Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.518+517.54

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. К. Водопьянов

Аннотация. Исследуются измеримые отображения римановых многообразий, индуцирующие по правилу замены переменной ограниченные операторы пространств Соболева. Получены эквивалентное описание таких отображений и некоторые дополнительные свойства.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.606

Ключевые слова: риманово многообразие, ACL-отображение, отображение с конечным искажением, внешняя операторная функция искажения, оператор композиции и его описание, $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина.

§ 1. Введение

Изучение операторов композиции в пространствах Соболева восходит к классической работе С. Л. Соболева [1] (см. работу [2], в которой приведена подробная история и библиография по этому вопросу). Новый импульс для развития этой проблематики возник при решении задачи Ю. Г. Решетняка об описании всех изоморфизмов φ^* однородных пространств Соболева L^1_n, порожденных квазиконформными отображениями φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, сформулированной в 1968 г. на первом Донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений. В [3] показано, что таковыми являются структурные изоморфизмы пространств L^1_n и только они. Предложенный в [3] подход к задаче Решетняка естественно рассматривать в контексте предшествующих этому результатов (см., например, [4]): в теоремах Банаха, Стоуна, Эйленберга, Аренса и Келли, Хьюита, Гельфанда и Колмогорова получены условия на различные структуры пространства непрерывных функций $C(S)$, изоморфизм которых определяет топологическое пространство S с точностью до гомеоморфизма. Отметим здесь результат Стоуна, согласно которому $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S. С другой стороны, Накаи [5] и Льюис [6] установили, что изоморфность алгебр Ройдена равносильна квазиконформной эквивалентности областей определения. Выделяя теперь в однородном пространстве Соболева L^1_n две структуры: векторной решетки и полунормированного пространства, мы получаем ситуацию, в алгебраическом смысле близкую к работе Стоуна, а в метрическом — к работе Накаи. Такой взгляд на задачу является наиболее естественным, так как все еще дает возможность восстановить отображение, несмотря на минимум «материала»

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006).

для его нахождения, доказать его непрерывность и установить его метрические свойства.

В рамках найденного в [3] подхода к проблеме Решетняка возникла следующая задача: какие метрические и аналитические свойства имеет измеримое отображение φ, индуцирующее изоморфизм φ^* по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_n$. Варьируя функциональное пространство, мы каждый раз приходим к новой задаче: пространства Соболева W^1_p, $p > n$, рассмотрены в работе [7], однородные пространства Бесова $b^l_p(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, $lp = n$, — в [8] при $p = n + 1$ и в [9] при $p > n + 1$, пространства Соболева W^1_p, $n - 1 < p < n$, — в [10], пространства риссовых и бесселевых потенциалов — в [11], трехиндексные шкалы пространств Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля (и их анизотропные аналоги) — в [12], пространства Соболева L^1_p на собственных областях многомерных евклидовых областей, $1 \leq p < \infty$, $p \neq n$, — в [13] (новое сравнительно с [10] доказательство), пространства Соболева L^1_p на областях групп Карно, $1 \leq p < \infty$, — в [14–16]. В [17] к задаче замены переменной в пространствах Соболева применена теория мультипликаторов. Свойства ограниченного оператора композиции на пространствах Бесова кроме работы [9] изучались также в [18] и в [19]. Квазиконформная эквивалентность классов Лизоркина — Трибеля исследована в [20].

Связь изоморфного ограниченного оператора композиции классов Соболева на римановых пространствах с геометрией риманова пространства установлена в [21–23].

Вывод работ [3, 8–16, 21–23] состоит в том, что изоморфность оператора φ^* влечет в зависимости от соотношения между показателями гладкости, суммируемости и размерностью пространства свойство отображения быть квазиконформным или квазиизометрическим в метрике области определения, адекватной геометрии функционального пространства.

Исследуемая в этой работе задача состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия на измеримое отображение φ, при выполнении которых φ индуцирует по правилу замены переменной ограниченный оператор φ^* пространств Соболева с первыми обобщенными производными на областях полных римановых многообразий.

Настоящую работу можно рассматривать как естественное развитие результатов и методов работ [2, 12, 13, 24–27], успешно примененных в [14–16] для решения задачи об операторе композиции на группах Карно.

Основной результат работы сформулирован в теореме 1, в которой при некоторых ограничениях на геометрию риманова многообразия в образе получены эквивалентные функциональные свойства отображений римановых многообразий, индуцирующих по правилу замены переменной ограниченные операторы композиции классов Соболева с первыми обобщенными производными. Кроме того, доказано, что исследуемый класс отображений обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина и другими свойствами.

§ 2. Классы функций и отображений Соболева на римановом многообразии

Далее фиксируем связное полное риманово многообразие $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, g)$, т. е. гладкое многообразие $\mathbb{M}$, в каждом касательном пространстве $T_x\mathbb{M}$ которого выбрано скалярное произведение g_x, гладко меняющееся от точки к точке.

Длина абсолютно непрерывной кусочно гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}$ выражается интегралом $l(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$ (здесь $|\dot\gamma(t)| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}$ — длина касательного вектора $\dot\gamma(t)$ в евклидовом пространстве $T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ со скалярным произведением $g_{\gamma(t)}$).

Метрика $d(x, y)$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно-гладких кривых с концевыми точками x и y.

Символом $B(x, r) = \{y \in \mathbb{M} \mid d(x, y) < r\}$ будем обозначать открытый шар в римановой метрике с центром в точке $x \in \mathbb{M}$ и радиусом $r \in (0, \infty)$, а символом $B^E(x, r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$.

Мера на многообразии $\mathbb{M}$ определяется следующим образом. Пусть (U, φ) — карта в $\mathbb{M}$. Диффеоморфизм $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать как изометрию между (U, g) и $(\varphi(U), \overline{g})$, если определить риманов тензор $\overline{g}$ на $\varphi(U)$ следующим образом: $\overline{g}_x(X, Y) = g_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi^{-1}(X), d\varphi^{-1}(Y))$, $x \in \varphi(U)$ и $X, Y \in T_x\mathbb{R}^n$. Меру множества $E \subset U$ в том случае, когда образ $\varphi(E)$ измерим по Лебегу в $\mathbb{R}^n$, определим по формуле

$$\omega(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \sqrt{\det \overline{g}}\, dx.$$

Можно доказать, что определенная таким образом мера не зависит от выбора системы координат и совпадает с n-мерой Хаусдорфа $\mathscr{H}^n(E)$ множества E как подмножества метрического пространства $(\mathbb{M}, g)$ (см., например, [28]).

Мера $\omega(E)$ произвольного множества $E \subset \mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань сумм

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(E_i), \quad \text{где } E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

множества E_i дизъюнктны, измеримы и каждое содержится в одной карте. Можно показать, что и в этом случае справедливо равенство $\mathscr{H}^n(E) = \omega(E)$.

Далее будем исследовать свойства измеримых отображений $f : \mathbb{M} \to \mathscr{M}$, где $(\mathscr{M}, \mathfrak{g})$ — еще одно риманово многообразие с римановым тензором $\mathfrak{g}$, относительно которого определяются риманова метрика $\mathfrak{d}$ на $\mathscr{M}$; риманова метрика $\mathfrak{d}$ определяет, в свою очередь, меру ν на $\mathscr{M}$.

Пусть D — область (связное открытое множество) на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 1. **1)** Пространство функций $L_p(D)$, суммируемых в степени $p \in [1, \infty)$, состоит из измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f \mid L_p(D)\| = \biggl(\int\limits_D |f(x)|^p\, d\omega\biggr)^{1/p} < \infty.$$

Здесь ω — определенная выше мера на римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$.

2) Если измеримая функция $u : D \to \mathbb{R}$ суммируема на каждой компактной части области D, то она называется *локально суммируемой в степени* s (в этом случае пишем $u \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ или $u \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$).

3) Измеримое отображение $f : \mathbb{M} \to \mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ — еще одно риманово пространство, принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$, $1 \le s \le \infty$, тогда и только тогда, когда функция $[f]_y : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, определенная по правилу $[f]_y(x) = \mathfrak{d}(f(x), y)$, принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ для любой точки $y \in \mathscr{M}$.

Определение 2. Для функций $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ класса C^1 можно определить дифференциал $df : T_x\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{M}$. Так как $df(x)$ — линейный функционал над конечномерным пространством $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x, существует единственный вектор $\nabla f \in T_x\mathbb{M}$, называемый *градиентом*, такой, что выполняется равенство $df(x)(X) = g_x(\nabla f, X)$ для всех $X \in T_x\mathbb{M}$.

В координатах градиент ∇f можно найти следующим образом:

$$\nabla f = g^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

где g^{-1} — обратная матрица к g, а $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — частные производные.

Обобщенным градиентом локально-суммируемой функции $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ называется локально-суммируемое сечение $h : \mathbb{M} \to \mathbb{TM}$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{M}} h\eta\, d\omega = -\int\limits_{\mathbb{M}} f\nabla\eta\, d\omega$$

для любой гладкой финитной функции $\eta : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. (Здесь $\nabla\eta$ — градиент функции η на $\mathbb{M}$.)

Однородное пространство Соболева $L^1_p(D)$ состоит из локально интегрируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенный градиент $\nabla f \in L_p(D)$. Полунорма в $L^1_p(D)$ определяется как величина

$$\left\| f \mid L^1_p(D) \right\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\| = \left(\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \, d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

(здесь $\nabla f(x)$ — обобщенный градиент функции f в точке $x \in D$, а $|\nabla f(x)|$ — длина обобщенного градиента $\nabla f(x)$ в евклидовом пространстве $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x).

Пространство Соболева $W^1_p(D)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\left\| f \mid W^1_p(D) \right\| = \| f \mid L_p(D)\| + \|\nabla f \mid L_p(D)\|.$$

Будем говорить, что f *принадлежит* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, если $f \in W^1_p(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset D$ такой, что $V \Subset D$ (т. е. V ограничена и $\overline{V} \subset D$).

В [29] Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{X}, r)$ — полное метрическое пространство, r — метрика на $\mathbb{X}$, а D — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 3. Будем говорить, что измеримое отображение $\varphi : D \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{X})$, если выполнены следующие условия.

(A) Для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[f]_z : x \in D \mapsto r(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$.

(B) Семейство градиентов $(\nabla[f]_z)_{z\in\mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, т. е. существует функция $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla[f]_z(x)| \le g(x)$ для почти всех $x \in D$.

Если $\mathbb{X} = \mathscr{M}$ — еще одно риманово многообразие с расстоянием $\mathfrak{d}$, то получаем определение отображения класса Соболева различных римановых многообразий и обозначаем этот класс символом $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathscr{M})$. В этом случае удобно использовать эквивалентное описание отображения класса Соболева (см., например, [30–32]).

Определение 4 [30, 32]. Говорят, что измеримое отображение f *принадлежит* $\mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathscr{M})$, если выполняются три условия:

1) функция $\mathbb{M} \ni x \to [f]_z(x) = \mathfrak{d}(f(x), z)$ принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathscr{M}$;
2) отображение $f : \mathbb{M} \to \mathscr{M}$ абсолютно непрерывно на линиях в следующем смысле: для любой координатной карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{M}$ функция[1)]

$$(\overline{x}_i, x_i) \in \mathrm{Pr}_i(\varphi(U)) \times \{x_i \in \mathbb{R} : \overline{x}_i + x_i\mathbf{e}_i \in \varphi(U)\} \mapsto g_i(\overline{x}_i, x_i) \\ = f \circ \varphi^{-1}(\overline{x}_i + x_i\mathbf{e}_i) \in \mathscr{M}$$

абсолютно непрерывна относительно переменной x_i для всех i и почти всех $\overline{x}_i \in \mathrm{Pr}_i(\varphi(U))$ (здесь $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, — стандартный базис $\mathbb{R}^n$);
3) производная

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{dg_i}{dx_i}(\overline{x}_i, x_i) = \lim_{t\to+0} \frac{g_i(\overline{x}, x_i + t)}{t},$$

существующая почти всюду в U, принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(U)$ для всех i.

Предложение 1 [30, предложение 3.1]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $f \in W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathscr{M})$;

(2) $f \in \mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathscr{M})$;

(3) $f \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathscr{M})$ *и существует функция* $g \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathbb{R})$ *такая, что для любой липшицевой функции* $\psi : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ *функция* $\varphi := \psi \circ f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *принадлежит* $W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathbb{R})$ *и* $|\nabla\varphi(x)| \le \mathrm{Lip}(\psi)\, g(x)$ *п. вс. в* $\mathbb{M}$.

(4) *для любого изометрического вложения* $i : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^k$ *все координатные функции композиции* $i \circ f$ *принадлежат* $W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathbb{R})$.

Доказательство. Импликации следуют порядку (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (2). Заметим, что импликация (3) ⇒ (1) очевидна, так как функция расстояния 1-липшицева.

Далее, (1) ⇒ (2) и (2) ⇒ (3) доказаны в [33, предложение 3] (заметим, что (1) ⇒ (3) другим способом доказано также в [29, теорема 5.1]).

Доказательство (4) ⇒ (2) приведено в [34, предложение 1.2] для специального случая $\mathscr{M} = \mathbb{R}^n$. Его обобщение на случай подмногообразий $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^k$ основано на формуле

$$g_i(x, \tau + t) - g_i(x, \tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+t} \frac{d}{ds}(f \circ \varphi^{-1}(x + s\mathbf{e}_i))\, ds,$$

которая верна для всех абсолютно непрерывных кривых в $\mathbb{R}^k$. Общий случай следует из возможности вложить изометрично всякое риманово многообразие в некоторое евклидово пространство.

[1)]Здесь $\mathrm{Pr}_i(A)$ — проекция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ на $(n-1)$-мерную плоскость $\Pi_i = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$, ортогональную $\mathbf{e}_i$, т. е. $\mathrm{Pr}_i(x) = (x - x_i\mathbf{e}_i)$ для точки $x \in \mathbb{R}^n$. Если $\mathrm{Pr}_i(x) = \overline{x}_i$, то точку $x \in \mathbb{R}^n$ можно записывать в виде $x = (\overline{x}_i, x_i)$. Тогда $x = \overline{x}_i + x_i\mathbf{e}_i$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Рассмотрим любое изометрическое вложение $i : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^k$ и некоторую координатную функцию z_j в $\mathbb{R}^k$. Ограничение $z_j|_{\mathscr{M}}$ — это липшицева функция на $\mathscr{M}$. Следовательно, композиция $z_j \circ f$ принадлежит $W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$. $\square$

В следующем предложении формулируется свойство локальной липшицевости соболевского отображения.

Предложение 2. *Пусть $\varphi \in \mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$. Тогда существует представление $\mathbb{M} = E_\varphi \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств таких, что $\omega(E_\varphi) = 0$, A_i измеримо для всех i, а ограничение $\varphi|_{A_i}$ липшицево.*

Доказательство. Применение сформулированных выше свойств отображений классов Соболева позволяет свести доказательство этого предложения к известной аппроксимационной теореме Уитни (см., например, [35–37]).

Предложение 1 позволяет по-другому определить дифференциал. Матрица, столбцы которой — это векторы

$$\frac{d}{dt} g_i(x + t\mathbf{e}_i)|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}\mathscr{M}, \quad i = 1, \dots, n,$$

определяет линейный оператор $D\varphi(x) : T_x\mathbb{M} \mapsto T_{\varphi(x)}\mathscr{M}$ касательного пространства $T_x\mathbb{M}$ в касательное пространство $T_{\varphi(x)}\mathscr{M}$ для почти всех x и называется (*формальным*) *дифференциалом* отображения φ в точке x. Пусть $|D\varphi|(x)$ — норма этого оператора. В случае $\dim \mathbb{M} = \dim \mathscr{M}$ определитель матрицы $D\varphi(x)$ называется *якобианом* отображения φ в точке x.

В качестве следствия предложения 2 получаем следующий вариант формулы замены переменной в интеграле Лебега. Напомним, что символ χ_A обозначает характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{M}$. Ниже $d\nu$ — стандартный элемент объема на римановом многообразии $\mathscr{M}$. Символом $\omega(E)$ $(\nu(F))$ обозначаем далее меру $\omega(E) = \int\limits_E \chi_E \, d\omega$ $\big(\nu(F) = \int\limits_F \chi_F \, d\nu\big)$ измеримого множества $E \subset \mathbb{M}$ $(F \subset \mathscr{M})$

Предложение 3 [35, 37]. *Пусть $\mathbb{M}, \mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть $U \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, $\varphi : U \to \mathscr{M}$ — любое* ACL-*отображение.*

Тогда существует некоторое подмножество $\Sigma_\varphi \subset U$ нулевой ω-меры такое, что отображение $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \to \mathscr{M}$ удовлетворяет $\mathscr{N}$-условию Лузина.

Кроме того, для любой неотрицательной измеримой функции $u : U \to \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:

1) *функции $U \ni x \mapsto u(x)|\det D\varphi(x)|$ и $\mathscr{M} \ni y \mapsto \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)$ измеримы;*

2) *верно равенство*

$$\int\limits_U u(x)|\det D\varphi(x)| \, d\omega(x) = \int\limits_{\mathscr{M}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x) \, d\nu(y); \tag{2}$$

3) *если дополнительно функция $U \ni x \mapsto u(x)|\det D\varphi(x)|$ интегрируема, то и подынтегральная функция в правой части равенства* (2) *также интегрируема и верна формула* (2).

§ 3. ACL-отображения и операторы композиции

Отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\mathscr{M})$, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, называется *отображением с конечным искажением*, если $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det D\varphi(x) = 0\}$. Класс ACL-отображений $\varphi : \Omega \to \mathscr{M}$ с конечным искажением обозначается символом $FD(\Omega;\mathscr{M})$.

Для ACL-отображения $\varphi \in FD(\Omega;\mathscr{M})$ зададим *функцию искажения*[2)], определенную на произвольном измеримом множестве $A \subset \mathscr{M}$:

$$A \ni y \mapsto H_{\varphi,q}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi \mid \det D\varphi(x) \neq 0\} = \varnothing, \\ \Big(\sum\limits_{\substack{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi,\\ \det D\varphi(x)\neq 0}} \frac{|D\varphi|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\Big)^{\frac{1}{q}}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Пространство $\mathrm{Lip}(W)$ состоит из липшицевых в римановой метрике функций $u : W \to \mathbb{R}$, а пространство $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ — из заданных на W функций, липшицевых в римановой метрике на каждом компакте $K \Subset W$.

Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с вопросом описания ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

В следующем утверждении установим двухсторонние оценки для нормы оператора композиции φ^*.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Измеримое отображение $\varphi : \Omega \to W$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \Subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{4}$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathscr{M})$;

2) *φ имеет конечное искажение;*

3) $H_{\varphi,q} \in L_\sigma(W)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *здесь и далее $\sigma = \infty$ при $q = p$.*

При этом норма оператора $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|$: для некоторой константы $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{q,p}\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\| \le \|\varphi^*\| \le \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|, \quad 1 \le q \le p < \infty. \tag{5}$$

Напомним, что отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathscr{M})$ имеет *конечное искажение*, если $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{\det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана. Далее предполагаем множество Z дизъюнктным с множеством Σ_φ из предложения 3: $Z \cup \Sigma_\varphi = \varnothing$.

3.1. Доказательство необходимости содержится в нескольких разделах.

Предложение 4. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Если измеримое отображение $\varphi : \Omega \to W$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \Subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{6}$$

[2)] Функция (3) определена в [38] для операторов композиции в евклидовых пространствах.

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u\circ\varphi$, *то* $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$.

Доказательство. Пусть открытое множество $W \Subset \mathscr{M}$ компактно вложено в $\mathscr{M}$. Для проверки свойства $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$ достаточно установить, что для любого изометрического вложения $i : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^k$ все координатные функции композиции $i \circ f$ принадлежат $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ (см. предложение 1, утверждение 4). Действительно, если z_j — любая координатная функция в $\mathbb{R}^k$, то функция $i^*(z_j) = z_j \circ i$ гладкая на $\overline{W}$ и, следовательно, принадлежит классу $L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W)$. В силу (4) композиция $f^*(i^*(z_j)) = (i \circ f)(z_j)$ принадлежит классу $L^1_q(\Omega)$, $j = 1, \dots, k$. В силу предложения 1 $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$.

Замечание 1. Эту часть доказательства можно обобщить для произвольного измеримого отображения $\varphi : \Omega \to W$, индуцирующего ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega)$, $1 \le q \le p < \infty$, без предположения о компактном вложении $W \Subset \mathscr{M}$ (см. подходящие аргументы в [27, предложение 8]).

Фиксируем произвольное открытое множество $V \subset W$. Обозначим через $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$ пространство функций $u : W \to \mathbb{R}$, липшицевых в метрике риманова многообразия $\mathscr{M}$, носители которых содержатся в V. Понятно, что $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V) \subset \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W)$.

Обозначим через $\|\varphi^*_V\|$ норму сужения оператора композиции φ^* на подпространство $L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$. При $q < p$ определим функцию множества Φ, сопоставляя открытому множеству $V \subset W$ число

$$\Phi(V) = \|\varphi^*_V\|^\sigma = \sup_{u \in L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V),\, u \neq 0} \left(\frac{\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\|}{\|u \mid L^1_p(V)\|} \right)^\sigma, \quad \text{где } \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Функция множества* Φ, *определенная на открытых множествах* $V \subset W$ *формулой* (6), *монотонная*[3] *и счетно-аддитивная*[4].

Простое доказательство леммы 1 на группах Карно, полученное в [26, лемма 3.1] (ср. с первоначальным доказательством в [24, лемма 1]), почти дословно переносится на рассматриваемую ситуацию.

Предложение 5 [39, следствие 5]. *Пусть* $D \Subset \mathscr{M}$ — *открытое компактно вложенное множество, а монотонная и счетно-аддитивная функция множества* Φ *определена на системе* $\mathscr{O}(D)$ *всех открытых подмножеств в* D, *содержащей, в частности, все шары* $B(y, r)$ *такие, что* $\overline{B}(y, r) \subset D$. *Тогда*

(a) *в почти каждой точке* $x \in D$ *существует конечная производная*

$$\lim_{B_\delta \ni x,\, \delta \to 0} \frac{\Phi(B_\delta)}{\nu(B_\delta)} = \Phi'(y),$$

где предел берется по римановым шарам $B_\delta \Subset D$ *радиуса* $\delta > 0$ *таким, что* $B_\delta \ni x$;

---

[3] Т. е. $\Phi(V_1) \le \Phi(V_2)$ для любых открытых множеств $V_1 \subset V_2 \subset W$.

[4] Т. е. для любого счетного дизъюнктного набора открытых множеств $V_i \subset W$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(V_i) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right).$$

(b) *для любого открытого множества $U \in \mathscr{O}(D)$ справедливо неравенство*

$$\int_U \Phi'(x)\, d\nu(x) \le \Phi(U).$$

Сформулируем применяемое ниже свойство евклидовых шаров $\mathbb{R}^n$ (см. [36, 40], где доказаны свойства 1, 2 предложения 6, и [41], где доказано свойство 3 предложения 6).

Предложение 6 [36, 40, 41]. *Для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ с непустой границей существует не более чем счетное семейство $\mathscr{F} = \{B_i^E\}$ евклидовых шаров такое, что*

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i^E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} 2B_i^E = V$, *где* $2B_i^E = B^E(z_i, 2r_i)$;

2) *семейства $\mathscr{F} = \{B_i^E\}$ и $2\mathscr{F} = \{2B_i^E\}$ образуют конечнократное покрытие множества V;*

3) *семейство $\{2B_i^E\}$ может быть разбито на конечное число β_n (зависящее только от размерности n) подсемейств таких, что внутри каждого из них шары не пересекаются.*

Следствие 1. *Если покрытие $\{B^E(y_j, 2r_j)\}$ открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ выбрано в соответствии с предложением 6, то*

$$\sum_j \Phi(B^E(y_j, 2r_j)) \le \beta_n \Phi(V),$$

где постоянная β_n зависит только от топологической размерности n.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}_i$ — подсемейства семейства $\{B^E(y_j, 2r_j)\}$, состоящие из взаимно не пересекающихся шаров и такие, что

$$\bigcup_{i=1}^{\beta_N} \mathscr{B}_i = \{B^E(y_j, 2r_j)\}.$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\sum_j \Phi(B^E(y_j, 2r_j)) = \sum_{i=1}^{\beta_N} \sum_{B^E(y_j, 2r_j) \in \mathscr{B}_i} \Phi(B^E(y_j, 2r_j)) \le \sum_{i=1}^{\beta_N} \Phi(V) = \beta_N \Phi(V).$$

3.2. В этом пункте докажем несколько вспомогательных свойств и соотношений, применяемых в дальнейших доказательствах.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{M} \ni x \mapsto u(x) = d(x_0, x)$, где $x_0 \in \mathbb{M}$ — фиксированная точка. Тогда*

$$|\nabla u(x)| = 1 \quad \omega\text{-почти всюду в } \mathbb{M}.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на три этапа.

1. Имеем $|u(x) - u(y)| = |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \le d(x, y)$. Таким образом, u — липшицева функция. Отсюда

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)} \le 1 \quad \text{для всех } x \ne y. \tag{7}$$

2. Для произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ найдется кратчайшая γ, соединяющая x и x_0. Пусть y — точка на кривой γ. Тогда $|u(x)-u(y)| = d(x,y)$ и, следовательно,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)} = 1 \quad \text{для } y \in \gamma. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) выводим

$$\varlimsup_{y \to x \in \mathbb{M}} \frac{|u(y)-u(x)|}{d(x,y)} = 1. \tag{9}$$

3. Так как u — липшицева функция, по теореме Радемахера u дифференцируема почти всюду [35]. Пусть $x \in \mathbb{M}$ — точка дифференцируемости функции u, а $X_1, X_2, \dots, X_n$ — локальный базис касательного расслоения в окрестности точки x, ортонормированный в точке x. Переходя к нормальным координатам (см., например, [42, гл. 4, § 3, предложение 3.4]) в точке x, имеем

$$\lim_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \frac{u(y) - u(0) - \nabla u(0) \cdot y}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} = 0, \tag{10}$$

где

$$\nabla u(0) \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_i}(0) y_i, \quad y \in T_x\mathbb{M}.$$

Как обычно, точки в касательном пространстве и римановом многообразии отождествляются посредством нормальных координат (см. [28]).

Из (9) и (10) можно вывести, что

$$\varlimsup_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \frac{|\nabla u(0) \cdot y|}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} = 1.$$

Отсюда получаем

$$1 = \varlimsup_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \left| \nabla u(0) \cdot \frac{y}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} \right| = \sup_{y \in T_x\mathbb{M},\, \|y\|_{T_x\mathbb{M}} = 1} |\nabla u(0) \cdot y|.$$

Следовательно, $|\nabla u(x)| = 1$ ω-почти всюду в $\mathbb{M}$.

Замечание 2. Приведем свойства нормальной системы координат [42–44], применяемые в этой работе. Для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ найдутся число r_0 и диффеоморфизм $\eta : B(x, r_0) \to T_x\mathbb{M}$ такие, что

1) $\eta(B(x,r)) = B_{T_x}(0,r)$ для любого $r \in (0, r_0)$, где $B_{T_x}(0,r)$ — шар в касательном пространстве $T_x\mathbb{M}$ с центром в точке 0 радиуса r (евклидова структура в касательном пространстве $T_x\mathbb{M}$ определяется тензором g_x);

2) образ любого прямолинейного отрезка $[0,\xi]$, $\xi \in B_{T_x}(0,r)$, при отображении η^{-1} будет кратчайшей геодезической в $\mathbb{M}$ с концевыми точками x и $\eta^{-1}(\xi)$;

3) дифференциал $D\eta : T_x\mathbb{M} \to T_x\mathbb{M}$ в точке x — тождественное отображение;

4) диффеоморфизм $\eta : B(x,r) \to B_{T_x}(0,r)$ квазиизометричен, причем коэффициент квазиизометричности стремится к 1 при $r \to 0$.

Пусть $Z = \{y \in \Omega \mid \det D\varphi(y) = 0\}$ — множество нулей якобиана отображения $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$. Дополнение $\Omega \setminus Z$ с точностью до множества Σ_φ нулевой меры можно представить в виде объединения не более чем счетной дизъюнктной совокупности измеримых множеств T_i (т. е. $\Omega \setminus Z = \Sigma_\varphi \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i$), на каждом из которых отображение $\varphi : T_i \to \mathscr{M}$ липшицево относительно римановых метрик (см. предложение 2). Известно [35], что липшицево отображение $\varphi : T_i \to \mathscr{M}$ дифференцируемо в ω-почти всех точках плотности 1 множества T_i, $i \in \mathbb{N}$. Если $x \in T_i$ — точка дифференцируемости, то имеем дифференциал

$$D\varphi(x) : T_x\mathbb{M} \to T_{\varphi(x)}\mathscr{M} \tag{11}$$

касательных пространств. Перейдем к нормальным координатам (U, ζ) (см. [42, гл. 4, § 3, предложение 3.4]) в точке x. Тогда U содержит точку x и $\zeta(x) = 0$, $\zeta(y) = z$ для $y \in U$, а для дифференциала (11) в этой системе координат имеем асимптотическое разложение (см. замечание 2)

$$d(\varphi(z) - \varphi(0) - D\varphi(0)\langle z\rangle) = o(d(z)) \quad \text{при } z \to 0,\ z \in \zeta(U \cap T_i). \tag{12}$$

Свойство 1. *Пусть φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$ и имеет конечное искажение, $z \in \mathscr{M}$ — фиксированная точка.*

1. *Если $y \ni \mathscr{M} \mapsto f(y)$ — функция класса $\mathrm{Lip}(\mathscr{M}; \mathbb{R})$, а $\Omega \ni x \mapsto (f \circ \varphi)(x)$ — композиция отображения φ с функцией f, то для ω–п. вс. $x \in \Omega$ имеет место равенство*[5)]

$$\nabla(f \circ \varphi)(x) = \begin{cases} [\nabla f](\varphi(x))[D\varphi(x)]^{\mathrm{tr}}, & \text{если } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0, & \text{если } x \in Z. \end{cases} \tag{13}$$

Из (13), в частности, получаем $|\nabla(f \circ \varphi)(x)| \le \mathrm{Lip}\, f \cdot |D\varphi(x)|$ для ω-п. вс. $x \in \Omega$.

2. *Для функции $y \ni \mathbb{G} \mapsto u_z(y) = d(y, z)$, $z \in \mathscr{M}$ — фиксированная точка, композиция $\Omega \ni x \mapsto (u_z \circ \varphi)(x) = d(\varphi(x), z)$ отображения φ с функцией u_z дифференцируема для ω–п. вс. $x \in \Omega$ и имеет место равенство*

$$\nabla(u_z \circ \varphi)(x) = \begin{cases} [\nabla u_z](\varphi(x))[D\varphi(x)]^{\mathrm{tr}}, & \text{если } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0, & \text{если } x \in Z. \end{cases} \tag{14}$$

Из (14) и леммы 2, в частности, получаем

$$|\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| \le |D\varphi(x)| \quad \text{для } \omega\text{-п. вс. } x \in \Omega.$$

Доказательство. 1. Известно, что совокупность $S \subset \mathscr{M}$ точек римановой недифференцируемости липшицевой функции f имеет нулевую меру. Пусть мера прообраза $\varphi^{-1}(S)$ положительна. По формуле замены переменной $\det D\varphi(x) = 0$ для п. вс. $x \in \varphi^{-1}(S)$. Следовательно, с точностью до множества меры нуль (т. е. $\omega(\varphi^{-1}(S) \setminus Z) = 0$) выводим $\varphi^{-1}(S) \subset Z$. В силу конечности искажения имеем также $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на Z.

Если $x \in T_i \cap Z$ — точка дифференцируемости отображения φ, то $D\varphi(x) = 0$. Из (12) имеем

$$\begin{aligned} |(f \circ \varphi)(y) - (f \circ \varphi)(x)| &\le \mathrm{Lip}\, f \cdot d(\varphi(y), \varphi(x)) \\ &= \mathrm{Lip}\, f \cdot d(D\varphi(x)\langle y - x\rangle) + o(d(y - x)) = o(d(y - x)) \quad \text{при } T_i \ni y \to x. \end{aligned}$$

Таким образом, второе равенство в (13) доказано.

Для доказательства первого равенства в (13) рассмотрим точку $x \in T_i \setminus \varphi^{-1}(S)$ плотности 1, в которой отображение φ дифференцируемо (как отмечено выше, таковыми будут почти все точки T_i). Так как функция $\mathscr{M} \ni y \mapsto f(y)$

[5)] Мы употребляем обозначение A^{tr} для матрицы, транспонированной к квадратной матрице A.

дифференцируема во всех точках $y \notin S$, то функция $T_i \ni x \mapsto (f \circ \varphi)(x)$ дифференцируема как композиция дифференцируемых отображений [35].

Таким образом, (13) доказано. Неравенство $|\nabla(f \circ \varphi)(x)| \leq \operatorname{Lip} f \cdot |D\varphi(x)|$ для ω–п. вс. $x \in \Omega$ получаем из (13).

2. Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что отображение $y \ni \mathscr{M} \mapsto f(y) = u_z(y) = d(y, z)$ — это функция класса $\operatorname{Lip}(\mathscr{M})$ и $\operatorname{Lip} f = 1$ по лемме 2.

Следствие 2. *Пусть φ принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$,

$$S = \{z_1, z_2, \dots, z_l, \dots\}$$

— счетное всюду плотное множество в $\mathscr{M}$. Для ω-п. вс. $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$|D\varphi(x)| = \sup_{z \in S} |\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| = \lim_{l \to \infty} \max\{|\nabla(u_{z_i} \circ \varphi)(x)| : i = 1, \dots, l\}.$$

Доказательство. Пусть в точке $x \in \Omega$ отображение φ дифференцируемо.

Если $D\varphi(x) = 0$, то в силу второй строки в равенстве (14) имеем $\nabla(u_z \circ \varphi)(x) = 0$ для любой точки $z \in \mathscr{M}$. (В доказательстве этого свойства условие конечности искажения не используется.) В этом случае следствие 2 доказано!

Если же $D\varphi(x) \neq 0$ в точке $x \in \Omega$, то в нормальной системе координат в точке x имеем неравенство (см. замечание 2)

$$\frac{|d(\varphi(x \exp tw), z) - d(\varphi(x), z)|}{t} \leq \frac{d(\varphi(x \exp tw), \varphi(x))}{t},$$

где $w \in T_x\mathbb{M}$, $|w| = 1$, $t > 0$ — вещественный параметр, а $z \in \mathscr{M}$ — произвольная точка. Заметим, что в силу свойств нормальной системы координат в приведенном неравенство будет равенство, если $z = x \exp \tau w$ при $0 < t < \tau$.

В точке $x \in T_i$ плотности 1, в которой отображение φ дифференцируемо, для некоторого вектора $w_0 \in T_x\mathbb{M}$, $|w_0| = 1$, имеем $|D_h\varphi(x)\langle w_0\rangle| = |D_h\varphi(x)|$. Для выбранной точки $z = x \exp \tau w_0$ при $0 < t < \tau$ получаем

$$\begin{aligned} |\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| &= \lim_{t \to 0} \frac{|d(\varphi(x \exp tw_0), z) - d(\varphi(x), z)|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{d(\varphi(x \exp tw_0), \varphi(x))}{t} = |D\varphi(x)\langle w_0\rangle| = |D\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Пусть $\{z_{l_k}\}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $S = \{z_l\}$, сходящаяся к точке z. Для точки $z_{l_k} = x \exp \tau_k w_k \in T_i$, $|w_k| = 1$, близкой к выбранной ранее точке $z = x \exp \tau w_0$, имеем $w_k \to w_0$ и $\tau_k \to \tau$ при $z_{l_k} \to z$, когда $k \to \infty$, и следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} |\nabla(u_{z_{l_k}} \circ \varphi)(x)| &= \lim_{t \to 0} \frac{|d(\varphi(x \exp tw_{l_k}), z_{l_k}) - d(\varphi(x), z_{l_k})|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{d(\varphi(x \exp tw_{l_k}), \varphi(x))}{t} = |D\varphi(x)\langle w_{l_k}\rangle| \leq |D\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Сравнивая правые части двух последних соотношений, выводим

$$\lim_{k \to \infty} |\nabla(u_{z_{l_k}} \circ \varphi)(x)| = |\nabla(u_z \circ \varphi)(x)|, \quad \sup_{z \in S} |\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| = |D\varphi(x)|.$$

Приведенное доказательство получено в предположении дифференцируемости отображения φ в точке $x \in T_i$ плотности 1. Таковыми будут ω-почти все точки $x \in \Omega$.

3.3. Доказательство следующего утверждения основано на модификации рассуждений из [26, лемма 3.4].

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть измеримое отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega, W)$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \Subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 < q \le p < \infty.$$

Тогда отображение φ имеет конечное искажение.

Доказательство. Шаг 1. Фиксируем точку $y_0 \in W$ и шар $B(y_0, r)$ такие, что $B(y_0, 2r) \subset W$. Рассмотрим функцию $\theta(y) = \min\big(1, (2r)^{-1} u_{y_0,2r}(y)\big)$, где $u_{y_0,r}(y) = \max(r - \mathfrak{d}(y_0, y), 0) = (r - \mathfrak{d}(y_0, y))^+$ — липшицева функция с постоянной Липшица $\mathrm{Lip}\, u_{y_0,2r} = 1$ (см. лемму 2).

Используя ограниченность оператора композиции и (6), для липшицевой функции $f : W \to \mathbb{R}$, $|f(y) - f(z)| \le L\mathfrak{d}(z, y)$ для всех $y, z \in W$, выводим

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x)\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla((f(y) - f(y_0))\theta(y))|^p\, d\nu(y)\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla f|^p(y)\theta^p(y)\, d\nu(y)\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla\theta|^p(y)|f(y) - f(y_0)|^p\, d\nu(y)\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \nu(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{p}} \big(L + L2r(2r)^{-1}\big)$$
$$= c\, \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \nu(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{p}},$$

поскольку $|\nabla f| \le L$, $\theta(y) \le 1$, $|\nabla\theta|(y) \le (2r)^{-1}$, $|f(y) - f(y_0)| \le L\mathfrak{d}(y, y_0) \le L2r$ для $y \in B(y_0, 2r)$. Здесь постоянная $c = 2\,\mathrm{Lip}\, f$, где $\mathrm{Lip}\, f$ из определения липшицевости функции f.

В случае $p = q$ следует положить

$$\Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi^*\|.$$

Окончательно приходим к оценке

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x) u(x)\, d\omega(x) \le c^q \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{q}{\sigma}} \nu(B(y_0, 2r))^{\frac{q}{p}}. \tag{15}$$

Шаг 2. Из оценки (15) можно получить следующее

Свойство 2. *Пусть непостоянное отображение $\varphi : \Omega \to W$, где $\Omega \subset \mathbb{M}$ — связное открытое множество в $\mathbb{M}$, а $W \Subset \mathscr{M}$ — компактно вложенная область, принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p \le n.$$

Для любой липшицевой функции $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0 \quad \text{для } \omega\text{-п. вс. } x \in Z. \tag{16}$$

Доказательство. Покроем область W счетным набором карт $\eta_j : V_j \to \mathbb{R}^n$. Достаточно доказать соотношение $|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0$ для ω-п. вс. $x \in Z \cap \varphi^{-1}(V_j)$, где $\eta_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ — некоторая система координат на $\mathscr{M}$ из выбранного счетного набора: $V_j \subset W$.

Действительно, поскольку $\nu(\varphi(Z)) = \nu(\eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)) = 0$, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать открытое множество $U \supset \eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)$ такое, что $U \subset \eta_j(V_j)$, и покрытие множества $\eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)$, состоящее из счетного набора евклидовых шаров $\{B_l^E = B^E(y_l, r_l) \subset U\}$ такого, что шары $B^E(y_l, 2r_l)$ с удвоенными радиусами содержатся в U, образуют конечнократное покрытие $U \supset \eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)$ и

$$\sum_{l=1}^{\infty} \nu\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big) < M\varepsilon,$$

где M — кратность покрытия. Кроме того, в соответствии с предложением 6 и следствием 1 покрытие $\big\{B_l^E = B^E(y_l, r_l)\big\}$ можно выбрать таким, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Phi\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_j, 2r_j))\big) \le \beta_n \Phi\Bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} \eta_j^{-1}(B^E(y_j, 2r_j))\Bigg).$$

Из неравенства (15) при $q < p$ имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Z \cap \varphi^{-1}(V_j)} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x) &\le \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B^E(y_l, r_l))} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x) \\
&\le C^q \sum_{l=1}^{\infty} \Phi\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)^{\frac{q}{\sigma}} \nu\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C^q \Bigg(\sum_{l=1}^{\infty} \Phi\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)\Bigg)^{\frac{q}{\sigma}} \Bigg(\sum_{l=1}^{\infty} \nu\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)\Bigg)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C^q \beta_n^{\frac{q}{\sigma}} M^{\frac{q}{p}} \Phi(W)^{\frac{q}{\sigma}} \varepsilon^{\frac{q}{p}},
\end{aligned}$$

где $C = 2 \sup\limits_{B^E(y_l, 2r_l) \subset U} \operatorname{Lip}_{y_l, 2r_l} f$, а

$$\operatorname{Lip}_{y_l, 2r_l} f = \sup_{y, z \in B(y_0, 2r_l)} \left\{\frac{|f(y) - f(z)|}{d(y, z)}\right\}.$$

Если $q = p$, то

$$\int\limits_{Z \cap \varphi^{-1}(V_j)} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x) \le C^q M \|\varphi^*\|^q \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное положительное число, выводим $|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0$ в ω-п. вс. точках $x \in Z \cap \varphi^{-1}(V_j)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Ввиду $\bigcup\limits_j V_j = W$ имеем $|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0$ на Z ω-п. вс. Свойство 2 доказано.

Шаг 3. Покажем, как из неравенства (16) можно вывести конечность искажения отображения φ.

Применим для этого следствие 2, в котором φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega;W)$, S – счетное всюду плотное множество в W. Для любого $z_i\in S$ в п. вс. точках множества Z нулей якобиана по свойству 2 для функции $f=u_{z_i}$ имеем

$$|\nabla(u_{z_i}\circ\varphi)(x)|=0.$$

Так как S – счетное множество, то для п. вс. $x\in Z$ приведенное равенство справедливо для всех $z_i\in S$ одновременно.

По следствию 2 выводим, что соотношение

$$|D\varphi(x)|=\lim_{l\to\infty}\max\{|\nabla(u_{z_i}\circ\varphi)(x)|:i=1,\dots,l\}=0$$

справедливо для ω–п. вс. $x\in Z$. Из сказанного выше имеем

$$D\varphi(x)=0\quad\text{для } \omega\text{-п. вс. } x\in Z.$$

Лемма 3 доказана: конечность искажения отображения φ установлена.

Следствие 3. *Пусть φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega;W)$, $W\Subset\mathscr{M}$, имеет конечное искажение и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^*:L^1_p(W)\cap\mathrm{Lip}(W)\to L^1_q(\Omega),\quad 1\le q\le p<\infty.$$

Тогда

$$|D\varphi(x)|\in L_q(\Omega).$$

Доказательство. Из оценки (15) выводим

$$\frac{1}{\nu(B(y_0,r))}\int\limits_{B(y_0,r)}\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(Z\cup\Sigma)}\biggl(\frac{|\nabla(f\circ\varphi)|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\biggr)\,d\nu(y)$$
$$\le\biggl(2\sup_{y,z\in B(y_0,2r)}\biggl\{\frac{|f(y)-f(z)|}{d(y,z)}\biggr\}\biggr)^q\biggl(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{\nu(B(y_0,2r))}\biggr)^{\frac{q}{\sigma}}\biggl(\frac{\nu(B(y_0,2r))}{\nu(B(y_0,r))}\biggr)^{\frac{q}{p}}.\tag{17}$$

Дифференцируя по теореме Лебега (переходя к пределу при $r\to0$), из (17) получаем

$$\biggl(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus(Z\cup\Sigma)}\frac{|\nabla(f\circ\varphi)|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\biggr)^{\frac{\sigma}{q}}$$
$$\le\biggl(2\varlimsup_{r\to0}\sup_{y,z\in B(y_0,2r)}\biggl\{\frac{|f(y)-f(z)|}{d(y,z)}\biggr\}\biggr)^{\sigma}\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\Phi'(y_0)\tag{18}$$

для ν-п. вс. $y_0\in\varphi(\Omega\setminus(Z\cup\Sigma))$, где

$$\mathscr{D}=\sup_{y_0\in W}\varlimsup_{r\to0}\frac{\nu(B(y_0,2r))}{\nu(B(y_0,r))}<\infty.\tag{19}$$

Ограниченность величины (19) можно получить из компактности замыкания $\overline{W}$.

Рассмотрим нормальную систему координат в точке y_0 и положим $f=y_j$ в (17) и (18). Из неравенства

$$|D\varphi(x)|^q\le n^{q-1}\sum_{j=1}^n|\nabla\varphi_j(x)|^q$$

и (18) получаем соотношения

$$\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus\Sigma}\frac{|D\varphi(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|}\Bigg)^{\frac{\sigma}{q}} \le \Bigg(n^{q-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus\Sigma}\frac{|\nabla\varphi_j(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|}\Bigg)^{\frac{\sigma}{q}}$$

$$\le n^{\sigma-1}\sum_{j=1}^{n}\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus\Sigma}\frac{|\nabla\varphi_j(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|}\Bigg)^{\frac{\sigma}{q}}$$

$$\le n^{\sigma-1}n\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\max_j\Bigg(2\varlimsup_{r\to0}\sup_{y,z\in B(y_0,2r)}\bigg\{\frac{|y_j(y)-y_j(z)|}{d(y,z)}\bigg\}\Bigg)^{\sigma}\Phi'(y)$$

$$\le (2n)^{\sigma}\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\Phi'(y), \qquad (20)$$

где оценка

$$\varlimsup_{r\to0}\sup_{y,z\in B(y_0,2r)}\bigg\{\frac{|y_j(y)-y_j(z)|}{d(y,z)}\bigg\}\le 1$$

может быть выведена из (15) с учетом нормальности в точке y_0 системы координат $\eta : V\to\mathbb{R}^n$ на $\mathscr{M}$. Применяя полученные соотношения и неравенство Гёльдера, выводим

$$\int_\Omega |D\varphi(x)|^q\,d\omega(x) = \int_{\Omega\setminus Z}\frac{|D\varphi(x)|^q|\det D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|}\,d\omega(x)$$

$$= \int_W\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma}\frac{|D\varphi(x)|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\Bigg)d\nu(y) \le (2n)^q\mathscr{D}\Phi(W)^{\frac{q}{\sigma}}\nu(W)^{\frac{\sigma-q}{\sigma}}.$$

Интегрируемость $|D\varphi(x)|\in L_q(\Omega)$ доказана. Следствие 3 доказано.

Замечание 3. Наиболее простой вид величина (19) имеет в евклидовых пространствах: в этом случае $\mathscr{D}=2^n$. На группах Карно $\mathscr{D}=2^\nu$, где ν — размерность по Хаусдорфу (или однородная размерность) группы.

Замечание 4. Для глобальной ограниченности величины (19) достаточно, чтобы кривизна Риччи была в определенном смысле ограниченной снизу: $\mathrm{Rc}\ge -K\mathfrak{g}$ для некоторого $K>0$. Тогда величина (19) ограничена сверху (см. детали в [43]). Последнее следует из оценки Бишопа – Громова о сравнении объемов (см., например, [44, теорема 1.1])

$$\nu(B(x,R))\le e^{\sqrt{(n-1)K}R}\left(\frac{R}{r}\right)^n\nu(B(x,r)) \quad \text{для любых } x\in\mathscr{M} \text{ и } 0<r<R.$$

3.4. Интегрируя крайние части неравенств (20) по $y\in V\subset W$, получаем левую часть неравенства (5):

$$\|H_{\varphi,q}\mid L_\sigma(V)\|^\sigma \le (2n)^\sigma\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\int_V\Phi'(y)\,d\nu(y)\le(2n)^\sigma\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\Phi(W)=(2n)^\sigma\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\|\varphi^*\|^\sigma$$

с постоянной $\alpha_{q,p}=\big(2n\mathscr{D}^{\frac{1}{q}}\big)^{-1}$.

3.5. Докажем достаточность в теореме 1 и правую часть неравенств (5).

Пусть отображение $\varphi:\Omega\to W$ принадлежит классу ACL, имеет конечное искажение и $H_{\varphi,q}\in L_\sigma(W)$, где $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ ($\sigma=\infty$ при $q=p$).

Покажем, что для любой функции $u \in L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ выполняется неравенство

$$\left\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\right\| \leq \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\| \cdot \left\|u \mid L^1_p(W)\right\|, \quad q < p.$$

Композиция $u \circ \varphi$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega)$, а по свойству 1 и формуле (2) для композиции $\varphi^* = u \circ \varphi$ выводим

$$\left\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\right\| \leq \left(\int\limits_{\Omega\setminus Z} (|\nabla u|(\varphi(x))|D\varphi|(x))^q \, d\omega(x)\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int\limits_W |\nabla u|^q(y)\left(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)} \frac{|D\varphi|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\right) d\nu(y)\right)^{1/q}.$$

Применяя неравенство Гёльдера при $q < p$ к правому интегралу предыдущего неравенства, приходим к оценке

$$\left\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\right\| \leq \left(\int\limits_W H^\sigma_{\varphi,q}(y)\, d\nu(y)\right)^{1/\sigma} \left(\int\limits_W |\nabla u|^p(y)\, d\nu(y)\right)^{1/p}. \tag{21}$$

Правая часть соотношений (5) доказана. При $q = p$ доказательство упрощается.

Таким образом, теорема 1 доказана. □

3.6. Замечания 1, 3 и 4 позволяют сформулировать естественное обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей и, кроме того, кривизна Риччи многообразия $\mathscr{M}$ ограничена снизу:* $\mathrm{Rc} \geq -K\mathfrak{g}$ *для некоторого $K > 0$.*

Измеримое отображение $\varphi : \Omega \to W$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$;

2) *φ имеет конечное искажение;*

3) $H_{\varphi,q} \in L_\sigma(W)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *здесь и далее $\sigma = \infty$ при $q = p$.*

При этом норма оператора $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|$: для некоторой константы $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо неравенство (5).

Доказательство. По поводу утверждения 1 см. предложение 4. Утверждение 2 фактически доказано на шаге 3 доказательства теоремы 1 в п. 3.3. В доказательстве левой части неравенства (5) надо показать глобальную ограниченность величины $\mathscr{D}$ из (19) (см. замечание 4). Из оценки, приведенной в замечании 4 непосредственно выводим неравенство

$$\nu(B(x; 2r)) \leq 2^n \exp(\sqrt{(n-1)K}2r)\nu(B(x; r)),$$

см. [44].

§ 4. $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения φ: $|\varphi^{-1}(E)| = 0$, если $|E| = 0$, $E \subset W$

Сформулируем в евклидовом пространстве неравенство типа Пуанкаре, доказанное в [45].

Лемма 4 [45]. *Пусть F — измеримое подмножество евклидова шара $B^E = B^E(0,r)$ положительной меры. Для всех $u \in W^1_q(B^E)$, $1 \le q < n$, $u|_F = 0$, выполняется неравенство*

$$\left(\int\limits_{B^E} |u(x)|^{q^*}\,dx\right)^{\frac{1}{q^*}} \le \frac{Cr^{\frac{n}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}}\left(\int\limits_{B^E} |\nabla^E u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{22}$$

где ∇^E — евклидов градиент, $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, а C — некоторая постоянная, не зависящая от функции u.

Предложение 7. *Пусть непостоянное отображение $\varphi : \Omega \to W$, где $\Omega \subset \mathbb{M}$ — связное открытое множество в $\mathbb{M}$, а $W \Subset \mathscr{M}$ — компактно вложенная область, принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p \le n.$$

Тогда $|\varphi^{-1}(E)| = 0$ при $|E| = 0$, $E \subset W$.

Доказательство. Поскольку область W имеет конечную ν-меру, можно считать, что $p = n$. Действительно, если отображение φ^* индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega)$, $1 \le q \le p < n$, то в силу неравенства Гёльдера для всех $p' \in (p;\infty)$ и $u \in L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ имеем

$$\big\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\big\| \le \|\varphi^*\| \cdot \big\|u \mid L^1_p(W)\big\| \le \nu(W)^{1-\frac{p}{p'}}\|\varphi^*\|\big\|u \mid L^1_{p'}(W)\big\|.$$

Последнее означает, что φ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}}(W) \to L^1_q(\Omega)$.

Случай $1 \le q < p = n$.

Шаг 1. Так как $\overline{W}$ — компактное множество в $\mathscr{M}$, существует конечное число $\eta_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ координатных окрестностей на $\mathscr{M}$, покрывающих множество W. Кроме того, можно считать, что $\eta_j(V_j) = B^E(0, 2\tau_j) \subset \mathbb{R}^n$.

На многообразии $\mathbb{M}$ существует счетный набор $\zeta_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ *ограниченных* координатных окрестностей, покрывающих Ω: $\Omega = \sum\limits_i U_i$. Можно считать, что $\zeta_i(U_i) = B^E(0, 2\rho_i) \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$.

Фиксируем в W произвольное множество E нулевой меры. Так как отображение φ имеет конечное искажение (см. лемму 3), то $\varphi^{-1}(E) \ne \Omega$ (в противном случае $\det D\varphi = 0$ в Ω и, следовательно, $D\varphi = 0$ п. вс. в Ω, откуда получаем, что φ — постоянное отображение). Поэтому найдется координатная окрестность $U_{i_0} = \zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0, \rho_{i_0})) \subset \Omega$ такая, что

$$\omega(U_{i_0} \setminus \varphi^{-1}(E)) = \omega\big(\zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0, \rho_{i_0})\big) \setminus \varphi^{-1}(E)) > 0.$$

Отсюда выводим, что для некоторого j_0 верно неравенство

$$\omega(U_{i_0} \setminus \varphi^{-1}(E \cap V_{j_0})) = \omega\big(\zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0, \rho_{i_0}))\big) \setminus \varphi^{-1}(E \cap V_{j_0})) > 0.$$

Первая задача этого шага — доказать, что $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E\cap V_{j_0}))=0$.

Поскольку отображение φ измеримо, по теореме Лузина найдется компакт $T\subset U_{i_0}\setminus\varphi^{-1}(E\cap V_{j_0})$ положительной меры такой, что $\varphi:T\to W$ непрерывно. Тогда образ $\varphi(T)\subset W$ компактен и $\varphi(T)\cap(E\cap V_{j_0})=\varnothing$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $A\supset E\cap V_{j_0}$, $\varphi(T)\cap A=\varnothing$, $A\subset V_{j_0}$. Пусть $\{B^E(y_k,\tau_k)\}$ — набор шаров, выбранный согласно предложению 6, такой, что наборы $\{B^E(y_k,\tau_k)\}$ и $\{B^E(y_k,2\tau_k)\}$ образуют покрытия множества $\eta_{j_0}(A)$ и кратность M покрытия $\{B^E(y_k,2\tau_k)\}$ конечна ($B^E(y_k,2\tau_k)\subset\eta_{j_0}(A)$ для всех $k\in\mathbb{N}$).

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ функцию $\theta_k(z)=\min(1,(2\tau_k)^{-1}\max(0,2\tau_k-d(z,y_k)))$.

Подставляя в (21) вместо V (u) открытое множество $\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))$ (функцию $\theta_k(z)$), получаем (см. лемму 2)

$$\begin{aligned}\bigl\|\varphi^*\theta_k\mid L^1_q(U_{i_0})\bigr\|&\le\bigl\|\varphi^*\theta_k\mid L^1_q(\Omega)\bigr\|\\&\le(2\tau_k)^{-1}\nu\bigl(\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))\bigr)^{\frac1n}\biggl(\int\limits_{\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))}H^\sigma_{\varphi,q}(z)\,d\nu(z)\biggr)^{1/\sigma}\\&\le C_1\biggl(\int\limits_{\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))}H^\sigma_{\varphi,q}(z)\,d\nu(z)\biggr)^{1/\sigma}\end{aligned}\tag{23}$$

в силу неравенства $\tau^{-1}\nu\bigl(\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,\tau))\bigr)^{\frac1n}\le C_1<\infty$, верного для всех шаров $B^E(y,\tau)\subset\eta_{j_0}(A)$ (постоянная C_1 зависит от $\mathfrak{g}$).

Для функции θ_k, ассоциированной с шаром $B(y_k,2\tau_k)$, имеем $\varphi^*\theta_k=1$ на множестве $\varphi^{-1}(B(y_k,\tau_k))$ и $\varphi^*\eta_k=0$ вне прообраза $\varphi^{-1}(B(y_k,2\tau_k))$, в частности, $\varphi^*\theta_k=0$ на множестве T. Полагая $Q=\zeta_{i_0}(U_{i_0})=B^E(0,2\rho_{i_0})\subset\mathbb{R}^n$, запишем неравенство Пуанкаре (22) для функции $\bigl(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\bigr)^*\theta_k$:

$$\biggl(\int\limits_Q\bigl|\bigl(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\bigr)^*\theta_k\bigr|^{q^*}dy\biggr)^{\frac1{q^*}}\le\frac{C\rho_{i_0}^{\frac nq}}{|\zeta_{i_0}(T)|^{\frac1q}}\biggl(\int\limits_Q\bigl|\nabla^E\bigl(\bigl(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\bigr)^*\theta_k\bigr)\bigr|^q dy\biggr)^{1/q},\tag{24}$$

где $q^*=qn/(n-q)$, $2\rho_{i_0}$ — радиус шара Q, а C — постоянная из (22).

Для применения неравенства (24) в оценках (23) отметим следующее. Риманов тензор $\overline{g}$ на $Q=\zeta_{i_0}(U_{i_0})=B^E(0,2\rho_{i_0})$ — это перенос тензора g с окрестности U_{i_0} посредством отображения ζ_{i_0} (см. определение в начале § 2). Если $\overline{d}$ — риманова метрика на Q, определенная тензором $\overline{g}$, то метрические пространства (U_{i_0},d) и $(Q,\overline{d})$ изометричны. Более того, для любого измеримого множества $E\subset U_{i_0}$ имеем равенство $\omega(E)=\overline{\omega}(\zeta_{i_0}(E))$. Из последнего выводим равенство

$$\int\limits_E u(\zeta_{i_0}(x))\,d\omega(x)=\int\limits_{\zeta_{i_0}(E)}u(y)\,d\overline{\omega}(y)$$

для любой интегрируемой на Q функции u: $u\in L_1(Q)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\biggl(\int\limits_{U_{i_0}}|\varphi^*\theta_k|^{q^*}(x)\,d\omega(x)\biggr)^{\frac1{q^*}}&=\biggl(\int\limits_Q\bigl|\bigl(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\bigr)^*\theta_k\bigr|^{q^*}(y)\,d\overline{\omega}(y)\biggr)^{\frac1{q^*}}\\&\le\biggl(T\int\limits_Q\bigl|\bigl(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\bigr)^*\theta_k\bigr|^{q^*}(y)\,dy\biggr)^{\frac1{q^*}}\end{aligned}\tag{25}$$

в силу соотношения $T^{-1}|A| \leq \overline{\omega}(A) \leq T|A|$ для любого измеримого множества $A \subset Q$ (здесь $|A|$ — мера Лебега множества A, а T — постоянная, зависящая лишь от Q).

Далее применяем (24), чтобы оценить сверху правую часть (25). Для окончательного вывода остается оценить правую часть (24) через $\left\|\varphi^*\theta_k \mid L^1_q(U_{i_0})\right\|$. С учетом $\nabla = \overline{g}^{-1}\nabla^E$ оцениваем интеграл I в правой части (24):

$$I \leq \left(\int\limits_Q \left|\nabla^E\left(\left(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\right)^*\theta_k\right)\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(T\cdot\sup_{y\in Q}|\overline{g}(y)|\int\limits_Q \left|\nabla\left(\left(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\right)^*\theta_k\right)\right|^q d\overline{\omega}(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(T\cdot\sup_{y\in Q}|\overline{g}(y)|\int\limits_{U_{i_0}} |\nabla(\varphi^*\theta_k)|^q\, d\omega(y)\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (26)$$

С учетом равенства $\sigma = q^*$ из оценок (23), (25) и (26) получаем

$$\omega(\varphi^{-1}(B(y_k,\tau_k))\cap U_{i_0}) \leq \int\limits_{U_{i_0}} |\varphi^*\theta_k|^{q^*}(x)\, d\omega(x) \leq C_2 \int\limits_{B(y_k,2\tau_k)} H^\sigma_{\varphi,q}(z)\, dz,$$

где C_2 — постоянная, не зависящая от функции θ_k.

Применяя последнее соотношение и следствие 1, выводим неравенства

$$\omega(\varphi^{-1}(E)\cap Q) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\omega(\varphi^{-1}(B(y_k,\tau_k))\cap Q)$$

$$\leq C_3\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B(y_k,2\tau_k)} H^\sigma_{\varphi,q}(z)\, dz \leq C_3\beta_n\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(A)\|^\sigma. \quad (27)$$

В силу свойств интеграла Лебега функция множества $U \mapsto \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(U)\|^\sigma$ абсолютно непрерывна. Следовательно, правая часть (27) может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе открытого множества $A \supset E\cap V_{j_0}$.

Таким образом, доказано, что $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E\cap V_{j_0})) = 0$.

Если $\omega\left(\zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0,\rho_{i_0}))\setminus\varphi^{-1}(E\cap V_{j_1})\right) > 0$ для какого-нибудь другого индекса j_1, то с учетом наблюдения, что выбор j_1 не имеет никакого преимущества перед выбором j_0, приходим к выводу, что $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E\cap V_{j_1})) = 0$. Аналогичный вывод справедлив для любого j. Следовательно, $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E)) = 0$. Окончательно выводим, что отображение $\varphi : U_{i_0} \to W$ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Шаг 2. Покажем, что отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина на любой другой координатной окрестности U_{i_1} из выбранных на первом шаге: $\zeta_{i_1}(U_{i_1}) = B^E(0,2\rho_{i_1}) \subset \mathbb{R}^n$, $i_1 \neq i_0$. Положим $x_{i_0} = \zeta_{i_0}^{-1}(0)$ и $x_{i_1} = \zeta_{i_1}^{-1}(0)$.

Пусть $\gamma : [0,L] \to \Omega$ — спрямляемая в римановой метрике кривая с концевыми точками $\gamma(0) = x_{i_0}$, $\gamma(L) = x_{i_1}$ и параметризованная длиной дуги (построение кривой с указанными свойствами можно найти в [22, лемма 3]). Пусть

$$\Delta = \operatorname{dist}(\gamma,\partial\Omega) = \inf_{t\in[0,L]}\operatorname{dist}(\gamma(t),\partial\Omega).$$

В каждой точке $\gamma(s)$ кривой γ рассмотрим координатную окрестность $\zeta_s : U_s \to \mathbb{R}^n$, $U_s \subset \Omega$. Можно считать, что $\zeta_s(U_s) = B^E(0,2\rho_s) \subset \mathbb{R}^n$, $s \in (0,L)$. Совокупность окрестностей U_s, $s \in (0,L)$, вместе с U_{i_0} и U_{i_1} образует открытое покрытие компактного множества $\gamma([0,L])$, из которого можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{s_j}\}$, $0 < s_0 < s_1 < \ldots < s_j < \ldots < s_m < L$, включая в него U_{i_0} и U_{i_1}.

Очевидно, окрестность U_{i_0} имеет непустое пересечение W_1 с некоторой окрестностью из числа выбранных: пусть это будет окрестность $U_{s_{j_1}}$, содержащая точку $\gamma(t_1)$, где $t_1 = \inf\{s \in (0,l) : \gamma(s) \notin U_{i_0}\}$: $W_1 = U_{i_0} \cap U_{s_{j_1}}$. Следовательно, окрестность $U_{s_{j_1}}$ можно взять в качестве окрестности U_{i_0} на первом шаге рассуждения. В результате придем к выводу, что

$$\omega(\varphi^{-1}(E) \cap U_{s_{j_1}}) = 0.$$

Продолжая этот процесс по индукции, получим $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi : U_{i_1} \to W$.

Шаг 3. Поскольку выбор координатной окрестности U_{i_1} произволен, доказано $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина отображения $\varphi : \Omega \to W$.

Случай $1 < q = p = n$. Фиксируем компактно вложенное связное открытое множество $E \subset \Omega$. Поскольку отображение φ^* индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_n(W) \cap \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_n(\Omega)$, в силу неравенства Гёльдера для всех $q' \in [1; n)$ и $u \in L^1_n(W) \cap \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ имеем

$$\begin{aligned}\bigl\|\varphi^* u \mid L^1_{q'}(E)\bigr\| &\le \omega(E)^{1-\frac{q'}{n}} \bigl\|\varphi^* u \mid L^1_n(E)\bigr\| \\ &\le \omega(E)^{1-\frac{q'}{n}} \bigl\|\varphi^* u \mid L^1_n(\Omega) \le \omega(E)^{1-\frac{q'}{n}} \bigl\|\varphi^*\bigr\| \bigl\|u \mid L^1_n(W)\bigr\|.\end{aligned}$$

Последнее означает, что φ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_n(W) \cap \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_{q'}(E)$, где $\varphi^*(f) = f \circ \varphi|_E$. Полагаем $q' = 1$. Далее доказательство с очевидными изменениями следует рассуждениям случая $1 \le q < p = n$. В результате получаем $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi : E \to W$. Поскольку существует счетное семейство компактно вложенных открытых множества $E_j \Subset \mathbb{M}$, покрывающих $\mathbb{M}$, теорема доказана и в этом случае.

§ 5. Вариант теоремы 1 для гомеоморфизмов

Определение 5. Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей $n \ge 2$, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, $W \Subset \mathscr{M}$ — компактно вложенная область. Пусть $1 \le q \le p < \infty$. Определим класс $\mathscr{Q}_{q,p}(\Omega, W)$ гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to W$ открытых областей Ω и W таких, что

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

2) отображение φ имеет конечное искажение: $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega \mid \det D\varphi(x) = 0\}$;

3) операторная функция искажения

$$D \ni x \mapsto K_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \ne 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $1 \le q < p < \infty$, и $\sigma = \infty$, если $q = p$.

Теорема 3. *Пусть задан гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to W$ областей $\Omega \subset \mathbb{M}$ и $W \Subset \mathscr{M}$. Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to W$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty,$$

тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathscr{Q}_{q,p}(\Omega, W)$.

Кроме того, верны соотношения

$$\alpha_{q,p} \|K_{q,p}(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(V))\| \leq \|\varphi_V^*\| \leq \|K_{q,p}(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(V))\|$$

для любого открытого множества $V \subset W$.

Если дополнительно кривизна Риччи многообразия $\mathscr{M}$ *ограничена снизу:* $\mathrm{Rc} \geq -K\mathfrak{g}$ *для некоторого* $K > 0$, *то утверждение теоремы верно для любого открытого множества* $W \subset \mathscr{M}$.

Доказательство. Сформулированное утверждение — это почти очевидное следствие теорем 1 и 2. Для полной ясности достаточно проверить, что

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V)} K_{q,p}^{\sigma}(x, \varphi)\, d\omega(x) = \int\limits_{\varphi^{-1}(V)\setminus Z} \left(\frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} d\omega(y) = \int\limits_{V} H_{\varphi,q}^{\sigma}(y)\, d\nu(y).$$

§ 6. Распространение оператора композиции теорем 1–3 на все пространство Соболева

Здесь докажем, как из перечисленных в теореме 1 свойств отображения φ можно получить продолжение по непрерывности оператора $\varphi^* : L_p^1(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L_q^1(\mathbb{M})$, $1 \leq q \leq p < \infty$, совпадающее в определенном смысле с оператором композиции.

Предложение 8. *Пусть* $\mathbb{M}$ *и* $\mathscr{M}$ — *римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть измеримое отображение* $\varphi : \Omega \to W$, *определенное в области* $\Omega \subset \mathbb{M}$, *со значениями в открытом множестве* $W \Subset \mathscr{M}$ *индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L_p^1(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L_q^1(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p < \infty, \tag{28}$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ *и не является постоянным в области* Ω. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_p^1(W)$ *распространение оператора* φ^* *в топологии* $L_p^1(\Omega)$ *совпадает с композицией*

$$\Omega \ni x \to \varphi^*(f)(x) = f \circ \varphi(x) = \begin{cases} \text{п. вс. в } \Omega, \text{ если } f \in L_p^1(W),\ p \in [1, n], \\ \text{всюду в } D, \text{ если } f \in L_p^1(W) \cap C(W),\ p > n. \end{cases}$$

Замечание 5. При $p > n$ функция $f \in L_p^1(W)$ может быть переопределена на множестве меры нуль таким образом, что она станет непрерывной. Поэтому обозначение $f \in L_p^1(W) \cap C(W)$ никаких существенных ограничений на функцию не накладывает, а говорит лишь о том, что в композиции $f \circ \varphi$ при $p > n$ следует рассматривать непрерывный представитель функции $f \in L_p^1(W)$.

Доказательство. Во всех случаях $1 \leq q \leq p < \infty$ имеем (28). Остается доказать, что распространение оператора по непрерывности совпадает с оператором суперпозиции. Если $f \in L_p^1(W)$ — произвольная функция, то рассмотрим последовательность функций $f_k \in L_p^1(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$, сходящуюся к f не только в $L_p^1(W)$, но и п. вс. при $p \leq n$ и поточечно при $p > n$ в области W. Тогда последовательность композиций $f_k \circ \varphi$ сходится в $L_q^1(\Omega)$ (так как фундаментальная последовательность переходит в фундаментальную). Кроме того, $f_k \circ \varphi$ сходится поточечно к $f \circ \varphi$ в Ω при $p > n$ и почти всюду при $p \leq n$, так как в этом случае отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина (см. выше предложение 7).

Дальнейшие рассуждения основаны на аргументах работы [2, доказательство теоремы 5]. Остается сделать вывод о том, что $f\circ\varphi$ — локально суммируемая в области Ω функция. Тогда $f_k\circ\varphi$ будет сходиться к $f\circ\varphi\in L^1_p(\Omega)$.

Существует шар $B\Subset\Omega$ такой, что $|B\backslash Z|>0$, где Z — множество нулей якобиана. Если это не так, то в силу конечности искажения имеем $D\varphi(x)=0$ для п. вс. $x\in B$, откуда вытекает, что $\varphi=\mathrm{const}$ на любом шаре B. Последнее невозможно, так как Ω — связное множество, φ — непостоянное отображение.

Суммируемость композиции $f\circ\varphi$ очевидна на B, если функция f ограничена в области Ω. Произвольный случай сводится к ограниченной снизу функции f такой, что $f\circ\varphi(x)=0$ на некотором множестве $F\subset B\backslash Z$ положительной меры. Действительно, множество $\{z\in\varphi(B\backslash Z)\mid f(z)-k_0\leq 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0\in\mathbb{N}$; тогда вместо f можно рассмотреть функцию $\max(f(z)-k_0,0)\in L^1_p(W)$.

Фиксируем функцию $f\in L^1_p(W)$, для которой множество $F=\{x\in B\backslash Z\mid f\circ\varphi(x)=0\}$ имеет положительную меру. Тогда последовательность функций $u_m=g_m\circ\varphi\in L^1_q(B)$, где $g_m=\min(f,m)$, монотонно возрастая, сходится на B к функции $u=f\circ\varphi$ при $m\to\infty$. Подставим функцию u_m в следующее неравенство Пуанкаре: пусть F — измеримое подмножество шара $B=B(0,r)$ положительной меры (можно считать, что $B=B(0,r)$ — евклидов шар, лежащий в некоторой координатной окрестности в Ω); для всех $v\in L^1_q(B), 1\leq q<\infty, v|_F=0$, выполняется неравенство

$$\biggl(\int\limits_B|v|^q\,dx\biggr)^{1/q}\leq\frac{Cr}{(r^{-n}|F|)^{1/q}}\biggl(\int\limits_B|\nabla v|^q\,dx\biggr)^{1/q}$$

(здесь C — некоторая постоянная, не зависящая от функции v). В результате получим

$$\int\limits_B|u_m|^q\,dx\leq\frac{C^qr^q}{r^{-n}|F|}\int\limits_B|\nabla u_m|^q\,dx\leq\frac{C^qr^q}{r^{-n}|F|}\int\limits_B|\nabla u|^q\,dx.$$

Так как последовательность функций $u_k=g_k\circ\varphi$, монотонно возрастая, сходится на B к функции $u=f\circ\varphi$ п. вс., по теореме Беппо Леви функция $u=f\circ\varphi$ принадлежит $L_q(B)$. Поскольку шар $B\subset\Omega$ произволен, композиция $f\circ\varphi$ локально суммируема в области D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 380–382.
2. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
3. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Nakai M.* Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces // Nagoya Math. J. 1960. V. 16. P. 157–184.
6. *Lewis L. G.* Quasiconformal mappings and Royden algebras in space // Trans. Am. Math. Soc. 1971. V. 158, N 2. P. 481–492.

7. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.

8. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений // Некоторые вопросы современной теории функций: Материалы конф. Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1976. С. 18–20.

9. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.

10. *Гольдштейн В. М., Романов А. С.* Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 3. С. 55–61.

11. *Романов А. С.* О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН, 1985. С. 117–133.

12. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.

13. *Vodopyanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Complex analysis and dynamical systems II: A conference in honor of Professor Lawrence Zalcman's sixtieth birthday, June 9–12, 2003, Nahariya, Israel. Ann Arbor: Am. Math. Soc., 2005. P. 327–342. (Contemp. Math.; V. 382).

14. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.

15. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 131–135.

16. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 989–1029.

17. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

18. *Bourdaud G., Sickel W.* Changes of variable in Besov spaces // Math. Nachr. 1999. V. 198. P. 19–39.

19. *Koch H., Koskela P., Saksman E., Soto T.* Bounded compositions on scaling invariant Besov spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266, N 5. P. 2765–2788.

20. *Koskela P., Yang D., Zhou Y.* Pointwise characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces and quasiconformal mappings // Adv. Math. 2011. V. 226, N 4. P. 3579–3621.

21. *Водопьянов С. К.* О допустимых заменах переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 6. С. 609–613.

22. *Водопьянов С. К.* Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 63–112.

23. *Водопьянов С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на римановых многообразиях и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 996–1034.

24. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.

25. *Водопьянов С. К., Томилов А. О.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85, № 5. С. 58–109.

26. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.

27. *Водопьянов С. К.* Функционально-геометрические свойства пределов ACL-отображений с интегрируемым искажением // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 605–621.

28. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.

29. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.

30. *Troyanov M., Vodop'yanov S.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co-)distortion // Ann. l'Inst. Fourier. 2002. V. 52, N 6. P. 1753–1784.

31. *Vodop′yanov S. K.* $\mathscr{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.

32. *Vodopyanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemporary Mathematics. Ann Arbor: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–302.
33. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
34. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993 (Results in Mathematics and Related Area; V. 26).
35. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin: Springer-Verl., 1960.
36. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
37. *Hajłasz P.* Change of variables formula under the minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
38. *Водопьянов С. К.* Операторы подстановки пространств Соболева // Современные проблемы теории функций и их приложений / Тез. докл. конференции, г. Саратов, 2002 г. Саратов: Саратовск. гос. ун-т, 2002. С. 42–43.
39. *Vodop'yanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. Ch. I (Ch. II) // Sib. Adv. Math. 2004 (2005). V. 14 (15), N 4 (1). P. 78–125 (91–125).
40. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
41. *Брудный Ю. А., Котляр Б. Д.* Одна задача комбинаторной геометрии // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 5. С. 1171–1173.
42. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1987.
43. *Cheeger J., Gromov M., Taylor M.* Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 1982. V. 17. P. 15–53.
44. *Эбей Э.* Нелинейный анализ на многообразиях. Пространства и неравенства Соболева. Новосибирск: Изд-во «Тамара Рожковская», 2008.
45. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

Поступила в редакцию 4 августа 2024 г.
После доработки 4 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Водопьянов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru