений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1257–1299.

9. *Водопьянов С. К.* Об эквивалентности двух подходов к задачам квазиконформного анализа // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1252–1270.

10. *Салимов Р. Р.* К теории кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля // Вісник Дніпропетровського університету. 2007. Т. 9, № 12. С. 119–123.

11. *Salimov R. R., Klishchuk B. A.* Lower bounds for the volume of the image of a ball // Ukrain. Math. J. 2019. V. 71, N 2. P. .

12. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.

13. *Водопьянов С. К.* О совпадении функций множества в квазиконформном анализе // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 9. С. 3–33.

Поступила в редакцию 11 апреля 2024 г.
После доработки 6 сентября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Томилов Алексей Олегович (ORCID 0009-0006-7774-1239)
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
atomilov115@mail.ru