Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.927.2+517.956

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А. И. Кожанов, О. И. Бжеумихова

Аннотация. Показано, что наличие в обыкновенном дифференциальном уравнении слагаемых с инволютивным отклонением в аргументе может существенно повлиять на корректность задачи Коши и других задач. Также показано, что обнаруженные эффекты могут повлиять на корректность классических краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными — например, для параболических и псевдопараболических уравнений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.513

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с инволюцией, задача Коши, корректность, нелокальные задачи, разрешимость.

1. Введение

Простейшей инволюцией отрезка $[0, T]$ в себя является линейная инволюция $\varphi(t) = T - t$. Нетрудно предъявить дробно-линейную инволюцию:

$$\varphi(t) = \frac{a(T - t)}{ct + a}, \quad a, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0;$$

для $\varphi(t)$ в случае $a(cT + a) > 0$ также выполняется инволютивное условие $\varphi(\varphi(t)) = t$, $t \in [0, T]$. Общий метод нахождения инволюции можно найти в [1].

Дифференциальные уравнения с инволюцией в аргументе неизвестного решения или тех или иных его производных активно изучаются в последнее время (см. [2–27]). В основном изучаются уравнения с линейной инволюцией, но и случай дифференциальных уравнений с инволюцией общего вида также встречается (см. [25]).

Целью настоящей работы является исследование влияния инволюции на корректность естественных краевых (начально-краевых) задач и прежде всего на существование и единственность решений. Будут рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Инволюция в основном будет линейной, но и уравнения с общей инволюцией также будут исследованы.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2022–282 с Министерством науки и высшего образования Российской федерации.

2. Собственные функции и собственные числа задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с линейной инволюцией

Пусть t — точка интервала $(0,T)$, $0 < T < \infty$, λ и μ — заданные действительные числа.

Задача Коши. *Найти функцию $y(t)$, являющуюся на интервале $(0,T)$ решением уравнения*

$$y'(t) + \lambda y(t) + \mu y(T-t) = 0 \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$y(0) = 0. \tag{2}$$

Как хорошо известно, в случае $\mu = 0$ задача (1), (2) имеет только тривиальное решение $y(t) \equiv 0$. Ситуация меняется, если в уравнении (1) $\mu \neq 0$.

Рассмотрим вначале случай $\lambda > 0$.

Обозначим через $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ упорядоченную по возрастанию последовательность положительных корней уравнения

$$z + \lambda \operatorname{tg}(Tz) = 0.$$

Положим $\mu_m = \left(z_m^2 + \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1. *Пусть λ — фиксированное положительное число. Тогда*

(a) *если $|\mu| \leq \lambda$, то задача Коши* (1), (2) *имеет только нулевое решение;*

(b) *если $m = 2l$, $\mu = \mu_m$ или $m = 2l-1$, $\mu = -\mu_m$, $l = 1, 2, \dots$, то задача Коши* (1), (2) *имеет ненулевые решения;*

(c) *если $\mu > \lambda$, $\mu \neq \mu_m$ для $m = 2l$, или $\mu < -\lambda$, $\mu \neq -\mu_m$ для $m = 2l-1$, $l = 1, 2, \dots$, то задача Коши* (1), (2) *имеет только тождественно нулевое решение.*

Доказательство. Пусть выполняется условие $|\mu| < \lambda$. Умножим уравнение (1) на функцию $y(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После несложных выкладок получим неравенство

$$y^2(T) + (\lambda - |\mu|) \int\limits_0^T y^2(t)\,dt \leq 0. \tag{3}$$

Из этого неравенства следует, что $y(t)$ — тождественно нулевая на отрезке $[0,T]$ функция.

Если $\mu = \lambda$, то из (3) имеем $y(T) = 0$. Далее, из (1) следует равенство

$$y'(t) - y'(T-t) = 0,$$

которое вместе с условием (2) и равенством $y(T) = 0$ дает соотношение

$$y(t) + y(T-t) = 0.$$

В свою очередь, из последнего равенства и уравнения (1) вытекает тождество $y'(t) \equiv 0$. Это означает, что $y(t) \equiv 0$ при $t \in [0,T]$.

Аналогичные выкладки в случае $\mu = -\lambda$ дают тождество $y(t) \equiv 0$ при $t \in [0,T]$.

Перейдем к анализу случая (b).

Заметим прежде всего, что все числа μ_m лежат в интервале $(\lambda, +\infty)$. Пусть μ совпадает с одним из чисел μ_m для четного номера m. Имеют место равенства

$$z_m \cos(z_m T) + \lambda \sin(z_m T) = 0, \quad \lambda^2 = \mu_m^2 - z_m^2.$$

Из этих равенств следует, что

$$z_m^2 - \mu_m^2 \sin^2(z_m T) = [z_m - \mu_m \sin(z_m T)][z_m + \mu_m \sin(z_m T)] = 0. \tag{4}$$

Для чисел z_m справедливы неравенства

$$\frac{(2m-1)\pi}{2T} < z_m < \frac{(2m+1)\pi}{2T}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Положим $g(z) = z + \lambda \operatorname{tg}(zT)$. На каждом интервале $\left(\frac{(2m-1)\pi}{2T}, \frac{(2m+1)\pi}{2T}\right)$ эта функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, причем в точке $\frac{\pi m}{T}$ ее значение положительно. Но тогда каждое число z_m принадлежит соответствующему интервалу $\left(\frac{(2m-1)\pi}{2T}, \frac{m\pi}{T}\right)$ и тем самым для четных m выполняется

$$\sin(z_m T) < 0.$$

Из этих неравенств и равенств (4) следует, что для таких m выполняется

$$z_m + \mu_m \sin(z_m T) = 0. \tag{5}$$

Используя (5), нетрудно показать, что функции $C \sin(z_m t)$, $C = \mathrm{const}$, будут нетривиальными решениями задачи (1), (2) в случае $\mu = \mu_m$, $m = 2l$.

Пусть μ — число $-\mu_m$, $m = 2l-1$. Рассуждая, как выше, нетрудно показать, что для чисел z_m в случае $m = 2l-1$ выполняется неравенство $\sin(z_m T) > 0$. Из этого неравенства и равенства (4) следует, что

$$z_m - \mu_m \sin(z_m T) = 0. \tag{6}$$

Из (6), в свою очередь, вытекает, что функции $C \sin(z_m t)$, $C = \mathrm{const}$, будут нетривиальными решениями задачи (1), (2) в случае $\mu = -\mu_m$, $m = 2l-1$.

Пусть число μ не совпадает с числами μ_m в случае $m = 2l$ и не совпадает с числами $-\mu_m$ в случае $m = 2l-1$. Дифференцируя (1) (что возможно), получим равенство

$$y''(t) + \lambda y'(t) - \mu y'(T-t) = 0.$$

Используя соотношение

$$y'(T-t) + \lambda y(T-t) + \mu y(t) = 0,$$

получим, что для функции $y(t)$ на интервале $(0, T)$ выполняется уравнение

$$y''(t) + (\mu^2 - \lambda^2) y(t) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, для функции $y(t)$ выполняется равенство

$$y'(T) + \lambda y(T) = 0. \tag{8}$$

Краевая задача (7), (2), (8) имеет нетривиальные решения лишь в случае, когда число $\mu^2 - \lambda^2$ совпадает с одним из чисел z_m^2. Поскольку по условию теоремы этого не может быть, функция $y(t)$ тождественно нулевая на интервале $(0, T)$. Это означает, что утверждение (c) истинно.

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим случай $\lambda \leq 0$. Приведем вначале одно вспомогательное утверждение. Положим

$$h(z) = z + \frac{\lambda(1 - e^{-2zT})}{1 + e^{-2zT}}.$$

Утверждение 1. *Пусть λ — фиксированное отрицательное число такое, что $|\lambda| T > 1$. Тогда уравнение $h(z) = 0$ имеет на промежутке $(0, +\infty)$ ровно одно решение z^*.*

Доказательство. Имеют место равенства

$$h'(z) = 1 + \frac{4\lambda T}{\left(e^{zT} + e^{-zT}\right)^2}, \quad h''(z) = -\frac{8\lambda T^2 \left(e^{zT} - e^{-zT}\right)}{\left(e^{zT} + e^{-zT}\right)^3}.$$

Поскольку $h'(0) < 0$, $h'(z) \to 1$ при $z \to +\infty$, найдется точка z_0, в которой $h'(z_0) = 0$. Заметим, что $h'(z)$ на промежутке $(0, +\infty)$ не может иметь более одного нуля, поскольку если есть еще один нуль, то функция $h''(z)$ должна обращаться в нуль на промежутке $(0, +\infty)$, а это невозможно.

Из приведенных рассуждений следует, что функция $h(z)$ монотонно убывает на $(0, z_0)$ и монотонно возрастает на $(z_0, +\infty)$, причем в точке z_0 выполняется $h(z_0) < 0$. Но тогда на $(z_0, +\infty)$ найдется ровно одна точка z^*, в которой $h(z^*) = 0$.

Утверждение доказано.

Положим

$$\mu^* = \frac{2\lambda}{e^{z^*T} + e^{-z^*T}}.$$

Вновь рассмотрим уравнение $z + \lambda \operatorname{tg}(Tz) = 0$, но теперь при $\lambda < 0$. Обозначим через $\overline{z}_m$ положительные корни этого уравнения и будем считать, что последовательность $\{\overline{z}_m\}_{m=1}^{\infty}$ упорядочена по возрастанию. Положим

$$\overline{\mu}_m = \left[\overline{z}_m^2 + \lambda^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть λ — фиксированное число из промежутка $(-\infty, 0]$. Тогда задача Коши (1), (2) имеет ненулевые решения, если*

(a) *для чисел λ и μ выполняется $|\lambda| T > 1$, $\mu = \mu^*$;*

(b) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = -\frac{1}{T}$;

(c) $\lambda < 0$, $\mu = \overline{\mu}_m$ *для* $m = 2l$, $\mu = -\overline{\mu}_m$ *для* $m = 2l - 1$, $l = 1, 2, \dots$;

(d) $\lambda = 0$, $\mu = \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, \dots$.

Доказательство. В случае (a) положим

$$v(t) = e^{z^*t} - e^{-z^*t}.$$

Для определенного выше числа μ^* и для этой функции выполняется

$$v'(t) + \lambda v(t) + \mu^* v(T - t) = 0.$$

Это означает, что задача Коши (1), (2) имеет ненулевые решения.

В случае (b) искомыми решениями будут функции Ct, $C = \mathrm{const}$.

Перейдем к анализу случая (c).

Для положительных решений $\overline{z}_m$ уравнения $z + \lambda \operatorname{tg}(Tz) = 0$ в случае $\lambda < 0$ выполняется

$$\sin(\overline{z}_m T) < 0 \quad \text{для } m = 2l - 1,$$

$$\sin(\overline{z}_m T) > 0 \quad \text{для } m = 2l,\ l = 1, 2, \dots.$$

Отсюда следует, что для нечетных чисел m

$$\overline{z}_m + \overline{\mu}_m \sin(\overline{z}_m T) = 0$$

и соответственно для четных

$$\overline{z}_m - \overline{\mu}_m \sin(\overline{z}_m T) = 0.$$

Определим функцию $v_m(t)$:

$$v_m(t) = \sin(\overline{z}_m t).$$

Для этих функций при нечетных m выполняется

$$v_m'(t) + \lambda v_m(t) + \overline{\mu}_m v_m(T-t) = 0$$

и соответственно для четных

$$v_m'(t) + \lambda v_m(t) - \overline{\mu}_m v_m(T-t) = 0.$$

Эти равенства и означают, что для отрицательного числа λ и чисел $\overline{\mu}_m$ или $-\overline{\mu}_m$ функции $Cv_m(t)$ являются решениями задачи Коши (1), (2).

В случае $\lambda = 0$ непосредственно проверяется, что при $\mu = \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, \dots$, задача Коши (1), (2) имеет решение $C\sin(\mu t)$, $C = \mathrm{const}$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть λ — фиксированное число из промежутка $(-\infty, 0]$, Задача Коши* (1), (2) *имеет лишь тождественно нулевое решение, если*

(a) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| \neq \overline{\mu}_m$;

(b) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \neq \frac{1}{2T} \ln \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}$;

(c) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = \frac{1}{T}$;

(d) $\lambda = 0$, $\mu \neq \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Решение $y(t)$ задачи Коши (1), (2) является решением краевой задачи

$$y'' + (\mu^2 - \lambda^2) y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(T) + \lambda y(T) = 0. \tag{9}$$

Если число $\mu^2 - \lambda^2$ положительно и $y(t)$ — не тождественно нулевое решение этой задачи, то должно выполняться равенство

$$\mu^2 - \lambda^2 = \overline{z}_m^2.$$

Но вследствие условия $|\mu| \neq \overline{\mu}_m$ в случае (a) это невозможно.

В случае (b) решение $y(t)$ представленной выше краевой задачи будет не тождественно нулевым, если выполняются условия

$$\mu^2 - \lambda^2 < 0, \quad (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}) e^{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} T} = (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}) e^{-\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} T}.$$

Поскольку второе из этих уравнений не имеет места, решение $y(t)$ как краевой задачи (9), так и задачи Коши (1), (2) будет тождественно нулевой функцией.

В случае (c) выполняется $\mu^2 - \lambda^2 = 0$, и если $\mu = -\frac{1}{T}$, то решение $y(t)$ будет ненулевым, если же $\mu = \frac{1}{T}$, то $y(t) \equiv 0$.

Наконец, в случае (d) непосредственно получаем, что $y(t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Задачу (1), (2) можно трактовать как задачу на собственные значения со спектральным параметром λ. Доказанные теоремы дают условия на число μ, при выполнении которых данное число λ будет собственным числом этой задачи (т. е. когда задача (1), (2) имеет ненулевые решения) или не будет (в случае лишь тождественно нулевых решений).

3. Собственные функции и собственные числа нелокальных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с линейной инволюцией

В настоящем разделе будет показано, что коэффициенты λ и μ в уравнении (1) могут оказать существенное влияние на наличие и отсутствие собственных чисел и собственных функций некоторых нелокальных задач.

Нелокальная задача I. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$y(0) = y(T). \tag{10}$$

Нелокальная задача II. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$y(0) = -y(T). \tag{11}$$

Нелокальные задачи I и II представляют собой задачи нахождения периодических и соответственно антипериодических режимов в обыкновенных дифференциальных уравнениях первого порядка с инволюцией.

Положим

$$\mu_{m,1} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Теорема 4. *Пусть λ — фиксированное число. Если выполняется одно из условий*

(a) $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| = \mu_{m,1}$, $m = 1, 2, \dots;$

(b) $\mu = -\lambda$,

то нелокальная задача I *имеет ненулевые решения. Для всех остальных чисел μ нелокальная задача* I *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Для решений $y(t)$ нелокальной задачи I имеют место равенства

$$y'' + (\mu^2 - \lambda^2)y = 0, \tag{12}$$

$$y'(0) = y'(T). \tag{13}$$

Пусть выполняется неравенство $\mu^2 - \lambda^2 > 0$. Из (12), (10) и (13) следует, что функция $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t), \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2},$$

и что для чисел A и B имеют место соотношения

$$A(1 - \cos(\gamma T)) - B\sin(\gamma T) = 0, \tag{14}$$

$$A\sin(\gamma T) + B(1 - \cos(\gamma T)) = 0. \tag{15}$$

В случае $|\mu| = \mu_{m,1}$ эти соотношения справедливы для любых чисел A и B. Выберем такие A и B, для которых

$$A\gamma = B(\lambda - \mu). \tag{16}$$

Заметим, что из (16) следует равенство

$$A(\lambda + \mu) + B\gamma = 0. \tag{17}$$

Из (16) и (17) непосредственно вытекает, что в случае $|\mu| = \mu_{m,1}$ функции

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)$$

будут ненулевыми решениями нелокальной задачи I.

Очевидно теперь, что в случае $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| \neq \mu_{m,1}$ система (14), (15) имеет единственное решение $A = B = 0$. Но тогда и решение $y(t)$ нелокальной задачи I будет тождественно нулевой функцией.

Пусть для чисел λ и μ выполняется $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\lambda > 0$. Умножая уравнение (1) на функцию $y(t)$ и интегрируя по отрезку $[0, T]$, получим, что выполняется неравенство

$$(\lambda - |\mu|)\int\limits_0^T y^2(t)\,dt \le 0.$$

Из этого неравенства непосредственно следует, что решение нелокальной задачи I в рассматриваемом случае есть тождественно нулевая функция.

В случае $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\lambda < 0$ решение $y(t)$ нелокальной задачи I представляется в виде

$$y(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Условия (10) и (13) дают для чисел A и B алгебраическую систему, решение которой суть числа A и B, равные нулю. Следовательно, и в этом случае решение $y(t)$ нелокальной задачи I есть тождественно нулевая функция.

Наконец, непосредственно проверяется, что при $\mu = \lambda$ решение $y(t)$ нелокальной задачи I есть тождественно нулевая функция, при $\mu = -\lambda$ решение $y(t)$ имеет вид $y(t) \equiv \mathrm{const}$.

Теорема доказана.

Положим

$$\mu_{m,2} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 5. *Пусть λ — фиксированное число. Тогда если $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| = \mu_{m,2}$, $m = 1, 2, \ldots$, то нелокальная задача* II *имеет ненулевые решения. Для всех остальных чисел μ нелокальная задача* II *имеет только нулевое решение.*

Доказательство теоремы 5 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 4.

Нелокальную задачу I можно трактовать как задачу с интегральным условием, а именно как задачу нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\int\limits_0^T y(t)\,dt = 0.$$

Дальнейшим обобщением подобной задачи может служить задача с общим интегральным условием.

Пусть $N(t)$ — заданная функция, определенная на отрезке $[0, T]$.

Нелокальная задача III. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_0^T N(t)y(t)\,dt = 0. \tag{18}$$

Покажем, что для этой задачи во многих случаях также возможна ситуация, в которой для бесконечного набора чисел μ будут существовать ненулевые решения.

Теорема 6. *Пусть λ — фиксированное число, и пусть выполняется одно из условий*

(a) $N(t)$ *— определенная при $t \in (-\infty, \infty)$ четная не тождественно нулевая периодическая с периодом $\frac{T}{2}$ функция;*

(b) $N(t)$ *— определенная при $t \in (-\infty, \infty)$ нечетная не тождественно нулевая периодическая с периодом $\frac{T}{2}$ функция.*

Тогда найдется бесконечно много чисел μ таких, что для каждого их них задача III *будет иметь ненулевые решения.*

Доказательство. Пусть выполняется условие (a). Решение $y(t)$ нелокальной задачи III является решением уравнения

$$y'' + (\mu^2 - \lambda^2)y = 0.$$

Вследствие четности и периодичности функции $N(t)$ выполняется равенство $N(t) = N(T - t)$. Отсюда вытекает, что помимо условия (18) для функции $y(t)$ будет выполняться условие

$$\int\limits_0^T N(t)y'(t)\,dt = 0. \tag{19}$$

Пусть выполняется неравенство $\mu^2 - \lambda^2 > 0$. Тогда функция $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t), \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Условия (18) и (19) означают, что числа A и B являются решениями системы

$$A\int\limits_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt + B\int\limits_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt = 0,$$

$$-A\int\limits_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt + B\int\limits_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt = 0.$$

Данная система имеет ненулевые решения лишь при выполнении равенств

$$\int\limits_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt = 0, \quad \int\limits_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt = 0. \tag{20}$$

Пусть γ — число, для которого $\gamma T = 2\pi m$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\int\limits_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt = \int\limits_0^T N(T-\tau)\sin[\gamma(T-\tau)]\,d\tau$$

$$= \int\limits_0^T N(T-\tau)[\sin(\gamma T)\cos(\gamma\tau) - \cos(\gamma T)\sin(\gamma\tau)]\,d\tau$$

$$= -\int_0^T N(T-\tau)\sin(\gamma\tau)\,d\tau = -\int_0^T N(\tau)\sin(\gamma\tau)\,d\tau.$$

Отсюда следует, что для выбранных чисел γ второе равенство (20) выполняется.

Далее, имеем

$$\int_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt = \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int_{T/2}^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt$$

$$= \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int_0^{T/2} N\left(\tau+\frac{T}{2}\right)\cos\left[\gamma\left(\tau+\frac{T}{2}\right)\right]d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int_0^{T/2} N(\tau)\left[\cos(\gamma\tau)\cos\left(\frac{\gamma T}{2}\right) - \sin(\gamma\tau)\sin\left(\frac{\gamma T}{2}\right)\right]d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt - \int_0^{T/2} N(\tau)\cos(\gamma\tau)\,d\tau = 0.$$

Следовательно, для выбранных чисел γ выполняется и первое равенство (20).

Положим $\mu = (\lambda^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}$. Справедливость равенств (20) означает, что числа A и B можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство (17). Но тогда всевозможные функции $A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)$ будут давать ненулевые решения нелокальной задачи III с указанными выше числами λ и μ.

При выполнении условия (b) для функции $N(t)$ справедливо равенство $N(t) = -N(T-t)$. Это равенство и условие периодичности означают, что при выбранных выше числах γ оба равенства (20) будут иметь место. Это вновь дает существование бесконечного множества ненулевых решений нелокальной задачи III.

Теорема доказана.

Замечание 1. Фактически условием существования ненулевых решений нелокальной задачи III является условие (20), теорема 6 дает примеры функций $N(t)$, для которых это условие выполняется.

4. Собственные числа и собственные функции для параболических и псевдопараболических уравнений с инволюцией

Результаты о разрешимости задачи Коши для уравнения (1) дают возможность получить новые результаты о разрешимости спектральных задач для параболических и псевдопараболических уравнений с инволюцией по временной переменной.

Пусть Ω — ограниченная область из пространства R^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $S = \Gamma\times(0,T)$ — боковая граница Q, λ и μ — заданные действительные числа.

Рассмотрим начально-краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + \lambda u(x,t) + \mu u(x,T-t) = 0,$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=0, \quad x\in\Omega,$$
$$u(x,t)|_S=0$$

(Δ — *оператор Лапласа по переменным* $x_1,x_2,\dots,x_n$).

Представим решение этой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа (с собственными функциями $w_k(x)$ и собственными числами β_k):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)w_k(x).$$

Функции $v_k(t)$ в этом представлении определяются как решения задач Коши

$$v_k'(t)+(\lambda-\beta_k)\,v_k(t)+\mu v_k(T-t)=0, \quad v_k(0)=0.$$

Используя теоремы 1–3, нетрудно получить результаты о существовании нулевых или ненулевых решений изучаемой начально-краевой задачи.

Если в изучаемой задаче начальное условие $u(x,0)=0$ заменить нелокальным условием $u(x,0)=u(x,T)$ или условием $u(x,0)=-u(x,T)$, или интегральным условием

$$\int_0^T N(t)u(x,t)\,dt=0,$$

то с помощью теорем 4–6 нетрудно получить результаты о существовании ненулевых решений соответствующих нелокальных задач.

Аналогичным образом можно провести исследование существования только нулевых или ненулевых решений для псевдопараболических уравнений

$$u_t(x,t)-\alpha\Delta u(x,t)-\beta\Delta u_t(x,t)+\lambda u(x,t)+\mu u(x,T-t)=0$$

($\alpha>0$, $\beta>0$; подобные уравнения возникают при моделировании процессов фильтрации или влагопереноса в трещиноватых породах (см. [28–31])).

5. Заключительные замечания

Исследования, проведенные выше, могут быть продолжены в различных направлениях. Опишем некоторые из них.

1. В целом аналогичные результаты о существовании собственных функций и собственных чисел можно получить для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией не только в решении, но и в производной — именно, для уравнений

$$y'(t)+\alpha y'(T-t)+\lambda y(t)+\mu y(T-t)=0, \quad \alpha\in R,\ \lambda\in R,\ \mu\in R.$$

2. В свою очередь, имея результаты о существовании и несуществовании ненулевых решений задачи Коши, нетрудно получить результаты о существовании и несуществовании ненулевых решений начально-краевых задач для параболических уравнений с двойной инволюцией

$$u_t(x,t)+\alpha u_t(x,T-t)-\Delta u(x,t)+\lambda u(x,t)+\mu u(x,T-t)=0,$$

а также для соответствующих псевдопараболических уравнений.

3. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка с общей инволюцией:

$$y'(t)+\lambda y(t)+\mu y\,(\varphi(t))=0, \quad y(0)=0 \tag{21}$$

($\varphi(\varphi(t))=t$ при $t\in[0,T]$).

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$\lambda > 0, \quad \varphi(t) \in C^1([0,T]), \quad \lambda - |\mu| \max_{[0,T]} |\psi'(t)| > 0, \quad \psi(t) = \varphi^{-1}(t).$$

Тогда задача Коши (21) *имеет только нулевое решение.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству первой части теоремы 1.

Аналогичные теоремы единственности нетрудно доказать и для начально-краевых задач для параболических и псевдопараболических уравнений с инволюцией, а также для нелокальных задач с условиями (10), (11) или (18).

4. В разд. 2–4 работы обсуждался вопрос о единственности и неединственности решений задачи Коши и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с нулевой правой частью. Используя технику, связанную с переходом к сопряженной задаче, с помощью полученных выше результатов нетрудно получить теоремы о существовании и несуществовании решений задачи Коши и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с инволюцией в зависимости от параметров λ и μ для тех или иных уравнений с ненулевой правой частью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shisha O., Mehr C. B.* On involutions // J. Research of the National Bureau of Standards. B. Mathematics and Math. Physics. 1967. V. 71B, N 1. P. 19–20.

2. *Wiener J.* Generalized solutions of functional differential equations. Singapore: World Sci., 1993.

3. *Andreev A. A.* Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument // Differ. Equ. 2004. V. 40. P. 1192–1194.

4. *Piao D.* Pseudo almost periodic solutions for differential equations involving reflection of the argument // J. Korean Math. Soc. 2004. V. 41, N 4. P. 747–754.

5. *Кальменов Т. Ш., Искакова У. А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.

6. *Watkins W.* Asymptotic properties of differential equations with involutions // Intern. J. Pure Appl. Math. 2008. V. 44, N 4. P. 485–492.

7. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154.

8. *Kal'menov T. Sh., Shaldanbaev A. Sh.* On a recurrence method for solving a singularly perturbed Cauchy problem for a second order equation // Sib. Adv. Math. 2011. V. 21. P. 274–281.

9. *Ashyralyev A., Sarsenbi A. M.* Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electron. J. Differ. Equ. 2015. V. 284. P. 1–8.

10. *Искакова У. А., Торебек Б. Т.* Об одном методе решения некорректной задачи Робена — Коши для оператора Лапласа // Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-мат. 2016. Т. 6, № 310. С. 115–120.

11. *Шалданбаев А. Ш., Шоманбаева М. Т., Ахметова С. Т.* О канторовости спектра оператора периодической краевой задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-мат. 2016. Т. 3, № 307. С. 148–157.

12. *Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R. G.* An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // Quaestiones Math. 2017. V. 40, N 2. P. 151–160.

13. *Tojo F. A. F., Torres P.* Green's functions of partial differential equations with involutions // J. Appl. Anal. & Computation. 2017. V. 7, N 3. P. 1127–1138.

14. *Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M. B.* On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data // Adv. Math. Phys. 2018. V. 2018. P. 1–8.

15. *Sarsenbi A. A.* A solvability conditions of mixed problems for equations of parabolic type with involution // Bul. Karaganda Univ. Math. Ser. 2018. V. 4, N 92. P. 87–93.

16. *Al-Salti N., Kirane M., Torebek B. T.* On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe J. Mathematics and Statistics. 2019. V. 48, N 3. P. 669–681.
17. *Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1091–1132.
18. *Kritskov L. V., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M.* Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turkish J. Math. 2019. V. 43, N 1. P. 393–401.
19. *Сарсенби А. А.* Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией // Журн.q СВМО. 2019. Т. 21, № 1. С. 48–59.
20. *Турметов Б. Х.* Об одном обобщении третьей краевой задачи для уравнения Лапласа // Челябинск. физ.-мат. журн. 2019. Т. 4, № 1. С. 33–41.
21. *Yarka U., Fedushko S., Vesel P.* The Dirichlet problem for the perturbed elliptic equation // Mathematics. 2020. V. 8, N 12:2108. P. 1–13.
22. *Nazarova K. Z., Turmetov B. K., Usmanov K. I.* On the solvability of some boundary value problems with involution // Vestn. Samara Univ. Natural Sci. Ser. 2020. V. 26, N 3. P. 7–16.
23. *Алтынбек Д. Н., Муратбекова М. А.* Вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения высокого порядка с инволюцией // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова. Нур-Султан, 2021. С. 85–88.
24. *Сарсенби А. М.* Разрешимость смешанной задачи для уравнения теплопроводности с инволютивным возмущением // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова. Нур-Султан, 2021. С. 143–144.
25. *Kozhanov A. I., Bzheumikhova O. I.* Elliptic and parabolic equations with involution and degeneration at higher derivatives // Mathematics. 2022. V. 10, N 18:3325. P. 1–10.
26. *Mahmudova D., Abbasova M., Alixanov O.* Influence of involution on differential equations with second-order constant coefficients // Intern. J. Research in Commerce, IT, Engineering, and Social Sciences. 2022. V. 16, N 01. P. 40–44.
27. *Kirane M., Sarsenbi A. A.* Solvability of mixed problems for a fourth-order equation with involution and fractional derivative // Fractal and Fractional. 2023. V. 7, N 2:131. P. 1–12.
28. *Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.
29. *Дзекцер Е. С.* Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543.
30. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976.
31. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.

Поступила в редакцию 12 августа 2024 г.
После доработки 12 августа 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Бжеумихова Оксана Игоревна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик 360004
bzhoksana@gmail.com