Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.546.8+512.548.7+515.122.23+515.122.55+517.986.9

ПРОСТРАНСТВА РЕГУЛЯРНЫЕ И ПОЛНЫЕ НАД ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ КВАЗИГРУППАМИ

С. В. Людковский

Аннотация. Статья посвящена структуре топологических пространств. Исследуются вполне регулярные и полные пространства над топологическими квазигруппами и квазикольцами. Для них также изучаются вложения и свойства отделимости. Изучаются их гомеоморфизмы и изоморфизмы, соотношения между компактификациями и полнотой пространств над топологическими квазигруппами. Исследуются приложения к топологическим пространствам семейств отображений над топологическими квазигруппами и квазикольцами, ограничения отображений, их открытость и уплотнения. Также доказываются необходимые теоремы о структуре топологических квазигрупп.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.514

Ключевые слова: регулярность, полнота, топологическое пространство, топологическая квазигруппа, квазикольцо, непрерывное отображение.

1. Введение

Изучение вложений топологических пространств, вполне регулярных и полных по Хьюитту пространств, играют большую роль в топологии и ее приложениях [1, 2]. В них важное значение имеют свойства семейств функций из топологического пространства в поле вещественных чисел [3–5]. При этом вполне регулярные пространства используются для исследований топологических векторных пространств вещественнозначных функций. Они применяются в функциональном анализе, абстрактном гармоническом анализе, теории случайных процессов, математической физике [6]. С другой стороны, в последнее время развиваются приложения неассоциативных алгебр, близких к квазигруппам, в некоммутативном математическом анализе, некоммутативной геометрии, теории операторов, дифференциальных уравнениях с частными производными [7–9], физике элементарных частиц и квантовой теории поля [10]. Согласно исследованиям в 20-м веке существование нетривиальной некоммутативной геометрии равносильно существованию соответствующей квазигруппы или лупы (см. [11–17] и ссылки в них). В последнее время неассоциативные алгебры, близкие к квазигруппам, использовались для исследования подчиненных бозонных разложений в сверхпроводниках [18] и в неассоциативной квантовой механике [19]. Они также активно использовались в калибровочных теориях и суперструнах Грина — Шварца в [20, 21]. Такие неассоциативные алгебры связаны с квазихопфовыми деформациями в неассоциативной квантовой механике [22]. Алгебры, близкие к квазигруппам, и квазигруппы были одним из главных инструментов при исследовании представления Де Ситтера искривленного пространства-времени [23], в теории большого объединения и для изучения полей Янга — Миллса [24]. Семейство таких неассоциативных алгебр использовалось для анализа дифференциальных уравнений в частных производных типа Янга — Бакстера с приложением к теории большого объединения (см. [25–27] и ссылки там). Другое приложение квазигруппы нашли в информатике и теории кодирования, так как они открывают новые возможности по сравнению с группами [28–33].

Также большой интерес вызывают функциональный анализ, абстрактный гармонический анализ, теория случайных процессов, математическая физика над полями с неархимедовыми мультипликативными нормами [34–42]. Следует подчеркнуть, что указанные в начале введения темы интенсивно изучались над полями вещественных чисел $\mathbf{R}$ и комплексных чисел $\mathbf{C}$, но гораздо меньше известно в случае рассмотрения семейств функций со значениями в топологических квазигруппах. Согласно представленному выше обсуждению их изучение стимулируется, например, функциональным анализом, абстрактным гармоническим анализом, теорией случайных процессов, математической физикой над алгебрами, близкими к квазигруппам, топологическими полями, исследованием структуры микрорасслоений [43]. Перечисленные области основаны на тополого-алгебраических бинарных системах.

Таким образом открывается новое перспективное направление исследований топологических квазигрупп и их действий на топологических пространствах, о которых известно очень мало по сравнению с топологическими группами и действиями топологических групп на топологических пространствах.

Данная статья посвящена вполне регулярным и полным топологическим пространствам над топологическими квазигруппами. Для них также изучаются вложения и свойства отделимости. Изучаются их гомеоморфизмы и изоморфизмы, соотношения между компактификациями и полнотой пространств над топологическими квазигруппами. Исследуются приложения к топологическим пространствам семейств отображений над топологическими квазигруппами, ограничения отображений, их открытость и уплотнения. В частности, изучаются квазикольца семейств функций на таких пространствах. Для исследований используются методы топологии и алгебры, в частности, полиэдральные разложения. Также используются необходимые предварительные теоремы о топологических квазигруппах, доказанные в разд. 1.1.

1.1. Предварительные сведения.

Теорема 1.1. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая квазигруппа, где Q — топологическое пространство, $\mathscr{A} : Q^2 \to Q$ — непрерывная бинарная операция на G. Тогда $Q(\mathscr{A})$ главно изотопна топологической лупе $G_1 = Q(\mathscr{B})$.*

Доказательство. Пусть a и b принадлежат Q. Положим

$$\mathscr{B}(x,y) = \mathscr{A}\left(R_a^{-1}x, L_b^{-1}y\right)$$

для любых x и y из Q, где $R_a x = \mathscr{A}(x,a)$, $L_b x = \mathscr{A}(b,x)$, $R_a^{-1}d = d/a$ — единственное решение уравнения $\mathscr{A}(y,a) = d$, $L_b^{-1}d = b \setminus d$ — единственное решение уравнения $\mathscr{A}(b,y) = d$, где a и b заданы, а y — неизвестная. Поскольку G — топологическая квазигруппа, отображения $Q^2 \ni (a,d) \mapsto d/a \in Q$ и $Q^2 \ni (b,d) \mapsto b \setminus d \in Q$ непрерывны. В силу теоремы 1.3.2 в [15] $G_1 = Q(\mathscr{B})$ — лупа с единицей $e = \mathscr{A}(b,a)$, $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{(R_a^{-1}, L_b^{-1}, id_Q)}$, $Q(\mathscr{B})$ есть LR-изотоп квазигруппы $Q(\mathscr{A})$, где $id_Q(q) = q$ для всякого $q \in Q$. При этом отображения $\mathscr{A}$, R_d, R_d^{-1},

L_d, L_d^{-1} непрерывны для любого $d \in G$, следовательно, $\mathscr{B} : Q^2 \to Q$ непрерывно и $Q(\mathscr{B})$ — топологическая лупа.

Теорема 1.2. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая лупа, C_e — компонента единицы e в G, тогда C_e — замкнутая нормальная подлупа в G, $\mathsf{C}_e b = b\mathsf{C}_e$ — компонента $b \in G$.*

Доказательство. Поскольку $e \in \mathsf{C}_e$ и C_e — наибольшее связное подмножество в Q, содержащее e, то $b\mathsf{C}_e$ и $\mathsf{C}_e b$ связны и содержат $b \in G$, так как $L_b : G \to G$ и $R_b : G \to G$ — гомеоморфизмы. Поэтому $\mathsf{C}_e b = b\mathsf{C}_e$ — компонента C_b для $b \in G$, так как $L_b^{-1} : G \to G$ и $R_b^{-1} : G \to G$ — гомеоморфизмы. Тогда $\mathsf{C}_{ab} = (ab)\mathsf{C}_e$, $(ab)\mathsf{C}_e = a(b\mathsf{C}_e)$, $a(b\mathsf{C}_e) = a(\mathsf{C}_e b)$, $a(\mathsf{C}_e b) = (a\mathsf{C}_e)b$, $(a\mathsf{C}_e)b = (\mathsf{C}_e a)b$, $(\mathsf{C}_e a)b = \mathsf{C}_e(ab)$, $\mathsf{C}_e(ab) = \mathsf{C}_{ab}$. При этом

$$\forall a \in G, \forall b \in G, (\mathsf{C}_a \cap \mathsf{C}_b \neq \varnothing) \ \leftrightarrow \ (\mathsf{C}_a = \mathsf{C}_b),$$

а компонента C_b замкнута в G для любого $b \in G$. Поэтому $\mathsf{C}_e\mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e \setminus \mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e/\mathsf{C}_e$ связны и содержат e, так как $\mathsf{C}_b/b = \mathsf{C}_e$ и $b \setminus \mathsf{C}_b = \mathsf{C}_e$ для любого $b \in G$, $\mathsf{C}_b = \mathsf{C}_e$ для любого $b \in \mathsf{C}_e$, где $ab := A(a, b)$ — сокращенное обозначение умножения для произвольных $a \in G$ и $b \in G$. Итак, $\mathsf{C}_e\mathsf{C}_e = \mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e \setminus \mathsf{C}_e = \mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e/\mathsf{C}_e = \mathsf{C}_e$.

Теорема 1.3. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая лупа, C_e — компонента ее единицы $e = e_G$. Тогда существует $P = G/_c\mathsf{C}_e$ — вполне несвязная факторная $T_1 \cap T_3$-лупа.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 C_e — нормальная замкнутая подлупа в G. Из следствия 2.2 в [44] вытекает, что пространство $P = G/_c\mathsf{C}_e$ левых классов смежности $\{b\mathsf{C}_e : b \in G\}$ является топологической лупой и факторное отображение $\pi : G \to P$ — непрерывный открытый гомоморфизм. При этом P является $T_1 \cap T_3$-лупой согласно теореме 2.3 в [44], так как C_e замкнута в G. Рассмотрим подмножество $X \subset G$ такое, что $\mathsf{C}_e \subset \bigcup\{b\mathsf{C}_e : b \in X\} =: Y$ и $Y \neq \mathsf{C}_e$. Если $J \subset G$, то $\pi(J \cap (X\mathsf{C}_e)) = \pi(J) \cap (X\mathsf{C}_e)$. Поскольку $Y \neq \mathsf{C}_e$, то Y несвязно, следовательно, существуют непустые открытые подмножества U_1 и U_2 в G такие, что $Y = (U_1 \cap Y) \cup (U_2 \cap Y)$ и $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \varnothing$. Поэтому

$$X\mathsf{C}_e = (\pi(U_1) \cap (X\mathsf{C}_e)) \cup (\pi(U_2) \cap (X\mathsf{C}_e)),$$

где $\pi(U_1)$ и $\pi(U_2)$ открыты в Q, так как π — непрерывный открытый гомоморфизм. Для любого $b \in G$ левый класс смежности $b\mathsf{C}_e = \mathsf{C}_b$ связен, следовательно, либо $b\mathsf{C}_e \subset U_1 \cap Y$, либо $b\mathsf{C}_e \subset U_2 \cap Y$. Тогда

$$(\pi(U_1) \cap (X\mathsf{C}_e)) \cap (\pi(U_2) \cap (X\mathsf{C}_e)) = \varnothing,$$

стало быть, $\pi(X) = X\mathsf{C}_e$ несвязно. Таким образом, компонента единицы e_P в P совпадает с e_P.

Теорема 1.4. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая T_1-квазигруппа. Тогда она имеет равномерность $\mathscr{U}_Q$, совместимую с ее топологией.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть топологическую T_1-лупу $G_1 = Q(\mathscr{B})$, главно изотопную квазигруппе. Пусть $\mathscr{T}_Q$ — топология на Q. Тогда отображения $L_g : Q \to Q$ и $L_g^{-1} : Q \to Q$ — гомеоморфизмы для всякого $g \in G_1$.

Рассмотрим минимальную группу H, порожденную гомеоморфизмами

$$L_{g_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ L_{g_k}^{\epsilon_k} : (Q, \mathscr{T}_Q) \to (Q, \mathscr{T}_Q)$$

для всевозможных $k \in \mathbf{N}$, $g_j \in G_1$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, где

$$L_{g_1}^{\epsilon_1} \circ L_{g_2}^{\epsilon_2}(g) = L_{g_1}^{\epsilon_1}\big(L_{g_2}^{\epsilon_2}(g)\big),$$

$L_{g_2}(g) = B(g_2, g)$, $L_{g_2}^{-1}(g)$ — единственное решение уравнения $B(g_2, y) = g$ с неизвестной y и данными g, g_2 в G_1. Снабдим H базой топологии

$$\mathscr{B}_H = \{W(g_1, \dots, g_k; L_{g_{k+1}}(V)) : k \in \mathbf{N};\ g_j \in G_1;\ j \in \{1, \dots, k+1\};\ V \in \mathscr{B}_{e,G_1}\},$$

где

$$W(g_1, \dots, g_k; L_{g_{k+1}}(V)) := \big\{g \in G_1 : L_{g_j}^{\epsilon_j}(g) \in L_{g_{k+1}}(V);\ \epsilon_j \in \{-1, 1\};\ j \in \{1, \dots, k\}\big\},$$

$\mathscr{B}_{e,G_1}$ — база открытых окрестностей единичного элемента e в G_1. Поскольку G_1 — топологическая лупа, то для любой открытой окрестности V единичного элемента e в G_1, $n \in \mathbf{N}$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, существует открытая окрестность W для e такая, что $L_{W_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ L_{W_k}^{\epsilon_k} \subset V$, где $L_W^\epsilon = \{L_g^\epsilon : g \in W\}$. Поэтому $(H, \mathscr{T}_H)$ — топологическая группа, где $\mathscr{T}_H$ — топология на H с базой $\mathscr{B}_H$.

Отображение $\phi : (Q, \mathscr{T}_Q) \to (H, \mathscr{T}_H)$ такое, что $\phi(q) = L_q$ для любого $q \in Q$, непрерывно по построению выше, разделяет точки и замкнутые множества в Q, так как G_1 — лупа, и $B(q, P)$ замкнуто в $(Q, \mathscr{T}_Q)$ для любого замкнутого P в $(Q, \mathscr{T}_Q)$. Из теоремы 2.3.20 и леммы 2.3.19 в [2] вытекает, что $\phi : (Q, \mathscr{T}_Q) \to (\phi(Q), \mathscr{T}_H|_Q) \subseteq (H, \mathscr{T}_H)$ — гомеоморфизм. С другой стороны, на топологической группе $(H, \mathscr{T}_H)$ существует левая равномерность $\mathscr{U}_H$, совместимая с топологией $\mathscr{T}_H$ на ней (см. пример 8.1.17 в [2]). Тогда $\mathscr{U}_H$ индуцирует равномерность $\mathscr{U}_Q$ на Q, совместимую с топологией $\mathscr{T}_Q$ на Q.

Замечание 1.1. В отличие от топологических групп равномерность на квазигруппе в общем случае может оказаться ни лево- ни право-инвариантной, так как отображение ϕ в общем случае не является гомоморфизмом, поскольку G может быть неассоциативной, будучи квазигруппой.

2. Регулярность и полнота над топологическими квазигруппами

Определение 2.1. Пусть X — топологическое пространство, $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая нетривиальная бесконечная квазигруппа. При этом пусть G является топологическим T_1-пространством с топологией $\mathscr{T}_G$ и G полно относительно своей равномерности $\mathscr{U}_G$. Если X есть T_1-пространство и для любого замкнутого подмножества B и точки x в X таких, что $x \notin B$, существуют $q \neq r$ в Q и непрерывное отображение $f : X \to Q$ такое, что $f(x) = r$ и $f(B) = \{q\}$, то X называется *слабо вполне G-регулярным пространством.* Если это выполняется для фиксированных $q \neq r$ в Q и любых x и B, удовлетворяющих данным выше условиям, то X называется *вполне (G, q, r)-регулярным пространством.* Если X вполне (G, q, r)-регулярно для любых $q \neq r$ в Q, то X называется *вполне G-регулярным пространством.*

Замечание 2.1. Определение 2.1 означает, что если топологическое пространство X вполне (G, q, r)-регулярно, то оно слабо вполне G-регулярно; если X вполне G-регулярно, то X вполне (G, q, r)-регулярно. В частном случае, если X — тихоновское нульмерное пространство, то X вполне G-регулярно. В самом деле, для x существует открыто-замкнутая окрестность $V \ni x$ с $V \subset X \setminus B$. В качестве f можно взять характеристическую функцию $\chi_{X \setminus V}$, где $\chi_A(y) = q$ для любого $y \in A$, $\chi_A(y) = e$ для любого $y \notin A$ для $A \subset X$, так как $q \neq e$, а $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая T_1-квазигруппа. Функция $\chi_{X \setminus V}$ непрерывна, поскольку V открыто-замкнуто в X.

В силу теоремы 2.1, приведенной ниже, сама топологическая квазигруппа G слабо вполне G-регулярна.

Теорема 2.1. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая T_1-квазигруппа, полная относительно своей равномерности. Тогда G слабо вполне G-регулярна.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай топологической лупы $G_1 = Q(\mathscr{B})$ с $r = e$. По теореме 1.2 компонента C_e единицы является замкнутой нормальной подлупой в G. Более того, $\mathsf{C}_e g = g\mathsf{C}_e$ — связная компонента для произвольного $g \in G_1$. При этом факторлупа $P = G_1/_c\mathsf{C}_e$ хаусдорфова и вполне несвязна согласно теореме 1.3.

Если C_e нетривиальна, то применим к топологическому пространству $g\mathsf{C}_e$ разложение в виде предела обратного спектра полиэдров над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ по теореме Фрейденталя для любого $g \in G_1$ (см. ссылку в [2] или [45]). Если факторлупа $P = G_1/_c\mathsf{C}_e$ нетривиальна, то разложим топологическое пространство $Q/_c\mathsf{C}_e$ в виде предела обратного спектра полиэдров над полем $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{Q}_p$ — конечным алгебраическим расширением поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$ (см. теорему 3.19 в [45]). Полиэдры над $\mathbf{R}$ являются $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$-пространствами, а полиэдры над $\mathbf{L}$ вполне несвязны.

Для замкнутого подмножества B и точки x в Q таких, что $x \notin B$, выберем точку q в B. Для любого $b \in Q$ отображение левого сдвига L_b является гомеоморфизмом Q на Q как топологического пространства, где $L_b y = by$ для любых b и y из Q. Поэтому без ограничения общности можно взять $x = e$. Используя полиэдральные разложения, получим, что существует непрерывное отображение $f : Q \to Q$ такое, что $f(x) = e$, $f(B) = \{q\}$.

Следствие 2.1. *Если G — топологическая T_1-квазигруппа, полная относительно своей равномерности либо связная, либо вполне несвязная, то она вполне G-регулярна.*

Замечание 2.2. Наряду с квазигруппами рассмотрим $\mathbf{F} = Q(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ — топологическое квазикольцо, т. е. имеются две непрерывные бинарные операции $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ из Q^2 в Q, удовлетворяющие условию дистрибутивности, где $Q(\mathscr{A}_1)$ — лупа, $Q(\mathscr{A}_2)$ — группоид. При этом пусть $\mathbf{F}$ бесконечно, является топологическим T_1-пространством и $\mathbf{F}$ полно относительно своей равномерности, совместимой с топологией. Вместо $Q(\mathscr{A}_1)$ также пишут $Q(+)$ с 0 вместо e.

Следствие 2.2. *Если $\mathbf{F}$ — топологическое T_1-квазикольцо с правым делением в $Q(\mathscr{A}_2) - \{0\}$, то оно вполне $\mathbf{F}$-регулярно.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 $\mathbf{F}$ слабо вполне G-регулярно, где $G = Q(+)$. Поскольку $\mathbf{F}$ — квазикольцо с правым делением в $Q(\mathscr{A}_2) - \{0\}$, для любых $q \neq 0$ и b из $\mathbf{F}$ уравнение $yq = b$ имеет единственное решение $y = b/q$. Поэтому для любого $q \neq 0$ из $\mathbf{F}$ отображение $M_{r,q} : Q \to Q$ — гомеоморфизм топологического пространства Q, где $M_{r,q}x = xq$ для всяких q и x из $\mathbf{F}$. При этом если отображение $f : Q \to Q$ непрерывно, то $(yf) : Q \to Q$ непрерывна, где $(yf)(x) = y(f(x))$ для $x \in \mathbf{F}$, $y \in \mathbf{F}$.

Следствие 2.3. *Пусть G — топологическая T_1-квазигруппа, полная относительно своей равномерности либо связная, либо вполне несвязная; либо $G = Q(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ топологическое T_1-квазикольцо с правым делением в $Q(\mathscr{A}_2) - \{0\}$. Если пространство X слабо вполне G-регулярно, то оно вполне G-регулярно.*

Теорема 2.2. *Пусть A — подпространство (слабо) вполне G-регулярного или (G, q, r)-регулярного пространства X. Тогда A (слабо) вполне G-регулярно или (G, q, r)-регулярно соответственно.*

Доказательство. В силу предложения 2.1.1 в [2] и определения 2.1 A является T_1-пространством. Пусть $x \in A$, B — замкнутое подмножество в A, $x \notin B$. По предложению 2.1.1 в [2] $B = A \cap \overline{B}$, следовательно, $x \notin \overline{B}$, где $\overline{B} = \mathrm{cl}_X B$ — замыкание B в X. В случае слабой вполне G-регулярности существуют $q \neq r$ в Q и непрерывное отображение $f : X \to Q$ такие, что $f(x) = r$ и $f(\overline{B}) = \{q\}$. Если же X вполне (G, q, r)-регулярно, то существует непрерывное отображение $f : X \to Q$ такое, что $f(x) = r$ и $f(\overline{B}) = \{q\}$. В случае вполне G-регулярности для всяких $q \neq r$ в Q существует непрерывное отображение $f : X \to Q$ такое, что $f(x) = r$ и $f(\overline{B}) = \{q\}$. Тогда ограничение f на A непрерывно, $f|_A : A \to Q$, причем $f(x) = r$ и $f(B) = \{q\}$, следовательно, A слабо вполне G-регулярно или вполне G-регулярно или (G, q, r)-регулярно соответственно.

Предложение 2.1. *Пусть даны T_1-пространство X и предбаза $\mathscr{P}_X$ его топологии $\mathscr{T}_X$. X вполне G-регулярно тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ и любой окрестности V точки x, где V принадлежит предбазе $\mathscr{P}_X$, для любых $q \neq r$ в G существует непрерывное отображение $f : X \to \mathbf{F}$ такое, что $f(x) = r$ и $f(X \setminus V) = \{q\}$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из определения 2.1, так как $x \notin X \setminus V$, а $X \setminus V$ замкнуто в X.

Достаточность. Пусть $x \in X$, B замкнуто в X, $x \notin B$. По определению предбазы существуют $V_1, \dots, V_k$ из $\mathscr{P}_X$ такие, что $x \in \bigcap_{i=1}^{k} V_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus B$. Согласно определению 2.1 для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ и для любых $q_i \neq r_i$ в G существует непрерывное отображение $f_i : X \to G$ такое, что $f_i(x) = r_i$ и $f_i(X \setminus V_i) = \{q_i\}$. Положим $f(z) = f_1(z)$ при $k = 1$, $f(z) = f_1(z)f_2(z)$ при $k = 2$, $f(z) = (\dots(f_1(z)f_2(z))\dots)f_k(z)$ при $k \geq 3$ для любого $z \in X$. Тогда f — непрерывное отображение, так как G — топологическая квазигруппа. При этом $f(x) = r$ и $f(y) = q$ для любого $y \in B$, поскольку $B \subseteq X \setminus V_i$ для любого $i = 1, \dots, k$, где $r = r_1$ и $q = q_1$ при $k = 1$, $r = r_1 r_2$ и $q = q_1 q_2$ при $k = 2$, $r = (\dots(r_1 r_2)\dots)r_k$ и $q = (\dots(q_1 q_2)\dots)q_k$ при $k \geq 3$. Поскольку G — квазигруппа, то для любых $q \neq r$ в G существуют $q_1 \neq r_1, \dots, q_k \neq r_k$ в G такие, что q и r имеют разложения в виде упорядоченных произведений, данных выше.

Теорема 2.3. *Пусть $X = \prod_{j \in J} X_j$ — произведение топологических пространств, где J — множество, $X \neq \varnothing$. X вполне G-регулярно тогда и только тогда, когда X_j вполне G-регулярно для любого $j \in J$.*

Доказательство. Пусть X_j вполне G-регулярно для любого $j \in J$. В силу предложения 2.1 достаточно доказать, что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности вида $V = \pi_{j_0}^{-1}(W_{j_0})$ и для любых $q \neq r$ в G, где W_{j_0} открыто в X_{j_0}, $j_0 \in J$, $\pi_j : X \to X_j$ — проекция, существует непрерывное отображение $f : X \to G$ такое, что $f(x) = r$ и $f(X \setminus V) = \{q\}$, так как $\prod_{j \in J} X_j$ снабжено тихоновской топологией произведения (см. также разд. 2.3 в [2]). Из вполне G-регулярности пространства X_{j_0} согласно определению 2.1 вытекает, что существует непрерывное отображение $g : X_{j_0} \to G$ такое, что $g(x_{j_0}) = r$ и $g(X_{j_0} \setminus W_{j_0}) = \{q\}$, где $x_{j_0} = \pi_{j_0}(x)$. Тогда отображение $f(y) = g(\pi_{j_0}(y))$ удовлетворяет нужным условиям, где $y \in X$.

Обратно, пусть X вполне G-регулярно. Возьмем произвольную фиксированную точку $y_j \in X_j$ для любого $j \in J$. Рассмотрим произведение топологических пространств $Y_{j_0} = \prod\limits_{j \in J} A_j$, где $A_{j_0} = X_{j_0}$, $A_j = \{y_j\}$ для любого $j \in J \setminus \{j_0\}$. Поскольку $\pi_{j_0} : Y_{j_0} \to X_{j_0}$ — гомеоморфизм, существует вложение X_{j_0} в Y_{j_0}. По определению 2.1 X_j есть T_1-пространство для любого $j \in J$. Поэтому Y_{j_0} замкнуто в X. Таким образом, существует вложение X_{j_0} в X в качестве замкнутого подпространства, следовательно, X_{j_0} вполне G-регулярно в силу теоремы 2.2.

Теорема 2.4. *Пусть X — слабо вполне G-регулярное пространство, $w(X) = \mathsf{m} \geq \aleph_0$, где $w(X)$ обозначает вес топологического пространства X. Тогда существует гомеоморфное вложение X в G^{m}.*

Доказательство. Из теоремы 2.3.13 в [2] вытекает, что $w(G^{\mathsf{m}}) \leq \mathsf{m}w(G)$, так как $\mathsf{m}w(G) = \max(\mathsf{m}, w(G))$, $\mathsf{mm} = \mathsf{m}$, $w(G)w(G) = w(G)$, $\mathsf{m} \geq \aleph_0$, $w(G) \geq \aleph_0$ [46]. Существует вложение дискретного пространства $D(\mathsf{m})$ мощности m в G^{m}, так как G — бесконечная T_1-топологическая квазигруппа. Из $w(D(\mathsf{m})) = \mathsf{m}$ следует, что $w(G^{\mathsf{m}}) \geq \mathsf{m}$. В силу теоремы 1.1.15 в [2] существует база $\{U_j : j \in J\}$ пространства X, состоящая из функционально открытых множеств $U_j = f_j^{-1}(V_j)$, где $f_j : X \to G$ — непрерывное отображение для любого $j \in J$, V_j — открытое подмножество в G, J — множество мощности m.

Если $x \in X$, B замкнуто в X, $x \notin B$, то $W = X \setminus B$ открыто в X, $x \in W$, тогда существует $j_0 \in J$ такое, что $U_{j_0} \subseteq W$, следовательно, f_{j_0} разделяет x и B. Таким образом, семейство $\mathscr{F} = \{f_j : j \in J\}$ разделяет точки и замкнутые множества в X. Поскольку X есть T_1-пространство, по теореме о диагональном отображении 2.3.20 в [2] диагональ $\Delta_{j \in J} f_j$ — гомеоморфное вложение X в G^{m}.

Замечание 2.2. Если в определении вполне регулярности использовать вместо всей топологической квазигруппы G некоторое каноническое замкнутое подмножество W в G, то получится определение (слабо) вполне W-регулярного ((W, q, r)-регулярного) пространства. Тогда теоремы 2.2 и 2.4 переносятся на (слабо) вполне W-регулярные пространства с $f : X \to W$ и W^{m} вместо $f : X \to G$ и G^{m} соответственно. Если дополнительно $WW \subseteq W$, то предложение 2.1 и теорема 2.3 тоже переносятся на вполне W-регулярные пространства.

Определение 2.2. Топологическое пространство называется *G-полным*, если оно слабо вполне G-регулярно и не существует слабо вполне G-регулярного пространства $Y = Y_X$, которое удовлетворяло бы следующим условиям:

(i) существует гомеоморфное вложение $h : X \to Y$ такое, что $h(X) \neq \overline{h(X)} = Y$;

(ii) для любого непрерывного отображения $f : X \to G$ существует непрерывное отображение $g : Y \to G$ такое, что $g(h) = f$, где $\overline{A} = \mathrm{cl}_Y A$ обозначает замыкание подмножества A в Y.

Теорема 2.5. *Топологическое пространство X G-полно тогда и только тогда, когда X гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J для некоторого множества J, где G^J снабжено тихоновской топологией произведения.*

Доказательство. Пусть X замкнуто в G^J и имеется гомеоморфное вложение $h : X \to Y$, где Y — слабо вполне G-регулярное пространство. Пусть h удовлетворяет условию (ii) из определения 2.2. Без ограничения общности можно рассмотреть случай $\mathrm{cl}_Y h(X) = Y$. В силу условия (ii) для любой проекции $\pi_j : G^J \to G_j$, где $G_j = G$, $G^J = \prod_{j\in J} G_j$, существует непрерывное отображение $\eta_j : Y \to G_j$ такое, что $\eta_j(h) = \pi_j|_X$, так как каждая проекция π_j имеет непрерывное ограничение $\pi_j|_X$ на X. Поэтому существует непрерывное инъективное диагональное отображение $\eta = \Delta_{j\in J}\eta_j : Y \to G^J$ в силу теоремы 2.3.20 в [2]. Тогда получается, что $\eta(h(x)) = x$ для любого $x \in X$, следовательно, $\eta(Y) = \eta(\mathrm{cl}_Y h(X)) \subseteq \mathrm{cl}_{G^J} \eta(h(X)) = X$, так как X замкнуто в G^J. При этом $h(\eta(h(x))) = h(x)$ для любого $x \in X$. Таким образом, $h(\eta|_{h(X)}) = id_{h(X)}$. Поскольку топологическая T_1-квазигруппа $(G, \mathscr{T}_G)$ имеет равномерность $\mathscr{U}_G$, совместимую с ее топологией по теореме 1.4, она является топологическим $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$-пространством по теореме 8.1.20 в [2]. В силу теоремы 2.3.11 в [2] G^J является $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$-пространством. Из теоремы 1.5.4 в [2] вытекает, что $h(\eta|_{h(X)}) = id_Y$. Таким образом, $h(X) = Y$, так как $h(\eta(Y)) = h(X)$. Следовательно, не существует слабо вполне G-регулярного пространства, которое удовлетворяло бы условиям (i) и (ii) из определения 2.2. Это означает, что X G-полно.

Пусть теперь X является G-полным топологическим пространством. Возьмем пространство $C(X,G)$ всех непрерывных отображений $f : X \to G$ и диагональное отображение $\psi := \Delta_{f\in C(X,G)} f : X \to \prod_{f\in C(X,G)} G_f$, где $G_f = G$ для любого $f \in C(X,G)$. Семейство $C(X,G)$ разделяет точки и замкнутые множества в X согласно определениям 2.1 и 2.2. В силу теоремы 2.3.20 в [2] о диагональном отображении ψ является гомеоморфным вложением. Тогда можно задать $Y = \mathrm{cl}_{G^J} \psi(X)$, где $J = C(X,G)$. Для любого непрерывного отображения $g : X \to G$ существует непрерывное отображение $\widetilde{g} : Y \to G$ такое, что $\widetilde{g}(\psi) = g$ и $\widetilde{g} = \pi_g|_Y$, где $\pi_g : \prod_{f\in J} G_f \to G_g$. Из определения 2.2 вытекает, что $Y = \psi(X)$. Таким образом, X гомеоморфно замкнутому подпространству $\psi(X)$ в G^J.

Лемма 2.1. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — бесконечная топологическая недискретная T_1-квазигруппа. Пусть существуют непрерывные отображения $h_j : G \to G$ такие, что $\mathscr{A}(h_1, h_2) = \mathrm{id}$; $h_j(G) \neq G$, $\mathrm{Int}_G h_j(G)$ является G-полным для любого $j \in \{1,2\}$, $\mathrm{Int}_G(h_1(G) \cap h_2(G)) = \varnothing$, $\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G h_1(G) \cup \mathrm{Int}_G h_2(G)) = G$, где $\forall x \in G$ $id(x) = x$. Пусть также X — топологическое пространство, $A \subset X$, любое непрерывное отображение $f : A \to G$ с $f(A) \subset \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$ для некоторого $j \in \{1,2\}$ имеет непрерывное продолжение $F : G \to G$, где $W_1 = h_1(G)$, $W_2 = h_2(G)$. Тогда любое непрерывное отображение $f : A \to G$ непрерывно продолжается на X.*

Доказательство. Поскольку отображения h_1 и h_2 непрерывны, отображение $\mathscr{A}(h_1, h_2)$ тоже непрерывно на G, так как $\mathscr{A}(h_1, h_2)(x) = \mathscr{A}(h_1(x), h_2(x))$ для любого $x \in G$. Из условий леммы следует, что G плотна в себе и $\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_1) \cup \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_2) = G$. Положим $f_1(x) = h_1(f(x))$, $f_2(x) = h_2(f(x))$ для любого $x \in A$. Тогда $f_j : A \to G$ и $f_j(A) \subseteq \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$. По условию леммы существует непрерывное продолжение F_j на G для f_j, $F_j : G \to G$, $F_j|_A = f_j$ для любого $j \in \{1,2\}$. Поэтому $F = \mathscr{A}(F_1, F_2)$ является непрерывным продолжением на G для отображения f.

Пример 2.1. Если $G = (\mathbf{R}, +)$, то $h_1(x) = \max(x, 0)$, $h_2(x) = \min(x, 0)$, $h_1(x) + h_2(x) = x$ для любого $x \in \mathbf{R}$, $h_1(\mathbf{R}) = [0, +\infty)$, $h_2(\mathbf{R}) = (-\infty, 0]$. Если топологическое поле $\mathbf{F}$ — расширение поля $\mathbf{R}$, то $\mathbf{F}$ также имеет структуру топологического векторного пространства над $\mathbf{R}$. Поэтому в таком случае также можно задать функции h_1 и h_2, удовлетворяющие условиям леммы 2.1.

Пример 2.2. Пусть $G = Q(\mathscr{B})$ — вполне несвязная топологическая бесконечная недискретная T_1-лупа. Для любых открыто-замкнутых непустых подмножеств A_1 и A_2 в G таких, что $A_1 \cup A_2 = G$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, зададим $h_1(x) = x$ при $x \in A_1$, $h_1(x) = e$ при $x \in A_2$ и $h_2(x) = x$ при $x \in A_2$, $h_2(x) = e$ при $x \in A_1$, где e — единичный элемент в G. Тогда отображения h_1 и h_2 непрерывны, $\mathscr{B}(h_1(x), h_2(x)) = x$ для любого $x \in G$, $h_1(G) = A_1 \cup \{e\}$, $h_2(G) = A_2 \cup \{e\}$.

В силу теоремы 1.1 функции h_1 и h_2, удовлетворяющие условиям леммы 2.1, существуют также для вполне несвязной топологической бесконечной недискретной T_1-лупы $Q(\mathscr{A})$.

Теорема 2.6. *Пусть X — слабо вполне G-регулярное пространство. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *X G-полно;*

(ii) *для любого $j \in \{1, 2\}$ существует компактификация $Z_j = c(\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G(W_j)))$ такая, что для любого $y \in (\beta X) \setminus X$ существует $i = i(y) \in \{1, 2\}$ и существует непрерывное отображение $h_{i,y} : \beta X \to Z_i$ такое, что $h_{i,y}(y) \in Z_i \setminus ((\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G(W_i))) \setminus (W_1 \cap W_2))$ и $h_{i,y}(x) \in (\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G(W_i))) \setminus (W_1 \cap W_2)$ для любого $x \in X$, где W_1 и W_2 удовлетворяют условиям леммы 2.1, βX обозначает стоун-чеховскую компактификацию пространства X.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство X G-полно, $y \in (\beta X) \setminus X$. Положим $Y = X \cup \{y\}$, следовательно, $Y \subseteq \beta X$. Поэтому выполняется условие (i) из определения 2.2. Из условия (ii) определения 2.2 вытекает, что существует непрерывное отображение $f : X \to G$, которое не имеет непрерывного продолжения на Y. В силу леммы 2.1 достаточно рассмотреть случай: существует $j \in \{1, 2\}$ такое, что $f(X) \subseteq \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$. В силу теоремы 1.4 G имеет равномерность, совместимую с ее топологией, следовательно, вполне регулярно (т. е. тихоновское) по теореме 8.1.20 в [2]. Поскольку G вполне регулярно, а X слабо вполне G-регулярно, то X вполне регулярно. Из теоремы 2.1 с использованием полиэдральных разложений в ее доказательстве следует, что существуют подмножества W_1, W_2 и функции h_1, h_2, удовлетворяющие условиям леммы 2.1. В силу теорем 3.1.9 и 3.6.1 в [2] отображение f имеет непрерывное продолжение $\widetilde{f} : \beta X \to Z_j$. Если бы $f(y) \in \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$, то существовало бы непрерывное продолжение $\widetilde{f}|_Y : Y \to G$ для f. Тогда получится противоречие. Поэтому $\widetilde{f}(y) \in Z_j \setminus \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$.

Поскольку $\mathrm{cl}_G(V_1 \cup V_2) = G$, где $V_1 = \mathrm{Int}_G h_1(G)$ и $V_2 = \mathrm{Int}_G(h_2(G))$, то $Z_1 \cup Z_2 \supset G$. Пусть для любого $y \in (\beta X) \setminus X$ существует непрерывное отображение $h_{i,y} : \beta X \to Z_i$ такое, что $h_{i,y}(y) \in Z_i \setminus ((\mathrm{cl}_G \mathrm{Int}_G W_i) \setminus (W_1 \cap W_2))$ и $h_{i,y}(X) \subset (\mathrm{cl}_G \mathrm{Int}_G W_i) \setminus (W_1 \cap W_2)$, где $i = i(y) \in \{1, 2\}$. Тогда

$$X = \bigcap_{y \in (\beta X) \setminus X} h^{-1}_{i(y),y}((\mathrm{cl}_G \mathrm{Int}_G W_i) \setminus (W_1 \cap W_2)).$$

Для продолжения доказательства понадобятся следующие леммы и теоремы.

Лемма 2.2. *Любое замкнутое подпространство X G-полного пространства G-полно.*

Доказательство. Пусть X замкнуто в G-полном пространстве Y. В силу теоремы 2.5 Y гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J для некоторого множества J. Поэтому X гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J, следовательно, X G-полно по теореме 2.5.

Теорема 2.7. *Пусть $X_d \neq \varnothing$ для любого $d \in D$, где D — множество. Произведение $\prod_{d\in D} X_d$ G-полно тогда и только тогда, когда X_d G-полно для любого $d \in D$.*

Доказательство. Если X_d G-полно, то X_d гомеоморфно замкнутому подпространству в G^{J_d} для некоторого множества J_d по теореме 2.2. Поэтому $\prod_{d\in D} X_d$ гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J для $J = \bigcup_{d\in D} J_d$ в силу предложения 2.3.7 и следствия 2.3.4 в [2]. Из теоремы 2.4 следует, что $\prod_{d\in D} X_d$ G-полно.

Обратно, пусть $\prod_{d\in D} X_d$ G-полно. Из следствия 2.3.4, предложения 2.3.7 в [2] и теоремы 2.4 вытекает, что X_d гомеоморфно замкнутому подпространству в G^{J_d} для некоторого множества J_d для любого $d \in D$, следовательно, X_d G-полно по лемме 2.2.

Следствие 2.4. *Предел обратного спектра G-полных пространств является G-полным.*

Доказательство. Это следует из предложения 2.5.1 в [2], леммы 2.2 и теоремы 2.7 выше.

Теорема 2.8. *Пусть X — топологическое пространство, $\{A_j : j \in J\}$ — семейство его подпространств. Если A_j G-полно для любого $j \in J$, то $\bigcap_{j\in J} A_j$ G-полно.*

Доказательство. Пересечение $\bigcap_{j\in J} A_j$ гомеоморфно $(\prod_{j\in J} A_j)\cap\Delta_X$, где Δ_X — диагональ в $\prod_{j\in J} X_j$, $X_j = X$ для любого $j \in J$. Из теоремы 2.7 вытекает, что $\prod_{j\in J} A_j$ G-полно. В силу леммы 2.2 $\bigcap_{j\in J} A_j$ G-полно.

Следствие 2.5. *Пусть топологическое пространство X G-полно, Y — хаусдорфово пространство, $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, D есть G-полное подпространство в Y. Тогда прообраз $f^{-1}(D)$ G-полон.*

Доказательство. Рассмотрим ограничение h функции f на $f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in D\}$ и $\Gamma(h) = (X \times D) \cap \Gamma(f)$, где $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ — график отображения f. Тогда $\Gamma(h)$ замкнут в $X \times D$, а $X \times D$ G-полно по теореме 2.7. Поскольку прообраз $f^{-1}(D)$ гомеоморфен $\Gamma(h)$, то $f^{-1}(D)$ G-полон согласно лемме 2.2.

Окончание доказательства теоремы 2.6. В силу следствий 2.4 и 2.5 X G-полно, так как $(\mathrm{cl}_G \operatorname{Int}_G W) \setminus (W_1 \cap W_2)$ G-полно, ибо $\operatorname{Int}_G h_j(G)$ G-полно для любого $j \in \{1, 2\}$.

Определение 2.3. Для слабо вполне G-регулярного пространства X пусть на пространстве $C(X, G)$ всех непрерывных функций $f : X \to G$ задана база

$$\mathsf{B}(C(X,G)) = \{W(x_1,\dots,x_n;U) : x_i \in X,\ i = 1,\dots,n,\ n \in \mathbf{N};\ U \in \mathsf{B}(G)\}$$

топологии $\mathscr{T} = \mathscr{T}(C(X,G))$ на $C(X,G)$, где

$$W(x_1,\dots,x_n;U) = \{g \in C(X,G) : g(x_i) \in U,\ i = 1,\dots,n\},\ n \in \mathbf{N},\ \mathbf{N} = \{1,\dots\},$$

$\mathsf{B}(G)$ — база топологии квазигруппы G. Тогда $(C(X,G),\mathscr{T})$ называется *пространством всех непрерывных функций* из X в G в топологии поточечной сходимости и обозначается через $C_p(X,G)$.

Предложение 2.2. *Пусть X — вполне G-регулярное пространство. Тогда $C_p(X,G)$ является всюду плотным подпространством в G^X.*

Доказательство. Из вполне G-регулярности пространства X следует, что для любых $x_1,\dots,x_n$ в X и $f \in G^X$ существует отображение $h \in C_p(X,G)$ такое, что $f(x_j) = h(x_j)$ для любого $j = 1,\dots,n$. Из определения топологии тихоновского произведения на G^X тогда вытекает, что $f \in \mathrm{cl}_{G^X} C_p(X,G)$.

Предложение 2.3. *Пусть X — вполне G-регулярное пространство, $Y \subset X$, $\xi_Y : C_p(X,G) \to C_p(Y,G)$ — отображение сужения, $\xi_Y(f) = f|_Y$ для любого $f \in C_p(X,G)$. Тогда отображение $\xi = \xi_Y$ непрерывно и $\mathrm{cl}_{C_p(X,G)}\,\xi(C_p(X,G)) = C_p(Y,G)$.*

Доказательство. Из определения 2.3 вытекает, что отображение ξ непрерывно. Для произвольного заданного отображения $g \in C_p(Y,G)$ возьмем открытую окрестность $W(y_1,\dots,y_n;U)$ отображения g, где $y_1,\dots,y_n$ принадлежат Y, $U \in \mathsf{B}(G)$, $n \in \mathbf{N}$. Поскольку X является вполне G-регулярным пространством, существует отображение $f \in C_p(X,G)$ такое, что $f(y_i) = g(y_i)$ для любого $i = 1,\dots,n$. При $n = 1$ это очевидно. При $1 < n$ для любого $1 \le i \le n$ подмножество $P_i := \{y_j : 1 \le j \le n, j \ne i\}$ замкнуто в X, и для любых q_i и r_i из G существует отображение $f_i \in C_p(X,G)$ такое, что $f_i(y_i) = r_i$, $f_i(P_i) = \{q_i\}$. Используя упорядоченные произведения вида $d_{i+1} = d_i b_{i+1}$ при $i = 1,\dots,n-1$, где $d_1 = b_1$, и выбирая подходящие r_i и q_i, получим отображение f, так как G — квазигруппа. Таким образом, $\xi(f) \in W(y_1,\dots,y_n;U)$.

Лемма 2.3. *Пусть X — (слабо) вполне G-регулярное пространство, A — замкнутое подмножество в X, B — компактное подмножество в X, $A \cap B = \varnothing$. Тогда (существуют $q \ne r$ в G соответственно) для любых $q \ne r$ в G существует непрерывное отображение $f : X \to G$ такое, что $f(A) = \{q\}$ и $f(B) = \{r\}$.*

Доказательство. Рассмотрим отношение эквивалентности E на X такое, что xEy, если или ($x \in A$ и $y \in A$), или ($x \in X - A$ и $x = y$). Тогда существуют факторпространство $Y = X/E$ и естественное факторное отображение $w : X \to Y$ (см., например, разд. 2.4 в [2]). В силу предложения 2.4.3 в [2] Y является T_1-пространством, так как A замкнуто в X, $w(x) = x$ для любого $x \in X \setminus A$. Из предложения 2.4.2 в [2] следует, что для любых различных точек $x \in Y - \{a\}$ и $y \in Y$, $x \ne y$, существует непрерывное отображение $f : Y \to G$ такое, что $f(x) = r_x$, $f(y) = q_y$, $q_y \ne r_x$ в G, где $a = w(A)$. Таким образом, семейство $C(Y,G)$ всех непрерывных функций $f : Y \to G$ разделяет точки в Y. Из теоремы 2.3.20 в [2] вытекает, что диагональ $\eta = \Delta_{f \in C(Y,G)} f$ есть инъективное непрерывное отображение $\eta : Y \to G^{C(Y,G)}$. С другой стороны, B компактно, следовательно, $w(B)$ компактно, а значит, и замкнуто в Y согласно теоремам 3.1.8 и 3.1.10 в [2]. При этом $w(B) \cap w(A) = \varnothing$. Тогда $\eta(w(B)) \cap \eta(w(A)) = \varnothing$, $\eta(w(B))$ замкнуто в $G^{C(Y,G)}$, $\eta(w(A)) = \eta(a)$. Из теоремы 2.4 следует, что (существуют $q \ne r$ в G соответственно) для любых $q \ne r$ в G существует непрерывное отображение $g : G^{C(Y,G)} \to G$ такое, что $g(\eta(w(B))) = \{r\}$ и $g(\eta(a)) = q$, следовательно,

$f = g \circ \eta \circ w$ — непрерывное отображение $f : X \to G$ такое, что $f(A) = \{q\}$, $f(B) = \{r\}$.

Предложение 2.4. *Пусть X — вполне G-регулярное пространство, $Y \subset X$, $\xi_Y : C_p(X,G) \to C_p(Y,G)$ — отображение сужения и Y замкнуто в X. Тогда $\xi = \xi_Y$ открыто отображает $C_p(X,G)$ на подпространство $\xi(C_p(X,G))$ пространства $C_p(Y,G)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай, когда G — лупа. Для $x_1,\dots,x_l$ из Y и $x_{l+1},\dots,x_n$ из $X-Y$ с $n \in \mathbf{N}$ и $f \in C_p(X,G)$ рассмотрим открытую окрестность $W(x_1,\dots,x_n;U)$ для f, где $U \in \mathsf{B}(G)$, $0 \le l \le n$. Тогда $\xi(W(x_1,\dots,x_n;U)) \subset W(x_1,\dots,x_l;U) \cap \xi(C_p(X,G))$. Возьмем произвольную функцию $g \in \xi(C_p(X,G))$ такую, что $g \in W(x_1,\dots,x_l;U)$. Пусть $h \in C_p(X,G)$ и $\xi(h) = g$. Из вполне G-регулярности пространства X и замкнутости Y в X вытекает, что существует отображение $s \in C_p(X,G)$ такое, что $s(Y) = \{e\}$ и $s(x_j)h(x_j) = f(x_j)$ для любого $j = l+1,\dots,n$. Тогда $sh \in W(x_1,\dots,x_n;U)$ и $\xi(sh) = g$, следовательно, $\xi(W(x_1,\dots,x_n;U)) = W(x_1,\dots,x_l;U) \cap \xi(C_p(X,G))$. Таким образом, отображение ξ открыто.

Предложение 2.5. *Пусть выполнены условия предложения* 2.3 *и Y всюду плотно в X. Тогда $\xi : C_p(Y,G) \to \xi(C_p(X,G)) =: C_p(Y|X,G)$ является уплотнением, где $\xi = \xi_Y$.*

Доказательство. Поскольку Y всюду плотно в X, из $f \neq g$ в $C_p(X,G)$ вытекает, что $f|_Y \neq g|_Y$, следовательно, $\xi(f) \neq \xi(g)$. В силу предложения 2.3 отображение $\xi = \xi_Y$ непрерывно. Таким образом, отображение ξ непрерывно, инъективно и сюръективно на $\xi(C_p(X,G))$, ξ — уплотнение $C_p(X,G)$ на $C_p(Y|X,G)$.

Следствие 2.6. *Если выполнены условия предложения* 2.5 *и $S \subseteq C_p(X,G)$, то отображение $\xi|_S : S \to \xi(S) \subseteq C_p(Y|X,G)$ является гомеоморфизмом.*

Пример 2.3. Пусть $\tau \ge \aleph_0$, S — дискретное пространство, $\mathrm{card}(S) = \tau$. Из изоморфизма топологических квазигрупп $(G^\tau)^\tau$ и G^τ вытекает, что топологические квазигруппы $C_p(X,G^\tau)$ и $(C_p(X,G^\tau))^\tau$ изоморфны, так как $C_p(X,(G^\tau)^\tau)$ изоморфно $C_p(X,G^\tau)$. При этом $(C_p(X,G^\tau))^\tau$ изоморфно $C_p(X \times S, G^\tau)$. Таким образом, из изоморфизма топологических квазигрупп $C_p(X,G^\tau)$ и $C_p(Y,G^\tau)$ в общем не следует, что топологические пространства X и Y гомеоморфны.

Определение 2.4. Для отображения f множества X в множество Y пусть задано отображение $f^* : G^Y \to G^X$ такое, что $f^*(v)(x) = v(f(x))$ для любых $v \in G^Y$ и $x \in X$. Тогда f^* называется двойственным отображением к f.

Предложение 2.6. (а) *Двойственное отображение f^* непрерывно.*

(б) *Пусть $f(X) = Y$. Тогда f^* — гомеоморфизм из G^Y на $f^*(G^Y)$ и $f^*(G^Y)$ замкнуто в G^X.*

Доказательство легко проводится с использованием определения 2.3 и замечания 2.1, так как для дискретного топологического пространства X пространства $C_p(X,G)$ и G^X гомеоморфны.

Предложение 2.7. *Пусть X, Y, Z — вполне G-регулярные пространства, $f : X \to Y$ и $g : X \to Z$ — непрерывные отображения такие, что $f(X) = Y$ и $g(X) = Z$. Тогда следующие условия равносильны:*

(а) $f^*(C(Y,G)) \subseteq g^*(C(Z,G))$;

(б) *существует непрерывное отображение* $h : Z \to Y$ *такое, что* $f = h \circ g$.

Доказательство проводится с использованием определения 2.3 и теоремы 2.3.

Следствие 2.7. *Предположим, что* X *и* Y — *вполне* G*-регулярные пространства,* $f : X \to Y$ — *сюръективное отображение. Тогда*

(а) f *непрерывно тогда и только тогда, когда* $f^*(C(Y,G)) \subseteq C(X,G)$*;*

(б) *если* f — *факторное отображение, то* $f^*(C_p(Y,G))$ *является замкнутым подпространством в* $C_p(X,G)$*;*

(в) f — *уплотнение в том и только том случае, если* $f^*(C_p(Y,G))$ *всюду плотно в* $C_p(X,G)$*;*

(г) f — *гомеоморфизм тогда и только тогда, когда* $f^*(C_p(Y,G)) = C_p(X,G)$.

Доказательство (а), (б), (г) проводится с использованием предложения 2.7.

(в) Пусть f — уплотнение, $h \in C(X,G)$. Возьмем открытую окрестность $W(x_1,\dots,x_n;V)$ функции h, где $x_1,\dots,x_n$ принадлежат X, $n \in \mathbf{N}$, $V \in \mathsf{B}(G)$. Из взаимной однозначности отображения f следует, что $y_i \neq y_j$ для любого $i \neq j$, где $f(x_i) = y_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Поскольку пространство Y вполне G-регулярно, существует отображение g такое, что $g(y_i) = h(x_i)$ для любого $i \in \{1,\dots,n\}$. Поэтому $f^*(g) \in W(x_1,\dots,x_n;V)$, следовательно, $f^*(C_p(Y,G))$ всюду плотно в $C_p(X,G)$.

Обратно, пусть $f^*(C_p(Y,G))$ всюду плотно в $C_p(X,G)$. В силу п. (а) f непрерывно. Предположим, что существуют $x_1 \neq x_2$ в X такие, что $f(x_1) = f(x_2)$. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай лупы. Возьмем произвольную открытую окрестность V единичного элемента e в G такую, что $V \neq G$. Существует открытая окрестность V_1 единичного элемента e в G такая, что $V_1V_1 \cup V_1 \setminus V_1 \cup V_1/V_1 \subset V$, так как G — бесконечная топологическая лупа, являющаяся T_1-пространством (см. определение 2.1). Тогда для любой функции $h \in f^*(C_p(Y,G))$ выполняется равенство $h(x_1) = h(x_2)$. С другой стороны, пространство X вполне G-регулярно, следовательно, существует $g \in C(X,G)$ такое, что $g(x_1) = e$, $g(x_2) \notin V$. Тогда $(W(x_1,x_2;V_1)g) \cap f^*(C_p(Y,G)) = \varnothing$. Получилось противоречие. Таким образом, отображение f взаимно однозначно и непрерывно, $f(X) = Y$, т. е. f — уплотнение.

Определение 2.5. Пусть X — вполне G-регулярное пространство, $f : X \to Y$ — отображение из X на Y. Сильнейшая из всех вполне G-регулярных топологий $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{X,f,Y}$ на Y, относительно которой f непрерывно, называется *G-факторной топологией на множестве Y порожденной отображением f*. При этом отображение f называется *G-факторным*, если топология на Y совпадает с G-факторной топологией, порожденной f.

Предложение 2.8. (а) *Семейство* $\mathsf{B} = \{h^{-1}(U) : h \in \mathscr{F}_G, U \text{ открыто в } G\}$ *образует предбазу топологии* $\mathscr{T}_{X,f,Y}$ (см. определение 2.5), *где* $\mathscr{F}_G = \{h \in G^Y : f^*(h) \in C(X,G)\}$.

(б) $\mathscr{T}_{X,f,Y}$ — *слабейшая топология на* Y, *для которой непрерывны все функции* h *из* $\mathscr{F}_G$.

(в) *Если* $\mathscr{T}_Y^1$ — *топология на* Y, *а отображение* $f : X \to (X, \mathscr{T}_Y^1)$ *непрерывно,* $\mathscr{F}_G \subset C\big((Y,\mathscr{T}_Y^1),G\big)$, *то* $\mathscr{F}_G = C\big((Y,\mathscr{T}_Y^1),G\big)$.

(г) $\mathscr{T}_{X,f,Y}$ — *единственная вполне* G*-регулярная топология на* Y, *для которой* $C((Y,\mathscr{T}_{X,f,Y}),G) = \mathscr{F}_G$.

Доказательство проводится с использованием теорем 2.2, 2.4 и определения 2.5.

Определение 2.6. Отображение $f : X \to Y$ топологических вполне G-регулярных пространств X и Y, где $f(X) = Y$, называется *G-функционально замкнутым*, если $f^*(C(Y, G))$ замкнуто в $C_p(X, G)$.

Предложение 2.9. *Пусть X и Y — вполне G-регулярные пространства. Отображение f из X на Y есть G-факторное отображение тогда и только тогда, когда f G-функционально замкнуто.*

Доказательство. Пусть f G-функционально замкнуто. В силу предложения 2.2 $C(Y, G)$ всюду плотно в G^Y. Согласно следствию 2.4(а) отображение f непрерывно. Поэтому $f^*(C(Y, G))$ всюду плотно в $f^*(G^Y)$. С другой стороны, $f^*(C(Y, G)) \subseteq E_G$, где $E_G = C(X, G) \cap f^*(G^Y)$, так как $f^*(C(Y, G)) \subseteq C(X, G)$. Таким образом, $f^*(C(Y, G))$ всюду плотно в E_G относительно топологии, наследуемой из $C_p(X, G)$. Поскольку отображение f G-функционально замкнуто, то $f^*(C(Y, G))$ замкнуто в $C_p(X, G)$, следовательно, $f^*(C(Y, G)) = E_G$. В силу инъективности отображения f^* получается равенство $C(Y, G) = \mathscr{F}_G$. Пространство Y вполне G-регулярно. Поэтому из предложения 2.8(г) вытекает, что топология пространства Y является G-факторной топологией, порожденной отображением f (см. также определение 2.5). Теперь предположим, что отображение f является G-факторным. В силу предложения 2.8(г) $C(Y, G) = \mathscr{F}_G$, следовательно, $f^*(C(Y, G)) = f^*(\mathscr{F}_G)$ — замкнутое подмножество в $C_p(X, G)$. Таким образом, f есть G-функционально замкнутое отображение.

Замечание 2.3. Пусть G — топологическая T_1-квазигруппа, X — множество, $v_x(f) = f(x)$ для любых $x \in X$, $f \in G^X$, $\mathscr{F} \subseteq G^X$. Тогда отображение $v_x : \mathscr{F} \to G$ непрерывно для любого данного x в силу определения топологии тихоновского произведения на G^X. Также существует каноническое отображение вычисления $\psi_{\mathscr{F}} : X \to G^{\mathscr{F}}$ такое, что $\psi_{\mathscr{F}}(x) = v_x$ для любого $x \in X$. Если $\mathscr{F}$ задано, то для краткости можно писать ψ вместо $\psi_{\mathscr{F}}$.

Предложение 2.10. *Если X — вполне G-регулярное пространство, $\mathscr{F} \subseteq C_p(X, G)$, то отображение $\psi_{\mathscr{F}} : X \to C_p(\mathscr{F}, G)$ непрерывно.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай лупы G. Для любого x из X и открытой окрестности V единичного элемента e в G такой, что $V \neq G$, $f_1, \dots, f_n$ из $C_p(X, G)$, имеется открытая окрестность

$$W(v_x; f_1, \dots, f_n; V, G) = \{h \in C(\mathscr{F}, G) : \forall j = 1, \dots, n;\ h(f_j) \in v_x(f_j)V\}$$

для v_x в $C_p(\mathscr{F}, G)$, где $n \in \mathbf{N}$. При этом

$$\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(f_j(x)V) = \psi_{\mathscr{F}}^{-1}(W(v_x; f_1, \dots, f_n; V, G))$$

открыто в X и содержит x, так как $af \in C_p(X, G)$ и $fs \in C_p(X, G)$ для любых $a \in G$, f и s из $C_p(X, G)$. Поэтому отображение $\psi_{\mathscr{F}}$ непрерывно.

Определение 2.7. Пусть X и Y — множества, $\mathscr{F}$ — некоторое семейство отображений из X в Y. Семейство $\mathscr{F}$ называется *разделяющим*, если для всяких различных точек $x_1 \neq x_2$ в X существует $f \in \mathscr{F}$ такое, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если X и Y — топологические пространства и для любых $x \in X$, $A \subset X$ с $x \notin \mathrm{cl}_X A$ существует $f \in \mathscr{F}$ такое, что $f(x) \notin \mathrm{cl}_Y f(A)$, то семейство $\mathscr{F}$ называется *регулярным*. При этом если $\mathscr{F} \subseteq C(X, G)$ и $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X) \subseteq C_p(\mathscr{F}, G)$ —

гомеоморфизм, то семейство G-значных отображений $\mathscr{F}$ называется *порождающим.* Если B — подпространство в X и любое непрерывное отображение $f : B \to G$ имеет непрерывное продолжение $f_X : X \to G$, то B называется (C,G)-*вложенным в* X.

Замечание 2.4. Из определения 2.7 и замечания 2.3 следует, что $\psi_{\mathscr{F}}(X)$ — разделяющее семейство G-значных отображений на $\mathscr{F}$.

Предложение 2.11. *Предположим, что X — вполне G-регулярное пространство, $\mathscr{F} \subseteq C(X,G)$. Тогда*

(а) *если $\mathscr{F}$ — разделяющее семейство, $\psi_{\mathscr{F}}(X)$ вложено в $C_p(\mathscr{F},G)$, то $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X)$ взаимно однозначно и непрерывно.*

(б) *Если $\mathscr{F}$ — регулярное семейство, $\psi_{\mathscr{F}}(X)$ вложено в $C_p(\mathscr{F},G)$, то $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X)$ — гомеоморфизм.*

Доказательство. (а) Семейство $\mathscr{F}$ разделяющее, следовательно, для любых $x_1 \neq x_2$ в X существует $f \in \mathscr{F}$ с $f(x_1) \neq f(x_2)$; следовательно, $v_{x_1}(f) \neq v_{x_2}(f)$, т. е. $v_{x_1} \neq v_{x_2}$.

(б) Существует обратное отображение $\psi_{\mathscr{F}}^{-1} : \psi_{\mathscr{F}}(X) \to X$, так как $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X)$ взаимно однозначно согласно п. (а). Из регулярности семейства $\mathscr{F}$ вытекает, что для любых $x \in X$ и U, открытого в X, с $x \in U$, $U \neq X$, существуют открытое подмножество V в G и отображение $f \in \mathscr{F}$ такие, что $(f(x)V) \cap (f(X-U)) = \varnothing$. Для открытого подмножества $W = W(v_x; f; V, G) = \{h \in C(\mathscr{F},G) : h(f) \in v_x(f)V\}$ в $C_p(\mathscr{F},G)$ получается $v_x \in W$ и $\psi_{\mathscr{F}}^{-1}(W \cap \psi_{\mathscr{F}}(X)) \subseteq U$, следовательно, $\psi_{\mathscr{F}}^{-1}$ — непрерывное отображение. Применение предложения 2.10 и утверждения (а) данного предложения дает, что $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X) \subseteq C_p(\mathscr{F},G)$ — гомеоморфизм.

Следствие 2.8. *Если пространство X вполне G-регулярно, $\mathscr{F} = C_p(X,G)$, то X гомеоморфно $\psi(X)$, где $\psi = \psi_{\mathscr{F}}$, $\psi(X)$ вложено в $C_p(C_p(X,G),G)$.*

Доказательство. Это вытекает из предложения 2.11 и замечания 2.3.

Замечание 2.5. Пусть $\mathbf{F}$ — топологическое T_0-поле,

$$L_p(X,\mathbf{F}) := \{y \in C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F}) : y = b_1x_1 + \dots + b_nx_n,\ n \in \mathbf{N},\\ x_1 \in X, \dots,\ x_n \in X,\ b_1 \in \mathbf{F}, \dots,\ b_n \in \mathbf{F}\}$$

— подпространство в $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$, где x_j отождествлено с $\psi(x_j)$, $x_j \in X$. В силу следствия 2.5 $\psi(X)$ является подпространством в $L_p(X,\mathbf{F})$.

Если Y — топологическое векторное пространство над топологическим полем $\mathbf{F}$, то Y' обозначает линейное над $\mathbf{F}$ пространство всех непрерывных линейных функционалов $g : Y \to \mathbf{F}$, где Y' наделено топологией поточечной сходимости.

Предложение 2.12. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство, $g \in C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$ и $g : C(X,\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ — линейная функция. Тогда существуют $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \in X, \dots, x_n \in X$, $b_1 \in \mathbf{F}, \dots, b_n \in \mathbf{F}$ такие, что $g = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$. Более того, $L_p(X,\mathbf{F}) = (C_p(X,\mathbf{F}))'$.*

Доказательство. Из непрерывности и линейности g следует, что $g(0) = 0$ и для любой открытой окрестности V нуля в $\mathbf{F}$ с $V = -V$ и $\mathbf{F}V$, не содержащемся в V, существуют $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \in X, \dots, x_n \in X$ и открытая окрестность нуля P в $\mathbf{F}$ с $P = -P$ такие, что $g(W(x_1,\dots,x_n;P)) \subseteq V$, где $f_0 = 0 \in C_p(X,\mathbf{F})$, $W(x_1,\dots,x_n;P) = \{h \in C_p(X,\mathbf{F}) : \forall j = 1,\dots,n; h(x_j) \in P\}$, $f_0 \in$

$W(x_1,\dots,x_n;P)$, $x_i\neq x_j$ для любых $i\neq j$. Возьмем произвольную функцию $f\in C_p(X,\mathbf{F})$ такую, что $f(x_j)=0$ $\forall j=1,\dots,n$. Поэтому $bf\in W(x_1,\dots,x_n;P)$ для любого $b\in\mathbf{F}$, следовательно, $g(bf)\in V$ для любого $b\in\mathbf{F}$ и $g(f)=0$, так как $\mathbf{F}V$ не содержится в V. Согласно вполне $\mathbf{F}$-регулярности пространства X существуют $f_i\in C_p(X,\mathbf{F})$ такие, что $f_i(x_i)=1$ и $f_i(x_j)=0$ для любых $i\neq j$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$.

Возьмем произвольную $h\in C_p(X,\mathbf{F})$ и $h_1=h-h(x_1)f_1-\dots-h(x_n)f_n$. По построению $h_1\in C_p(X,\mathbf{F})$, так как $C_p(X,\mathbf{F})$ есть векторное пространство над $\mathbf{F}$. При этом $h_1(x_i)=0$ для любого $i=1,\dots,n$. Из линейности g вытекает, что $g(h_1)=g(h)-h(x_1)g(f_1)-\dots-h(x_n)g(f_n)$, а по доказанному выше $g(h_1)=0$. Таким образом, $g(h)=b_1h(x_1)+\dots+b_nh(x_n)$, где $b_i=g(f_i)$ для любого $i=1,\dots,n$. Используя гомеоморфизм X с $\psi(X)$ (см. следствие 2.5), можно также записать $g=b_1x_1+\dots+b_nx_n$, отождествляя x с $\psi(x)=v_x$, где $v_x(h)=h(x)$ для любого $x\in X$. При этом функционал $x(h)=h(x)$ непрерывен на $C_p(X,\mathbf{F})$ для любого $x\in X$, где $h\in C_p(X,\mathbf{F})$. Таким образом, $g\in L_p(X,\mathbf{F})$ и $L_p(X,\mathbf{F})=(C_p(X,\mathbf{F}))'$.

Предложение 2.13. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство. Тогда X замкнуто в $L_p(X,\mathbf{F})$, а $L_p(X,\mathbf{F})$ замкнуто в $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$.*

Доказательство. Предположим, что $y\in(\mathrm{cl}_{L_p(X,\mathbf{F})}X)\setminus X$. Тогда по предложению 2.12 $y=b_1x_1+\dots+b_nx_n$, где $n\in\mathbf{N}$, $x_1\in X,\dots,x_n\in X$, $b_1\in\mathbf{F},\dots,b_n\in\mathbf{F}$. Поэтому $y\neq x_j$ для любого $j=1,\dots,n$, $Q:=X\cup\{y\}\subset L_p(X,\mathbf{F})\subset Y$, где $Y=C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$. В силу предложения 2.2 и теорем 2.1 и 2.2 пространства $C_p(X,\mathbf{F})$ и $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$ вполне $\mathbf{F}$-регулярны. Поэтому $L_p(X,\mathbf{F})$ и Q — вполне $\mathbf{F}$-регулярные пространства по теореме 2.2. Из вполне $\mathbf{F}$-регулярности пространства Q вытекает, что существует функция $f\in C_p(Q,\mathbf{F})$ такая, что $f(y)=1$ и $f(x_j)=0$ для любого $j=1,\dots,n$ (см. также лемму 2.3). Возьмем ограничение $g=f|_X$. Тогда $v_x(g)=g(y)=0$. Рассмотрим $P=\{x\in X:f(x)\in S\}$, где $S=1+V$, $V=-V$ — открытая симметричная окрестность нуля в $\mathbf{F}$ такая, что $\mathbf{F}V$ не содержится в V, $1\notin V$, $1\in\mathbf{F}$, $0\notin\mathrm{cl}_X S$. Поскольку f непрерывна и $f(y)=1$, то $y\notin\mathrm{cl}_{L_p(X,\mathbf{F})}(X\setminus P)$ и $y\in\mathrm{cl}_{L_p(X,\mathbf{F})}P$. С другой стороны, $v_x(g)=g(x)\in S$ для любого $x\in P$, следовательно, $v_y(g)=y(g)=g(y)\in\mathrm{cl}_X S$. Это противоречит тому, что $g(y)=0$. Таким образом, X замкнуто в $L_p(X,\mathbf{F})$. Из предложения 2.12 вытекает, что $L_p(X,\mathbf{F})$ является пространством всех линейных функций, принадлежащих $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$. Поэтому $\mathrm{cl}_{C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})}L_p(X,\mathbf{F})=L_p(X,\mathbf{F})$.

Следствие 2.9. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство. Тогда $\psi(X)$ $(C,\mathbf{F})$-вложено в $\mathbf{F}^{\mathscr{F}}$, где $\mathscr{F}=C(X,\mathbf{F})$.*

Доказательство. В силу предложений 2.2 и 2.13 имеется вложение X в $\mathbf{F}^{\mathscr{F}}$. Каждой $f\in\mathscr{F}$ соответствует непрерывная проекция $\pi_f:\mathbf{F}^{\mathscr{F}}\to\mathbf{F}_f$, где $\mathbf{F}_f=\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{\mathscr{F}}=\prod_{f\in\mathscr{F}}\mathbf{F}_f$. Поэтому $f\in\mathscr{F}$ соответствует сужение $\pi_f|_{\psi(X)}$.

Предложение 2.14. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство, $f: X\to\mathbf{F}$ — непрерывная функция. Тогда существует единственное непрерывное линейное продолжение $\widehat{f}:L_p(X,\mathbf{F})\to\mathbf{F}$.*

Доказательство. Пусть $g\in C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$, положим $\psi(f)(g)=g(f)$. Тогда $\psi(f)$ — непрерывный линейный функционал на $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$. Поэтому $\widehat{f}=\psi(f)|_{L_p(X,\mathbf{F})}$ — непрерывный линейный функционал на $L_p(X,\mathbf{F})$. Из предложений 2.12 и 2.13 вытекает, что $\widehat{f}|_X=f$. Единственность $\widehat{f}$ следует из линейности $\widehat{f}$ и того, что каждое $y \in L_p(X, \mathbf{F})$ имеет вид $y = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ для некоторых $n \in \mathbf{N}$, $b_1 \in \mathbf{F}$, ..., $b_n \in \mathbf{F}$, $x_1 \in X$, ..., $x_n \in X$.

Предложение 2.15. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство. Тогда линейные топологические пространства $C_p(X, \mathbf{F})$ и $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ над полем $\mathbf{F}$ изоморфны.*

Доказательство. В силу предложения 2.14 достаточно доказать, что $\psi : C_p(X, \mathbf{F}) \to (L_p(X, \mathbf{F}))'$ и ψ^{-1} непрерывны. Поскольку $C_p(X, \mathbf{F})$ и $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ являются линейными топологическими пространствами над $\mathbf{F}$, то для доказательства непрерывности ψ и ψ^{-1} достаточно рассмотреть базы окрестностей нуля в этих пространствах. База открытых окрестностей нуля в $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ состоит из $W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(y_1, \dots, y_k; V) = \{\widetilde{f} \in (L_p(X, \mathbf{F}))' : \widetilde{f}(y_1) \in V, , \dots, \widetilde{f}(y_k) \in V\}$, где $k \in \mathbf{N}$, $y_1 \in L_p(X, \mathbf{F})$, ..., $y_k \in L_p(X, \mathbf{F})$, а V принадлежит базе $\mathsf{B}_0(\mathbf{F})$ открытых окрестностей нуля в топологическом поле $\mathbf{F}$, причем V без ограничения общности симметрична, т. е. $V = -V$. В силу предложения 2.12 каждый вектор y_j имеет разложение $y_j = b_{j,1}x_{j,1} + \dots + b_{j,n_j}x_{j,n_j}$, где $b_{j,l} \in \mathbf{F}$, $x_{j,l} \in X$, $l = 1, \dots, n_j$, $n_j \in \mathbf{N}$. Тогда

$$\widetilde{f}(y_j) = \sum_{l=1}^{n_j} b_{j,l}\widetilde{f}(x_{j,l})$$

для любого $j = 1, \dots, k$. В силу непрерывности умножения и сложения на $\mathbf{F}$ существует открытая окрестность нуля $V_4 \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F})$ при $V_4 = -V_4$ такая, что $\sum\limits_{l=1}^{n} V_4 \subset V$, где $n = \max(n_1, \dots, n_k)$, а также для любых j и l существует $V_{3,j,l} \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F})$ такая, что $b_{j,l}V_{3,j,l} \subset V_4$, $V_{3,j,l} = -V_{3,j,l}$. Тогда для $V_3 = \bigcap\limits_{j=1}^{k} \bigcap\limits_{l=1}^{n_j} V_{3,j,l}$ выполняется включение

$$W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(y_1, \dots, y_k; V) \supset \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{l=1}^{n_j} W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(x_{j,l}; V_3).$$

Поэтому

$$\{W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(x; V) : x \in X, V \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F}), V = -V\}$$

— предбаза открытых окрестностей нуля в $(L_p(X, \mathbf{F}))'$. С другой стороны, предбаза открытых окрестностей нуля в $C_p(X, \mathbf{F})$ состоит из $\{W_{C_p(X,\mathbf{F})}(x; V) : x \in X, V \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F}), V = -V\}$, где $W_{C_p(X,\mathbf{F})}(x; V) = \{f \in C_p(X, \mathbf{F}) : f(x) \in V\}$. Поэтому из предложения 1.4.1 в [2] и предложения 2.12 выше следует, что $\psi : C_p(X, \mathbf{F}) \to (L_p(X, \mathbf{F}))'$ и ψ^{-1} непрерывны.

Следствие 2.10. *Пусть X и Y — вполне $\mathbf{F}$-регулярные пространства. Линейные топологические пространства $L_p(X, \mathbf{F})$ и $L_p(Y, \mathbf{F})$ изоморфны тогда и только тогда, когда линейные топологические пространства $C_p(X, \mathbf{F})$ и $C_p(Y, \mathbf{F})$ изоморфны.*

Доказательство. Это вытекает из предложений 2.12 и 2.15, так как изоморфизм $L_p(X, \mathbf{F})$ с $L_p(Y, \mathbf{F})$ влечет изоморфизм $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ с $(L_p(Y, \mathbf{F}))'$, а изоморфизм $C_p(X, \mathbf{F})$ с $C_p(Y, \mathbf{F})$ влечет изоморфизм $(C_p(X, \mathbf{F}))'$ с $(C_p(Y, \mathbf{F}))'$.

Теорема 2.9. *Пусть X и Y — вполне $\mathbf{F}$-регулярные пространства. Если $C_p(X, \mathbf{F})$ и $C_p(Y, \mathbf{F})$ изоморфны как топологические кольца, то X и Y гомеоморфны.*

Доказательство. В силу предложений 2.11 и 2.12 имеются вложения $\psi(X) \hookrightarrow M(X,\mathbf{F}) \hookrightarrow L_p(X,\mathbf{F})$, где $M(X,\mathbf{F})$ — подпространство пространства $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$, образованное всеми непрерывными линейными ненулевыми мультипликативными функционалами $g : C_p(X,\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$, $\psi = \psi_{C(X,\mathbf{F})}$. Из изоморфизма топологических колец $C_p(X,\mathbf{F})$ и $C_p(Y,\mathbf{F})$ вытекает, что топологические пространства $M(X,\mathbf{F})$ и $M(Y,\mathbf{F})$ гомеоморфны. Если $g \in M(X,\mathbf{F})$, то $g \in L_p(X,\mathbf{F}) \setminus \{0\}$. Поэтому в силу предложения 2.12 существуют попарно различные точки $x_1, \dots, x_n$ в X, $n \in \mathbf{N}$, и ненулевые числа $b_1, \dots, b_n$ в поле $\mathbf{F}$ такие, что $g = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$.

Предположим, что $n > 1$. Поскольку X вполне $\mathbf{F}$-регулярно, существуют функции $f_j \in C(X,\mathbf{F})$, $j \in \{1,\dots,n\}$, такие, что $f_1(x_1) = 1/b_1$, $f_2(x_2) = 1/b_2$, $f_i(x_j) = 0$ для остальных пар (i,j), где $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, так как $\mathbf{F}$ — поле, $b_i \neq 0$. Тогда $g(f_1) = b_1f_1(x_1) + \dots + b_nf_1(x_n) = 1$ и $g(f_2) = 1$. С другой стороны, $f_1(x_j)f_2(x_j) = 0$ для любого $j \in \{1,\dots,n\}$, следовательно, $g(f_1f_2) = 0$. Это противоречит мультипликативности линейного функционала g. Таким образом, случай $n > 1$ невозможен.

При $n = 1$ выполняется $g = b_1x_1$. Для функции $f(x) = 1$ для любого $x \in X$ тогда $g(f) = g(f^2) = g(f)g(f)$, так как $f^2 = f$. Поэтому $g(f) = b_1f(x_1) = b_1$, следовательно, $b_1 = 1$, поскольку $b_1^2 = b_1$, а $\mathbf{F}$ — поле. Таким образом, $g = x_1$, следовательно, $\psi(X) = M(X,\mathbf{F})$, так как $M(X,\mathbf{F}) \subseteq \psi(X)$ и $\psi(X) \subseteq M(X,\mathbf{F})$ согласно доказанному выше, где $\psi = \psi_{C(X,\mathbf{F})}$. Аналогично $\psi(Y) = M(Y,\mathbf{F})$, где $\psi = \psi_{C(Y,\mathbf{F})}$. Поэтому X и Y гомеоморфны, поскольку $M(X,\mathbf{F})$ и $M(Y,\mathbf{F})$ гомеоморфны.

Замечание 2.6. Полезно отметить, что теоремы 2.2–2.8, предложения 2.1–2.11, леммы 2.1, 2.2, следствия 2.1, 2.3–2.8 можно обобщить на случай топологической левой T_1-лупы, имеющей равномерность, совместимую с ее топологией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adhikari A. A., Adhikari M. R.* Basic topology. Singapore: Springer, 2022. V. 1–3.
2. *Engelking R.* General topology. Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma Ser. Pure Math.; V. 6).
3. *Jordan F.* Coincidence of function space topologies // Topology Appl. 2010. V. 157. P. 336–351.
4. *McCoy R. A., Ntantu I.* Topological properties of spaces of continuous functions. Berlin: Springer, 2006. (Lect. Notes Math.; V. 1315).
5. *Rojas-Sánchez A. D., Tamariz-Mascarúa A., Villegas-Rodríguez H.* On the pseudouniform topology on $C(X)$ // Topology Appl. 2021. V. 304, N 107796. P. 1–18.
6. *Narici L., Beckenstein E.* Topological vector spaces. New York: Marcel Dekker Inc., 2010.
7. *Ludkovsky S. V.* C^*-algebras of meta-invariant operators in modules over Cayley–Dickson algebras // Southeast Asian Bull. Math. 2015. V. 39. P. 625–684.
8. *Ludkovsky S. V.* Integration of vector hydrodynamical partial differential equations over octonions // Complex Var. Elliptic Equ. 2013. V. 58, N 5. P. 579–609.
9. *Ludkovsky S. V.* Integration of vector Sobolev type PDE over octonions // Complex Var. Elliptic Equ. 2016. V. 61, N 7. P. 1014–1035.
10. *Gürsey F., Tze C.-H.* On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1996.
11. *Акивис М. А., Шелехов А. М.* Многомерные три-ткани и их приложения. Тверь: Твер. гос. унив., 2010.
12. *Culbert C.* Cayley–Dickson algebras and loops // J. Gener. Lie Theory Appl. 2007. V. 1, N 1. P. 1–17.
13. *Eakin P., Sathaye A.* On automorphisms and derivations of Cayley–Dickson algebras // J. Algebra. 1990. V. 129, N 2. P. 263–278.
14. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 569–576.
15. *Мовсисян Ю. М., Давидов С. С.* Алгебры, близкие к квазигруппам. М.: Наука, 2018.
16. *Sabinin L. V.* Smooth quasigroups and loops. Dordrecht: Kluwer, 1999.

17. *Smith J. D. H.* An introduction to quasigroups and their representations. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC; Taylor and Francis Group, 2007.

18. *Dzhunushaliev V.* Non-associative slave-boson decomposition // J. Gener. Lie Theory Appl. 2007. V. 1, N 2. P. 129–134.

19. *Dzhunushaliev V.* Toy models of a nonassociative quantum mechanics // Adv. High Energy Phys. 2007. V. 2007, N 12387. P. 1–10.

20. *Hasiewicz Z., Defever F, Troost W.* Nonassociative superconformal algebras // J. Math. Phys. 1991. V. 32, N 9. P. 2285–2297.

21. *Majid S.* Gauge theory on nonassociative spaces // J. Math. Phys. 2005. V. 46, N 10. 103519. 24 pp.

22. *Mylonas D., Schupp P., Szabo R. J.* Non-geometric fluxes, quasi-Hopf twist deformations, and nonassociative quantum mechanics // J. Math. Phys. 2014. V. 55, N 122301. P. 1–38.

23. *Kerner E. H.* Nonassociative structure of quantum mechanics in curved space-time // J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 4664–4676.

24. *Castro C.* On the noncommutative and nonassociative geometry of octonionic space time, modified dispersion relations and grand unification // J. Math. Phys. 2007. V. 48. 073517. 23 p.

25. *Iantovics L. B., Nichita F. F.* On the colored and the set-theoretical Yang–Baxter equations // Axioms, MDPI. 2021. V. 10, N 3, 146. P. 1–10.

26. *Iordanescu R., Nichita F. F., Nichita I. M.* The Yang–Baxter equation, (quantum) computers and unifying theories // Axioms, MDPI. 2014. V. 3, N 4. P. 360–368.

27. *Nichita F. F.* Unification theories: new results and examples // Axioms, MDPI. 2021. V. 8, N 2, 60. P. 1–5.

28. *Blahut R. E.* Algebraic codes for data transmission. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003.

29. *Голубов В. В., Манько С. В.* Автоматизация стыковки автономных мобильных роботов на основе развития метода поисковых случайных деревьев со встречным ростом // Российский технол. журн. (Russian Technol. J.) 2024. Т. 12, № 1. С. 7–14.

30. *Гонсалес С., Коусело Е., Марков В. Т., Нечаев А. А.* Групповые коды и их неассоциативные обобщения // Дискр. математика. 2004. Т. 16, № 1. С. 146–156.

31. *Markov V. N., Mikhalev A. V., Nechaev A. A.* Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding // J. Math. Sci., N.Y. (Springer). 2020. V. 245, N 2. P. 178–196.

32. *Plotkin B.* Universal algebra, algebraic Logic, and databases. New York: Kluwer, 1994.

33. *Shum K. P., Ren X., Wang Y.* Semigroups on semilattice and the constructions of generalized cryptogroups // Southeast Asian Bull. Math. 2014. V. 38. P. 719–730.

34. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* P-адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994.

35. *Lawson H. B., Michelson M.-L.* Spin geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.

36. *Ludkovsky S. V.* Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields; representations and quasi-invariant measures. I; II // J. Math. Sci.; N.Y. (Springer). 2008. V. 147, 150, N 3, 4. P. 6703–6846, 2123–2223.

37. *Ludkovsky S. V.* Stochastic processes and antiderivational equations on non-Archimedean manifolds // Int. J. Mathematics Math. Sci. 2004. V. 31, N 1. P. 1633–1651.

38. *Ludkovsky S. V.* Non-Archimedean valued quasi-invariant descending at infinity measures // Int. J. Mathematics Math. Sci. 2005. V. 2005, N 23. P. 3799–3817.

39. *Людковский С . В.* Квазиинвариантные и инвариантные функционалы и меры на системах топологических луп и квазигрупп // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1032–1049.

40. *Rooij A. C. M. van* Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker Inc., 1978.

41. *Wiesław W.* Topological fields. New York: Marcel Dekker Inc., 1988.

42. *Yasuda K.* Semi-stable processes on local fields // Tohoku Math. J. 2006. V. 58. P. 419–431.

43. *Ludkovsky S. V.* Microbundles over topological rings // Topology Appl. 2019. V. 260. P. 126–138.

44. *Людковский С. В.* Факторные и трансверсальные отображения топологических квазигрупп // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, № 3. С. 497–522.

45. *Людковский С. В.* Неархимедовы полиэдральные разложения ультраравномерных пространств // Фундам. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 2. С. 455–475.

46. *Kunen K.* Set theory. London: College Publ., 2011.

Поступила в редакцию 6 декабря 2023 г.
После доработки 30 мая 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Людковский Сергей Викторович (ORCID 0000-0002-4733-8151)
МИРЭА — Российский технологический университет,
кафедра прикладной математики,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
sludkowski@mail.ru