Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 512.542

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ГРУПП

Н. М. Сучков, А. А. Шлепкин, Д. А. Тауснев

Аннотация. Пусть G — группа всех ограниченных подстановок множества натуральных чисел N. Доказано, что аддитивная группа поля Q рациональных чисел не изоморфна подгруппе из G.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.613

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, ограниченная группа.

1. Введение

Пусть $S(N)$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел N. Подстановка $x \in S(N)$ называется *финитарной*, если ее носитель $\mathrm{supp}(x) = \{\beta \mid \beta \in N,\ \beta^x \neq \beta\}$ конечен. Множество $\mathrm{Fin}(N)$ всех финитарных подстановок образует локально конечную группу. Эта группа порождается транспозициями $t_\alpha = (\alpha\ \alpha+1)$, $\alpha \in N$. Далеко не каждая счетная локально конечная группа изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Fin}(N)$. В работе И. Д. Адо [1] установлено, в частности, что $\mathrm{Fin}(N)$ не содержит квазициклической p-подгруппы при любом простом p. Общая задача изучения подгрупп группы $\mathrm{Fin}(N)$ поставлена Д. А. Супруненко в монографии [2].

Определение 1. Подстановка $g \in S(N)$ называется *ограниченной*, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Все такие подстановки образуют группу $G = \mathrm{Lim}(N)$. Очевидно, что $\mathrm{Fin}(N) \triangleleft G$. В [3] доказано, что G порождается подстановками, в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида t_α, $\alpha \in N$. При этом смешанная группа G равна AB, где A, B — некоторые ее локально конечные подгруппы. В работе [4] начато исследование подгруппового строения группы G.

Определение 2. Произвольная группа называется *ограниченной*, если она изоморфна подгруппе группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.

Доказано, что ограниченными являются, например, счетная свободная группа, 2-группа Алешина, счетная локально конечная группа, счетная свободная абелева группа. Естественным образом возник вопрос о существовании счетных неограниченных групп. В той же работе [4] сформулирована гипотеза о неограниченности группы Q рациональных чисел по сложению. В настоящей работе доказана эта гипотеза.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 24-41-10004.

Теорема 1. *Группа $Q(+)$ неограниченная.*

Группа X называется 2-*полной*, если для любого элемента $x \in X$ найдется такой элемент $y \in X$, что $y^2 = x$. Поскольку группа $Q(+)$ является полной абелевой группой без кручения, теорема 1 легко вытекает из следующего результата.

Теорема 2. *Абелева 2-полная группа без кручения является неограниченной.*

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны [5].

2. Предварительные результаты

Предположим, что теорема 2 неверна, т. е. группа $G = \mathrm{Lim}(N)$ содержит 2-полную абелеву подгруппу H без кручения.

Лемма 1. *Если $h \in H$, то $h = y^2$ для единственного элемента $y \in H$.*

Доказательство. Такой элемент y существует в силу 2-полноты H. Пусть $y^2 = z^2$ для некоторого $z \in H$. Так как H — абелева группа без кручения, отсюда выводим $(yz^{-1})^2 = 1$, а значит, $y = z$. Лемма доказана.

Пусть $g \in G$, $\alpha \in N$. Обозначим

$$M_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in N,\ \beta \leq \alpha < \beta^g\}.$$

Лемма 2. $|M_\alpha(g)| \leq \omega(g)$.

Доказательство. Пусть $\omega(g) = s$, $T_\alpha = \{\alpha, \alpha-1, \dots, \alpha-s+1\} \cap N$. Тогда $|T_\alpha(g)| \leq s$ и в силу определений $M_\alpha(g) \subseteq T_\alpha(g)$. Поэтому лемма верна.

Лемма 3. *Число бесконечных циклов в разложении любой подстановки $g \in G$ на независимые циклы не превосходит $s = \omega(g)$.*

Доказательство. Допустим, что найдутся бесконечные циклы $x_1, \dots, x_{s+1}$ из разложения g на независимые циклы. Обозначим через γ_i наименьшее число цикла $x_i, 1 \leq i \leq s+1$. Пусть α — любое натуральное число, превосходящее $\max\{\gamma_1, \dots, \gamma_{s+1}\}$. Тогда $|M_\alpha(x_i)| \geq 1$ при каждом $i = 1, \dots, s+1$. Очевидно, $M_\alpha(g)$ содержит попарно не пересекающиеся множества $M_\alpha(x_1), \dots, M_\alpha(x_{s+1})$, а потому $|M_\alpha(g)| \geq s+1$, что противоречит лемме 2. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть в разложении подстановки $g \in S(N)$ на независимые циклы имеется бесконечный цикл и $x^n = g$ для некоторых подстановки $x \in S(N)$ и натурального n. Тогда в этом разложении содержится не менее n бесконечных циклов.*

Доказательство. Очевидно, что в разложении подстановки x на независимые циклы имеется бесконечный цикл

$$y = (\dots \alpha_{-k} \dots \alpha_{-1}\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_k \dots).$$

Но тогда в разложении $g = x^n$ содержится n бесконечных циклов

$$y_i = (\dots \alpha_{i-kn} \dots \alpha_{i-n}\alpha_i\alpha_{i+n} \dots \alpha_{i+kn} \dots), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

из разложения y^n. Лемма доказана.

Лемма 5. *В разложении любой подстановки $z \in H$ на независимые циклы отсутствуют бесконечные циклы.*

Доказательство. Предположим, что в разложении z на независимые циклы имеется бесконечный цикл. Из определения группы H следует, что $z = t^{2^m}$, где $t \in H$, $2^m > \omega(z)$. Тогда в силу леммы 4 в разложении z на независимые циклы содержится более $\omega(z)$ бесконечных циклов. С другой стороны, согласно лемме 3 число бесконечных циклов в разложении подстановки z не превосходит $\omega(z)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

3. Длины независимых циклов

Определение 3. Пусть $\alpha, \beta \in N$ и $\alpha < \beta$. Множество

$$\Delta(\alpha, \beta) = \{\gamma \mid \gamma \in N,\ \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$$

будем называть *отрезком натуральных чисел*; α — левый конец отрезка, β — правый.

Замечание 1. Поскольку H — группа без кручения, в силу леммы 5 разложение любой неединичной подстановки из H на независимые циклы содержит только конечные циклы, длины которых неограниченные.

В этом разделе будет доказана

Лемма 6. *Пусть в разложении подстановки h группы H на независимые циклы имеются такие циклы $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$, что если t_i — длина цикла d_i, $i \in N$, то*

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots .$$

Тогда подмножество всех четных чисел множества $\{t_i \mid i \in N\}$ конечно.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Ясно, что тогда можно считать, что $t_i = 2m_i$ при всех $i \in N$. Пусть

$$c = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t),$$

где $t = 2m$, — любой цикл из условия леммы. Так как группа H является 2-полной, то $h = h_1^2$ для единственной в силу леммы 1 подстановки $h_1 = H$. Нетрудно показать, что в разложении h_1 на независимые циклы имеется цикл

$$c_1 = (\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_t \beta_t),$$

квадрат которого равен произведению циклов c и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_t)$ из разложения h. По индукции легко получить более общий результат. Именно, для каждого натурального k найдется такая подстановка $h_k \in H$, что $h = h_k^m$, где $m = 2^k$, а в разложении h_k на независимые циклы есть цикл

$$c_k = (\alpha_1 \beta_{12} \dots \beta_{1m} \alpha_2 \beta_{22} \dots \beta_{2m} \dots \alpha_t \beta_{t2} \dots \beta_{tm})$$

длины tm. При этом c_k^m разлагается на m циклов

$$c, (\beta_{1j} \beta_{2j} \dots \beta tj), \quad 2 \leq j \leq m, \tag{1}$$

содержащихся в разложении подстановки h на независимые циклы. Ясно, что каждый из этих циклов можно взять в качестве цикла c. Поэтому без ограничения общности будем предполагать, что α_1 — наименьшее из чисел, составляющих цикл c_k. Пусть γ_k — наибольшее число из c_k.

Обозначим $s = \omega(h)$ и фиксируем любое натуральное k, для которого $m = 2^k > s$. Пусть $\omega(h_k) = q$. Выберем цикл c таким образом, чтобы для его длины t выполнялось неравенство $t > 3mq$. Поскольку отрезок $\Delta(\alpha_1, \gamma_k)$ содержит t натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$, то

$$\gamma_k - \alpha_1 \geq t - 1 \geq 3mq.$$

Рассмотрим непересекающиеся отрезки $\Delta(\alpha_1, \alpha_1 + mq)$, $\Delta(\gamma_k - mq, \gamma_k)$ натуральных чисел. Так как $\omega(c_k) \leq q$, расстояние между соседними элементами множества $Q = \{\alpha_1, \beta_{12}, \dots, \beta_{1m}\}$ не превосходит q. Отсюда выводим, что выполняется включение

$$Q \subseteq \Delta(\alpha_1, \alpha_1 + mq). \tag{2}$$

Очевидно, найдется такое натуральное $r \leq t$, что γ_k является элементом множества $P = \{\alpha_r, \beta_{r2}, \dots, \beta_{rm}\}$. Поэтому аналогично (2) получаем

$$P \subseteq \Delta(\gamma_k - mq, \gamma_k). \tag{3}$$

Так как $\gamma_k - \alpha_1 \geq 3mq$, существует такое $\lambda \in N$, что

$$\alpha_1 + mq < \lambda < \gamma_k - mq.$$

Пусть теперь x — любой из $m = 2^k$ циклов (1), X — множество всех элементов цикла x. Из определений множеств P и Q следует, что $X \cap P \neq \varnothing$ и $X \cap Q \neq \varnothing$. Значит, $|M_\lambda(x)| \geq 1$ ввиду включений (2), (3). Очевидно, $M_\lambda(x) \subseteq M_\lambda(h)$. Таким образом, $|M_\lambda(h)| \geq m > s = \omega(h)$. Но согласно лемме 2 $|M_\lambda(h)| \leq \omega(h)$. Получили противоречие. Лемма доказана.

4. Окончание доказательства теоремы 2

Предположим, что теорема 2 неверна. Тогда в силу замечания 1 в разложении неединичной подстановки h группы H на независимые циклы найдутся циклы

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \tag{4}$$

нечетных порядков (длин) и при этом

$$|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n| < \dots,$$

где $|z_n|$ — длина цикла $z_n, n \in N$.

Пусть $z = (\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m)$, $m = 2t - 1$, — любой из этих циклов. По условию теоремы 2 найдется такая подстановка $h_1 \in H$, что $h_1^2 = h$. Тогда разложение h_1 на независимые циклы содержит либо цикл $(\gamma_1\beta_1\gamma_2\beta_2 \dots \gamma_m\beta_m)$ длины $2m$, квадрат которого равен произведению z на цикл $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)$, либо цикл z^t, квадрат которого равен z. Применяя лемму 6 к подстановке h_1, заключаем, что первый из этих вариантов возможен лишь для конечного числа циклов (4).

Таким образом, найдется такое $n_0 \in N$, что для $n > n_0$ разложение подстановки h_1 на независимые циклы содержит цикл $z_n^{t_n}$, квадрат которого равен произведению z на цикл $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)$, либо цикл z^t, квадрат которого равен z.

Пусть $\omega(h) = r$. В силу условия теоремы 2 и леммы 1 в группе H найдутся такие однозначно определенные подстановки h_i, $1 < i < r + 2$, что $h_i^{2^i} = h$. Повторяя для h_i вышеизложенный анализ разложения h_1 на независимые циклы, докажем, что для каждого достаточно большого n в разложении h_i на независимые циклы имеется такой цикл u_n, что $u_n^{2^i} = z_n$.

В последовательности (4) найдется такой цикл x сколь угодно большой длины, что при каждом $i = 1, \ldots, r+2$ в разложении h_i на независимые циклы содержится цикл $x_i = x^{m_i}$ $(0 < m_i < |x|)$, для которого $x_i^{2^i} = x$. Из этого следует, что $x = x^{m_i 2^i}$, а потому

$$m_i 2^i = l_i |x| + 1. \tag{5}$$

Далее, поделим $|x|$ на 2^{r+3} с остатком:

$$|x| = k2^{r+3} + s, \tag{6}$$

где s — нечетное натуральное число и $s < 2^{r+3}$. Из соотношений (5) и (6) получаем

$$m_i 2^i = l_i(k2^{r+3} + s) + 1. \tag{7}$$

Положим

$$\gamma = \max(r, \omega(h_1), \ldots, \omega(h_{r+2})). \tag{8}$$

Считаем, что цикл x выбран таким образом, что число k из (6) удовлетворяет неравенству

$$k > \gamma + 2^{r+3}. \tag{9}$$

Разделим теперь m_i на k с остатком:

$$m_i = t_i k + s_i \quad (0 \le s_i < k), \tag{10}$$

а равенство (7) запишем в виде

$$(t_i k + s_i)2^i = l_i(k2^{r+3} + s) + 1,$$

или, иначе,

$$(t_i - l_i 2^{r-i+3})k2^i = sl_i + 1 - s_i 2^i. \tag{11}$$

Оценим правую часть равенства (11). Из соотношения (5) следует, что $0 < l_i < 2^i$, а так как в силу (6), (9) выполняются неравенства $0 < s < 2^{r+3} < k$, то $0 < sl_i + 1 < k2^i$. Таким образом,

$$|(sl_i + 1) - s_i 2^i| < k2^i.$$

Но левая часть равенства (11) кратна $k2^i$, а значит, она равна 0. Итак,

$$t_i = l_i 2^{r-i+3}. \tag{12}$$

Так как $|x|$ — нечетное число, в силу (5) нечетным является и l_i. Поэтому $t_i \ne t_j$ при $1 \le i < j \le r+2$ и

$$|m_i - m_j| = |(t_i k + s_i) - (t_j k + s_j)| = |(t_i - t_j)k + (s_i - s_j)|.$$

Согласно (12) разность $t_i - t_j$ кратна двум, а потому

$$|(t_i - t_j)k| \ge 2k.$$

Отсюда и из неравенства $|s_i - s_j| < k$ получаем результат:

$$|m_i - m_j| > k. \tag{13}$$

Пусть $x = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q)$. Будем считать, что α_1 — наименьшее число цикла x. Если i — любое из чисел $1, 2, \ldots, r+2$, то $0 < m_i < q$. Поэтому $\alpha_1^{x_i} = \alpha_1^{x^{m_i}} = \alpha_{m_{i+1}}$. С учетом определения (8) числа γ отсюда получаем

$$\alpha_{m_i+1} - \alpha_1 \le \omega(x_i) \le \omega(h_i) \le \gamma.$$

Это означает, что все числа α_{m_1+1} принадлежат отрезку $\Delta_1 = \Delta(\alpha_1, \alpha_1+\gamma)$ натуральных чисел. Числа $m_1, \dots, m_{r+2}$ расположим в порядке возрастания:

$$m_{i_1} < m_{i_2} < \dots < m_{i_{r+2}}. \quad (14)$$

Фиксируем любое j $(1 \leq j \leq r+1)$ и обозначим для краткости $\mu = m_{i_j}$, $\lambda = m_{i_{j+1}}$. Для этих чисел неравенство (13) примет вид

$$\lambda - \mu > k.$$

Поэтому число последовательных элементов

$$\alpha_1^{x^\mu} = \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_1^{x^\lambda} = \alpha_{\lambda+1}$$

цикла x превосходит k. Так как $\lambda_{\mu+1} \in \Delta_1$, $|\Delta_1| = \gamma+1$, из неравенства (9) следует, что существует такой индекс i $(1 \leq i < k)$, для которого $\alpha_{\mu+i} \in \Delta_1, \alpha_{\mu+i+1} \notin \Delta_1$. Это означает, что

$$\alpha_{\mu+i} \in M_{\alpha_1+\gamma}(x) = M_{\alpha_1+\gamma}(h).$$

Поскольку $\mu = m_{i_j}$ можно выбрать $r+1$ способами, отсюда и из неравенств (14) выводим, что $|M_{\alpha_1+\gamma}(h)| \leq r+1 = \omega(h)+1$. Но это противоречит лемме 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адо И. Д.* О подгруппах счетных симметрических групп // Докл. АН УССР. 1945. Т. 50. С. 15-17.
2. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.
3. *Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* О группах ограниченных подстановок // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2010. Т. 3, № 2. С. 15-17.
4. *Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* О подгруппах группы Lim(N) // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 208-217.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 7 июля 2024 г.
После доработки 28 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Сучков Николай Михайлович (ORCID 0009-0004-4019-4700),
Шлепкин Алексей Анатольевич (ORCID 0000-0003-2241-2842),
Тауснев Данил Алексеевич (ORCID 0009-0001-1033-6531),
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041
shlyopkin@mail.ru