Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.518.1

ПЛОЩАДЬ ОБРАЗОВ КЛАССОВ ИЗМЕРИМЫХ МНОЖЕСТВ НА ГРУППАХ КАРНО С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Б. Карманова

Аннотация. Для липшицевых во внутреннем смысле отображений, определенных на классах измеримых подмножеств групп Карно произвольной глубины и принимающих значения на группах Карно с сублоренцевой структурой, выведен сублоренцев аналог формулы площади. В частности, введено адекватное определение меры Хаусдорфа для образов измеримых множеств с учетом специфики их структуры.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.512

Ключевые слова: субриманова квазиметрика, измеримое множество, липшицево отображение, группа Карно, сублоренцева структура, мера Хаусдорфа, формула площади.

Тематика данного исследования — геометрическая теория меры на сублоренцевых структурах. Такие структуры являются неголономным обобщением геометрии Минковского [1]. Исследования как самих структур, так и их приложений в физике [2, 3] начались относительно недавно. Статья [4] является одной из первых работ, в которых исследовались подобные структуры. Для дальнейшего ознакомления с современными результатами, установленными для сублоренцевых структур и их обобщений (например, на случай многомерной временно́й координаты), см., например, [5] и список цитируемых источников.

Настоящая статья распространяет результаты работы [5] о формуле площади образов открытых множеств групп Карно при липшицевых в субримановом смысле отображениях на классы измеримых множеств (см. также более частные случаи в [6, 7]). Напомним, что, в отличие от классического случая отображений евклидовых пространств, о продолжениях на открытые множества липшицевых отображений подмножеств субримановых структур, принимающих значения на другой субримановой структуре, известно только в некоторых частных случаях (см., например, [8]). Кроме того, в силу специфики сублоренцевых шаров, которые не являются ограниченными множествами, определение аналога меры Хаусдорфа для образов множеств, не являющихся открытыми, требует новый подход, отличный от примененного в [5] и других работах для образов открытых множеств. По этим причинам вывод результата требует создание нового подхода как к определению меры образов, так и к способу доказательства основного результата.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0006).

В разд. 1 приведены все необходимые определения и установленные ранее факты, в разд. 2 содержится напоминание определения сублоренцевой меры Хаусдорфа для билипшицевых образов открытых множеств и исследуются некоторые тонкие свойства структуры субриманова дифференциала. В разд. 3 введено новое определение меры Хаусдорфа для случая измеримых множеств, прокомментирована специфика и установлена корректность. Разд. 4 содержит основные результаты о формуле площади.

1. Группы Карно и липшицевы отображения

Определение 1.1 (см., например, [9]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < M,\ [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x.

Определение 1.2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_{\dim V_1} & \text{— базис } V_1, \\ X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_{k-1} + 1}, \dots, X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_k} & \text{— базис } V_k,\ 1 < k \leq M. \end{cases}$$

Здесь символ $\dim V_k$ означает размерность V_k (в каждой точке x). Если $X_j \in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Если

$$x = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(\mathbf{0}), \quad y = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} z_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

где $z_j = x_j + y_j$ для $\deg X_j = 1$,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu > 0, \beta > 0, \\ |\mu + \beta|_h = \deg X_j}} F^j_{\mu,\beta} x^\mu y^\beta$$

при $\deg X_j > 1$, и для каждого N-мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \deg X_i$.

Здесь умножение $x \cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет до точки x вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j$ с началом в x. Таким образом, интегральная линия поля $\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\Bigr)(x)$.

Определение 1.3. Константы $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

Замечание 1.4. Так как на группе Карно по определению верно

$$[X_i, X_j] = \sum_{k:\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k,$$

где все $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ постоянны, а при вычислении координат $\{z_j\}_{j=1}^N$ используется формула Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа, то константы $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ всегда определяются однозначно.

Определение 1.5. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots , v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots , v_N) = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^{N} v_i X_i\Biggr)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots , v_N)$.

В качестве расстояния будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную известной метрике Карно — Каратеодори на группах Карно.

Определение 1.6. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно и $w = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\Bigr)(v)$. Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max\Biggl\{\Bigl(\sum_{j:\deg X_j=1} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}, \Bigl(\sum_{j:\deg X_j=2} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2\cdot 2}}, \dots , \Bigl(\sum_{j:\deg X_j=M} w_j^2\Bigr)^{\frac{1}{2\cdot M}}\Biggr\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно* d_2 *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности, и для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника. Кроме того, d_2 является субримановым обобщением евклидовой метрики.

Отметим, что часто в исследованиях на неголономных структурах используют метрику Карно — Каратеодори (см., например, [10]), описываемую ниже.

Определение 1.7. Абсолютно непрерывная кривая называется *горизонтальной*, если в почти каждой точке x ее касательный вектор принадлежит $V_1(x)$.

Определение 1.8. Значение *метрики Карно — Каратеодори* между точками равно точной нижней грани длин горизонтальных кривых, соединяющих эти точки.

Недостаток метрики Карно — Каратеодори состоит в том, что структура шаров в этой метрике в настоящее время известна только в нескольких частных случаях.

Свойство 1.9. *Образ шара* $\mathrm{Box}_2(v,r)$ *при отображении* θ_v^{-1} *— декартово произведение* M *(евклидовых) шаров, диаметры которых равны* $2r, 2r^2, \dots, 2r^M$.

Определение 1.10. Определим функцию множества $\mathscr{H}^\nu$ для $A \subset \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\mathscr{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_i, r_i) \supset A,\ y_i \in A,\ r_i < \delta \Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Здесь и далее символ ω_l обозначает объем евклидова шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^l$.

Замечание 1.11. Определение 1.10 отличается от классического тем, что центры шаров покрытия берутся на самом множестве. Однако для исследуемых в статье множеств такое отличие не является принципиальным в силу абсолютной непрерывности по мере $\mathscr{H}^N$ (см. ниже свойство 1.12).

Из [5, разд. 1] следует

Свойство 1.12. *Функция множества* $\mathscr{H}^\nu$ *является мерой (в частности, она обладает свойством счетной аддитивности на* σ*-алгебре борелевских множеств). Кроме того, меры* $\mathscr{H}^\nu$ *и* $\mathscr{H}^N$*, где мера Хаусдорфа* $\mathscr{H}^N$ *построена по метрике вида* $\sqrt{\langle\cdot, g\cdot\rangle}$*, определяемой римановым тензором* g *на* $\mathbb{G}$*, абсолютно непрерывны одна относительно другой и удовлетворяют условию удвоения. Производная* $\mathscr{H}^N$ *по* $\mathscr{H}^\nu$ *в точке* $x \in \mathbb{G}$ *равна* $\sqrt{\det(g(x))}$.

Замечание 1.13. То, что $\mathscr{H}^\nu$ является мерой, можно доказать из абсолютной непрерывности $\mathscr{H}^\nu$ относительно $\mathscr{H}^N$ и квазиаддитивности $\mathscr{H}^\nu$ (см. определение 3.16). Абсолютная непрерывность устанавливается стандартно, а квазиаддитивность — по той же схеме, что в теореме 3.17, с очевидными изменениями.

Определение 1.14. Функция множества $\mathscr{H}^\nu$ называется *субримановой мерой.*

Свойство 1.15. *С помощью свойства* 1.9 *непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы* $\mathbb{G}$ *относительно* d_2 *равна*

$$\nu = \sum_{j=1}^{M} j \dim V_j.$$

Рассмотрим еще одну группу Карно $\widetilde{\mathbb{G}}$ с алгеброй Ли $\widetilde{V} = \bigoplus\limits_{k=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{V}_k$ и базисными полями $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}$. Квазиметрику, построенную на $\widetilde{\mathbb{G}}$ так же, как описано в определении 1.6, обозначим символом $\widetilde{d}_2$, а отображение нормальных координат относительно произвольного элемента $x \in \widetilde{\mathbb{G}}$ — символом $\widetilde{\theta}_x$.

Приведем определение субриманова аналога дифференцируемости для рассматриваемого случая и некоторые важные результаты. Прежде всего, напомним определение горизонтального гомоморфизма в виде, в котором нам потребуется это понятие.

Определение 1.16. Отображение $\mathscr{L} : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ групп Карно называется *горизонтальным гомоморфизмом*, если оно сохраняет групповую операцию и переводит любую горизонтальную кривую в горизонтальную.

Напомним определение субриманова аналога дифференцируемости.

Определение 1.17 ([10], см. также [11]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } \Omega \ni y \to x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathscr{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Определение 1.18. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Если φ липшицево относительно квазиметрик d_2 и $\widetilde{d}_2$, то будем говорить, что φ *липшицево во внутреннем смысле*.

Обозначение 1.19. Для матрицы размера $\widetilde{N} \times N$ здесь и далее под «диагональными» блоками понимаются блоки, состоящие из элементов, номер строки которых соответствует полям из $\widetilde{V}_k$, а номер столбца — полям из V_k, $k = 1, \dots, M$. Таким образом, размер этих блоков равен $\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k$.

Следующий результат установлен в [10] для открытых множеств и С. К. Водопьяновым [12] (см. также, например, [11], где этот результат доказан для более общего случая пространств Карно — Каратеодори) для измеримых множеств.

Теорема 1.20. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество и $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда оно hc-дифференцируемо почти всюду. Кроме того, матрица гомоморфизма $\widehat{D}\varphi$ (построенная в базисах $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$) состоит из «диагональных» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоков, а остальные элементы нулевые.*

Обозначение 1.21. Обозначим «диагональные» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоки, из которых составлена матрица $\widehat{D}\varphi$, символами $\widehat{D}_k\varphi$ (или, чтобы не перегружать текст, $\widehat{D}_k$), $k = 1, \dots, M$.

Из теоремы Егорова следует

Свойство 1.22. *В условиях теоремы* 1.20 *для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое множество Σ, что $\mathscr{H}^\nu(\Sigma) < \varepsilon$, и на $D \setminus \Sigma$ отображение φ непрерывно hc-дифференцируемо всюду (см., например,* [10]*).*

2. Сублоренцева структура и свойства субриманова дифференциала

Здесь и далее в статье будем предполагать, что для $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ справедливо $\widetilde{M} \geq M$ и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$. Тогда и топологическая размерность $\widetilde{N}$ группы $\widetilde{\mathbb{G}}$ строго больше, чем N.

Опишем сублоренцеву структуру на $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Обозначение 2.1. Для каждого $k = 1, \dots, M$ выберем целые числа $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$.

Кроме того, положим $\widetilde{n}_0 = 0$ и $\widetilde{n}_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \dim \widetilde{V}_l$ для $k = 1, \dots, \widetilde{M}$.

Определение 2.2. Пусть $w = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{N}} w_i \widetilde{X}_i\Big)(v)$, $v, w \in \widetilde{\mathbb{G}}$. Положим величину $\mathfrak{d}_2^2(v,w)$ равной

$$\max_{k=1,\dots,\widetilde{M}} \left\{ \left| \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-+1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-} w_j^2 \right|^{1/k} \times \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-+1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-} w_j^2 \right) \right\}.$$

Множество $\{w \in \widetilde{\mathbb{G}} : \mathfrak{d}_2^2(v,w) < r^2\}$ называется *шаром относительно* $\mathfrak{d}_2^2$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(v,r)$.

Для исследования метрических свойств лежащих в $\widetilde{\mathbb{G}}$ поверхностей достаточно рассматривать приведенный выше аналог квадрата расстояния $\mathfrak{d}_2^2$ без перехода к корням из участвующих в определении величин. Опишем сначала меру на классах лежащих в $\widetilde{\mathbb{G}}$ поверхностей, построенную с помощью такой системы шаров.

В [5] мера на образе $B \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ открытого множества из $\mathbb{G}$ определяется как

$$\omega_{\mathfrak{d}} \cdot \lim_{\delta\to 0} \inf \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\mu} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B) \supset B,\ x_i \in B,\ r_i < \delta \Big\}, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества B, $\omega_{\mathfrak{d}}$ — заранее выбранный нормировочный коэффициент, а символ $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B$ означает компоненту связности множества $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap B$, содержащую точку x_i.

В [5] рассмотрен случай $\mu = \nu$ и $\omega_{\mathfrak{d}} = \prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k}$. В настоящей статье будем работать с этими же значениями.

Замечание 2.3. Требование использовать пересечение $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B$ вместо $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap B$ связано со спецификой структуры, а именно с неограниченностью шаров (см. подробности и комментарии в [6, 13]).

Если B — образ открытого множества из $\mathbb{G}$, полученный при горизонтальном гомоморфизме L, удовлетворяющем условиям [5, теорема 2.4], то определенная таким способом функция множества (1) является мерой [5].

Перейдем к нашему случаю, когда рассматривается образ измеримого множества при липшицевом во внутреннем смысле отображении. Предположим дополнительно, что это отображение непрерывно hc-дифференцируемо в топологии области определения (пример выполнения таких условий приведен в свойстве 1.22).

Так как образ отображения в общем случае не является открытым, то рассмотрение компоненты связности не имеет смысла. Поэтому компоненту связности будем заменять другим объектом, являющимся образом подмножества некоторого открытого множества. Для определения новой функции множества и доказательства его корректности опишем класс исследуемых отображений φ и выведем основные свойства его субриманова дифференциала.

Обозначение 2.4. В каждом «диагональном» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоке $\widehat{D}_k$ субриманова дифференциала $\widehat{D}\varphi$ (см. обозначение 1.21) часть, состоящую из первых $\dim V_k^-$ строк, обозначим через $\widehat{D}_k^-$, а оставшуюся — символом $\widehat{D}_k^+$, $k = 1, \dots, M$.

Прежде чем сформулировать требования на класс рассматриваемых отображений, приведем некоторые наблюдения. Для точек, в которых ранг субриманова дифференциала максимален, свойства блоков описаны подробно в [5, теоремы 2.1, 3.3, замечание 3.4].

Обозначение 2.5. Положим

$$D_0 = \{y \in D : \operatorname{rank} \widehat{D}\varphi(y) < N\}.$$

Рассмотрим точку $y \in D_0$, в которой ранг $\widehat{D}\varphi$ не максимален, т. е. не превосходит $N-1$. Тогда ранг r_k по крайней мере одного из блоков $\widehat{D}_k$ строго меньше, чем $\dim V_k$. Так как $\widehat{D}\varphi$ — горизонтальный гомоморфизм, то если ранг $\widehat{D}\varphi$ не максимален, то и ранг $\widehat{D}_1$ строго меньше, чем $\dim V_1$. Фиксируем такое k и рассмотрим соответствующий блок $\widehat{D}_k$. Необходимое условие того, что пересечение $\operatorname{Im} \widehat{D}\varphi$ и

$$\bigl\{w \in \widetilde{\mathbb{G}} : \mathfrak{d}_2^2(x, w) \leq 0\bigr\} \tag{2}$$

состоит из одной точки, это максимально возможный ранг $\widehat{D}_k^+$, т. е. равный r_k. Аналогичное утверждение справедливо и для всех остальных блоков с номерами от 1 до M. Устанавливается это рассуждениями, примененными в [6, теорема 9]. Таким образом, имеет смысл рассматривать отображения φ, для субримановых дифференциалов которых выполняется данное условие.

Далее, для $\widehat{D}_k^+$ существует ортогональное преобразование O_k такое, что строки $\widehat{D}_k^+ O_k$ лежат в $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$.

Замечание 2.6. Если $r_k = 0$, то из приведенных выше рассуждений следует, что весь блок $\widehat{D}_k$ нулевой, т. е. образ всех полей степени k будет состоять из единственной точки.

Обозначение 2.7. Если ранг $\widehat{D}_k$ равен $r_k < \dim V_k$, $r_k > 0$, T_k — матрица, составленная из строк $\widehat{D}_k$, а O_k — ортогональное преобразование, переводящее строки $\widehat{D}_k$ в пространство $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$, то символ $[T_k O_k]$ обозначает часть матрицы $T_k O_k$, состоящую из ее первых r_k столбцов.

Предположим, что в $[\widehat{D}_k^+ O_k]$ существуют r_k линейно независимых строк, составленная из которых (квадратная) матрица $\widehat{L}_{r_k}^+$ такова, что длины столбцов $[\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{r_k} - c$ всюду для некоторого $c > 0$.

Теорема 2.8. *Фиксируем такое k, для которого ранг $\widehat{D}_k^+$ равен $r_k < \dim V_k$, $r_k > 0$, и ортогональное отображение O_k, переводящее строки $\widehat{D}_k$ в пространство $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$.*

Пусть для r_k линейно независимых строк $[\widehat{D}_k^+ O_k]$ с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$, из которых составлена матрица $\widehat{L}_{r_k}^+$, выполнено свойство, что длины столбцов $[\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{r_k} - c$. Тогда выполнение этого свойства для матрицы, составленной из строк с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$, не зависит от выбора преобразования O_k.

Кроме того, если матрица $\widehat{L}_{r_k}^+$ существует для некоторого набора строк и некоторого O_k, то для сохранения оценки на длины столбцов ни одну из строк $\widehat{L}_{r_k}^+$ нельзя заменить строкой из $[\widehat{D}_k^- O_k]$.

Замечание 2.9. В [5, теорема 2.1] допущена неточность: а именно, там сказано о единственности матрицы $\widehat{L}_k^+$. Единственность есть, если $\dim \widetilde{V}_k^- =$

$\dim \widetilde{V}_k - \dim V_k$. Если же $\dim \widetilde{V}_k^- < \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k$, то выбор $\widehat{L}_k^+$ может не быть единственным. Принципиально важным свойством является то, что ни одну строку из $\widehat{L}_k^+$ нельзя заменить строкой $[\widehat{D}_k^- O_k]$ (иначе оценка на длины столбцов не будет выполняться). Это следует из рассуждений, приведенных в цитируемых утверждениях из [14], на которые идет ссылка в [5, теорема 2.1]. Также, так как $\widehat{L}_k^+$ не фигурирует в формулировках основных утверждений о формуле площади, эта неточность в рассуждениях не влияет на правильность доказательства и корректность установленных формул.

Доказательство теоремы 2.8. Установим первое свойство об оценке длин столбцов; для этого проанализируем свойства O_k. По определению $\widehat{L}_{r_k}^+$ справедливо соотношение

$$\widehat{L}_{r_k}^+ = [\widetilde{L}_{r_k}^+ O_k],$$

где матрица $\widetilde{L}_{r_k}^+$ размера $r_k \times \dim V_k$ составлена из линейно независимых строк $\widehat{D}_k^+$ с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$. По выбору O_k имеем

$$\widetilde{L}_{r_k}^+ O_{\dim V_k \times (\dim V_k - r_k)} = 0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)}.$$

Здесь матрица $O_{\dim V_k \times (\dim V_k - r_k)}$ составлена из последних $\dim V_k - r_k$ столбцов O_k, а $0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)}$ — нуль-матрица размера $r_k \times (\dim V_k - r_k)$. Таким образом, последние $\dim V_k - r_k$ столбцов O_k ортогональны всем r_k строкам $\widetilde{L}_{r_k}$.

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$\mathbb{L}_k = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_{r_k}^+ \\ (O_{\dim V_k \times (\dim V_k - r_k)})^T \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbb{L}_k O_k = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{r_k}^+ & 0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)} \\ 0_{(\dim V_k - r_k) \times r_k} & E_{\dim V_k - r_k} \end{pmatrix},$$

где $E_{\dim V_k - r_k}$ — единичная матрица размера $\dim V_k - r_k$. Следовательно,

$$(\mathbb{L}_k O_k)^{-1} = O_k^T \mathbb{L}_k^{-1} = \begin{pmatrix} \big(\widehat{L}_{r_k}^+\big)^{-1} & 0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)} \\ 0_{(\dim V_k - r_k) \times r_k} & E_{\dim V_k - r_k} \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned}\widehat{D}_k^- \mathbb{L}_k^{-1} = \widehat{D}_k^- O_k O_k^T \mathbb{L}_k^{-1} = \widehat{D}_k^- O_k (\mathbb{L}_k O_k)^{-1} \\ = \big([\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1} \quad 0_{\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)}\big),\end{aligned}$$

где $0_{\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)}$ — нуль-матрица размера $\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)$.

Так как комбинация ортогональных преобразований также ортогональна, для доказательства независимости длин столбцов будем рассматривать преобразования матрицы $\widetilde{L}_{r_k}^+ O_k$. Пусть $\widehat{O}_k$ — новое ортогональное преобразование блока $\widehat{D}_k$. Тогда справедливо

$$(\mathbb{L}_k O_k \widehat{O}_k)^{-1} = \widehat{O}_k^T (\mathbb{L}_k O_k)^{-1}$$

и

$$\begin{aligned}\widehat{D}_k^- O_k \widehat{O}_k \big(\mathbb{L}_k O_k \widehat{O}_k\big)^{-1} = \widehat{D}_k^- O_k \widehat{O}_k \widehat{O}_k^T O_k^T \mathbb{L}_k^{-1} \\ = \widehat{D}_k^- \mathbb{L}_k^{-1} \big([\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1} \quad 0_{\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)}\big).\end{aligned}$$

Таким образом, длины столбцов $[\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1}$ не зависят от ортогонального преобразования.

Чтобы показать, что для сохранения оценки на длины столбцов ни одну из строк $\widehat{L}_{r_k}^+$ нельзя заменить строкой из $[\widehat{D}_k^- O_k]$, достаточно применить рассуждения из леммы 2.12 в [14], транспонировав $\widehat{L}_{r_k}^+$ и $[\widehat{D}_k^- O_k]$ и рассмотрев в качестве вспомогательной матрицу

$$\begin{pmatrix} [\widehat{D}_k^- O_k]^T & (\widehat{L}_{r_k}^+)^T \end{pmatrix}$$

(см. также [6, теорема 2.1]). Теорема доказана.

Предположение 2.10. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\widetilde{M} \geq M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, и $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$, $k = 1, \dots, M$.*

Пусть еще

(1) *$D \subset \mathbb{G}$ — такое измеримое множество, что прообраз $\varphi^{-1}(\varphi(D_0))$ компактен;*

(2) *$\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение, которое непрерывно hc-дифференцируемо всюду в топологии области определения;*

(3) *в точках, где ранг $\widehat{D}\varphi$ максимален, в каждом $\widehat{D}_k^+$ найдутся $\dim V_k$ строк, составленная из которых (квадратная) матрица $\widehat{L}_k^+$ такова, что длины столбцов $\widehat{D}_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{\dim V_k} - c$ для некоторого $c > 0$ на всем множестве $D \setminus D_0$, где $c > 0$ не зависит от $y \in D \setminus D_0$, $k = 1, \dots, M$;*

(4) *на множестве $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ;*

(5) *если ранг $\widehat{D}\varphi$ в некоторой точке не является максимальным, то ранг $\widehat{D}_k^+$ равен рангу $r_k \leq \dim V_k$ блока $\widehat{D}_k$; кроме того, в $\widehat{D}_k^+$ существует по крайней мере один набор линейно независимых строк с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$ такой, что блок $\widehat{L}_{r_k}^+$, полученный поворотом этих строк преобразованием O_k в пространство $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$, обладает теми же свойствами, что блок $\widehat{L}_k^+$ из п. 3, с заменой $\widehat{D}_k^-$ на $[\widehat{D}_k^- O_k]$ и $\frac{1}{\dim V_k} - c$ на $\frac{1}{r_k} - c$, $k = 1, \dots, M$ (см. теорему 2.8).*

Замечание 2.11. П. 1 предположения 2.10 выполняется для всех компактных множеств.

Замечание 2.12. Построить простейшие примеры отображений, описанных в предположении 2.10, можно следующим образом. Рассмотрим невырожденный горизонтальный гомоморфизм групп Карно $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$, где $\widetilde{M} \geq M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, и $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$, $k = 1, \dots, M$. При необходимости базисные поля в образе можно масштабировать (т. е. умножить на константы), чтобы длины столбцов $\widehat{D}_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}$ не превосходили $\frac{1}{\dim V_k} - c$ для некоторого $c > 0$. При таких преобразованиях структура группы Карно сохранится, изменятся только структурные константы.

Для образа каждого из отображений

$$w \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w \rangle,$$

$y \in D$, справедливо приведенное ниже утверждение.

Теорема 2.13 [5]. *Фиксируем $y \in D$ и $x = \varphi(y)$. Тогда при выполнении условий предположения* 2.10 *верны следующие свойства.*

1. *Пересечение множества* (2) *с* $\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y)$ *будет состоять из единственной точки x.*
2. *Пересечение шара* $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r)$ *с множеством* $\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y)$ *будет ограниченным.*
3. *На* $\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y)$ *(для каждого фиксированного y) значения* $(\widetilde{d}_2)^2$ *и* $\mathfrak{d}_2^2$ *локально билипшицево эквивалентны.*

Замечание 2.14. В п. 3 формулировки теоремы 2.13 говорится о том, что если зафиксировать точку $y \in D$ и рассмотреть горизонтальный гомоморфизм $L = \widehat{D}\varphi(y)$, то на $\operatorname{Im} L$ значения $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ будут локально билипшицево эквивалентны.

Подчеркнем, что утверждения теоремы 2.13 справедливы и для точек $y \in D_0$, в которых ранг $\widehat{D}\varphi(y)$ не является максимальным. Это следует из тех же аргументов, что применены при доказательстве [5, теорема 2.1].

3. Меры на образе

Цель данного раздела — показать, что для отображений, удовлетворяющих условиям предположения 2.10, функция множества из данного ниже нового определения 3.10 является мерой.

Прежде чем вводить новую функцию множества, приведем некоторые наблюдения и опишем свойства отображения φ и его hc-дифференциала.

Обозначение 3.1. Пусть $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ является hc-дифференцируемым всюду и на $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ.

Фиксируем $y \in D$ и $\varepsilon > 0$, тогда существует такое $\delta_y(\varepsilon) > 0$, что если $y, w \in D$ и $d_2(y, w) < \delta_y(\varepsilon)$, то

$$\widetilde{d}_2(\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle, \varphi(w)) < \varepsilon d_2(y, w).$$

Для каждого $x = \varphi(y)$, $y \in D \setminus D_0$, $x \notin \varphi(D_0)$, и $\varepsilon > 0$ символом $r_{x,\varepsilon}$ обозначим

$$\sup\{r > 0 : \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y)\rangle \subset \mathrm{Box}_2(y, \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\})\}.$$

Также для $y = \varphi^{-1}(x)$, где $y \in D \setminus D_0$ и $\varphi(y) \notin \varphi(D_0)$, положим $\overline{r}_{y,\varepsilon} = r_{x,\varepsilon}$. Если же $y \in D_0$ или $\varphi(y) \in \varphi(D_0)$, то символ $\overline{r}_{y,\varepsilon}$ равен значению

$$\sup\{r > 0 : \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y)\rangle \cap (\ker\widehat{D}\varphi(y))^{\perp} \subset \mathrm{Box}_2(y, \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\})\}$$

(если $y \notin D_0$ и $\varphi(y) \in \varphi(D_0)$, то $\big(\ker\widehat{D}\varphi(y)\big)^{\perp} = \mathbb{G}$), где $x = \varphi(y)$. Положим $r_{x,\varepsilon} = \sup\limits_{y:\varphi(y)=x}\{\overline{r}_{y,\varepsilon}\}$.

Обозначение 3.2. Для точки y, где $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$, и значений $\varepsilon > 0$ и $r \leq \overline{r}_{y,\varepsilon}$, $r > 0$, определим величину $\widehat{r}_{r,y,\varepsilon}$, равную

$$\inf\{\widehat{r} > 0 : \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(y)\rangle \cap (\ker\widehat{D}\varphi(y))^{\perp} \subset \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r})\}.$$

Напомним, что если $y \notin D_0$, то $(\ker\widehat{D}\varphi(y))^{\perp} = \mathbb{G}$.

Если же $\widehat{D}\varphi(y) = 0$, то положим

$$\widehat{r}_{r,y,\varepsilon} = \min\left\{\max\left\{1, \frac{1}{\mathrm{Lip}(\varphi)}\right\} r, \delta_y(\varepsilon), \varepsilon\right\}.$$

Свойство 3.3. *Из определения величины* $\widehat{r}_{r,y,\varepsilon}$ *следует, что*

$$\widehat{r}_{r,y,\varepsilon} \leq \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\}.$$

Свойство 3.4. *Пусть* $K \geq \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$.
Тогда если $0 < r < \min\{\varepsilon, \overline{r}_{y,\varepsilon}/K\}$ *и* $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$, *то* $r \leq \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}$.
Если $0 < r < \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\}$ *и* $\widehat{D}\varphi(y) = 0$, *то* $r \leq \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}$.

Доказательство. Для случая $\widehat{D}\varphi(y) = 0$ утверждение очевидно.
Пусть $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{Box}_2(y,r) \cap \big(\ker \widehat{D}\varphi(y)\big)^{\perp} = \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \widehat{D}\varphi(y)\langle \mathrm{Box}_2(\varphi(y),r)\rangle\rangle \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp},$$

а в силу особенностей структуры $\ker \widehat{D}\varphi$ (см. теорему 1.20 и, например, [11]) и определения 1.6 квазиметрики d_2 имеем

$$\inf\{t : \mathrm{Box}_2(y,t) \supset \mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}\} = r.$$

Так как

$$\begin{aligned}\widehat{D}\varphi(y)\langle \mathrm{Box}_2(y,r)\rangle &= \widehat{D}\varphi(y)\langle \mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}\rangle \\ &\subset \mathrm{Box}_2(\varphi(y),Kr) \cap \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y) \subset \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(\varphi(y),Kr) \cap^x \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y)\end{aligned}$$

для $K \geq \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$, то $\mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}$ является подмножеством

$$\widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(\varphi(y),Kr) \cap^x \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y)\rangle \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}.$$

В силу того, что $K \cdot r < \overline{r}_{y,\varepsilon}$, и, следовательно, это пересечение по определению лежит в $\mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon})$ или совпадает с ним, причем $\mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon})$ можно заменить на

$$\mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp},$$

то

$$\mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp} \subset \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp},$$

и свойство доказано.

Замечание 3.5. В силу билипшицевости $\widehat{D}\varphi(y)$ на $(\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}$ и п. 3 теоремы 2.13 верно $T_1(y)r \leq \widehat{r} \leq T_2(y)r$, $0 < T_1 \leq T_2 < \infty$. Исключением является случай, когда $\widehat{D}\varphi(y)$ — нулевой оператор.

Свойство 3.6. *В силу п.* 2 *теоремы* 2.13 *значения* $r_{x,\varepsilon}$, $\overline{r}_{y,\varepsilon}$ *положительны для всех* $\varepsilon > 0$, $x \in \varphi(D)$, $y \in D$. *Это свойство следует из ограниченности пересечений образов субримановых дифференциалов* $\mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y)$ *с шарами* $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r)$, $y \in D$, $x = \varphi(y)$.

Обозначение 3.7. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество. Предположим, что отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ является hc-дифференцируемым и на $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ.

Фиксируем $x \in \varphi(D)$ и рассмотрим $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r) \cap^x \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y)$, $r > 0$.

Пусть π_x — проекция

$$\varphi(w) \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle,$$

где $\varphi(y) = x$. Для $x \in \varphi(D)$, $\varepsilon > 0$ и $r < r_{x,\varepsilon}$ обозначим символом $\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x, r)$ множество

$$\begin{cases} \pi_x^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y)), \text{ если } \operatorname{rank} \widehat{D}\varphi(y) = N \text{ и } x \notin \varphi(D_0), \\ \bigcup\limits_{y:\varphi(y)=x} \pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, \min\{r, \overline{r}_{y,\varepsilon}\}) \cap^x \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y)), \\ \qquad\qquad \text{если } \operatorname{rank} \widehat{D}\varphi(y) < N \text{ и } x \notin \varphi(D \setminus D_0), \\ \mathscr{A}, \text{ если } x \in \varphi(D \setminus D_0) \cap \varphi(D_0), \end{cases} \tag{3}$$

где $\pi_{r,y,\varepsilon}$ — отображение

$$\begin{cases} \varphi(w) \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle, \text{ если } w \in \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{\rho,y,\varepsilon}), \ \rho = \min\{r, \overline{r}_{y,\varepsilon}\}, \text{ и } \widehat{D}\varphi(y) \neq 0, \\ \varphi(w) \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle, \text{ если } w \in \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{r,y,\varepsilon}) \text{ и } \widehat{D}\varphi(y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$\mathscr{A}$ — объединение множеств

$$\pi_x^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y_x)),$$

где элементу x соответствует $y_x \notin D_0$, $\varphi(y_x) = x$, и

$$\bigcup_{y \in D_0:\varphi(y)=x} \pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, \min\{r, \overline{r}_{y,\varepsilon}\}) \cap^x \mathrm{Im}\, \widehat{D}\varphi(y)).$$

Заметим, что $\pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}$ в общем случае не является отображением, так как одному значению $\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle$ может соответствовать более одного элемента w' такого, что $\widehat{D}\varphi(y)\langle w'\rangle = \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle$ и $\varphi(w') \neq \varphi(w)$.

Замечание 3.8. Из (4) следует, что при $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$ если $\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle = \widehat{D}\varphi(y)\langle w'\rangle$, где $w \in \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{\rho,y,\varepsilon})$, а $w' \notin \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{\rho,y,\varepsilon})$, то прообраз $\pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle)$ точку $\varphi(w)$ содержит, но точку $\varphi(w')$ содержать не будет.

Аналогичное утверждение верно и для случая $\widehat{D}\varphi(y) = 0$.

Замечание 3.9. Использование $\pi_{r,y,\varepsilon}$ вместо π_x обусловлено необходимостью ограниченности пересечений $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap \varphi(D_0)$ и их прообразов.

Определение 3.10. Пусть $A \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ — подмножество образа измеримого множества $D \subset \mathbb{G}$, полученного при липшицевом во внутреннем смысле отображении φ, которое hc-дифференцируемо всюду на области определения. Предположим, что на $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ. Определим функцию множества $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ следующим образом:

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset A, \ x_i \in A,$$
$$r_i < \min\{\varepsilon, r_{x_i,\varepsilon}\}, \delta_i = \varepsilon \text{ при } \varphi^{-1}(x_i) \cap D_0 \neq \varnothing \text{ и } \delta_i = 1 \text{ при } x_i \notin \varphi(D_0) \Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A вида $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset A$.

Заметим, что функции множества, описываемые в определениях 1.10 и 3.10, зависят от наборов векторных полей из определений 1.6 и 2.2 функций расстояния и аналога квадрата расстояния.

Для дальнейшего доказательства формулы площади необходимо установить, что функция множества из определения 3.10 является мерой для исследуемого класса отображений. Для этого докажем следующие свойства.

1. Абсолютная непрерывность функции множества Φ, равной
$$\mathbb{G} \supset A \mapsto \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(A)), \tag{5}$$
относительно $\mathscr{H}^\nu$ на $\mathbb{G}$.
2. Квазиаддитивность (см. определение 3.16) на открытых шарах функции (5). Промежуточный шаг — оценка сверху значения $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(A))$ через $\mathscr{H}^\nu(A)$.
3. Вычисление в явном виде производной функции множества (5) по мере $\mathscr{H}^\nu$ на $\mathbb{G}$.

Отсюда и из предыдущих пунктов будет следовать

4. Восстановление $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}$ по производной, а также ее счетная аддитивность. В частности, выведем формулу площади.

Замечание 3.11. Фактически приведенная выше схема повторяет схему [5, разд. 1]. Однако доказательство квазиаддитивности функции множества (5) из аддитивности на удаленных шарах не настолько очевидна, как для $\mathscr{H}^\nu$.

Установим первое свойство.

Теорема 3.12. *Функция множества* (5) *абсолютно непрерывна относительно* $\mathscr{H}^\nu$ *на* $\mathbb{G}$.

Доказательство. Пусть $\Sigma \subset D$ имеет $\mathscr{H}^\nu$-меру нуль. Покажем, что для произвольного $\widehat{\varepsilon} > 0$ будет выполняться
$$\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\Sigma)) < \widehat{\varepsilon}.$$
Схема доказательства состоит из двух шагов. На первом строится покрытие субримановыми шарами множества Σ, структура которого согласуется с определением $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}$ в образе, такое, что сумма мер шаров достаточно мала, а на втором доказывается, что сумма мер образов этих шаров также будет мала.

Шаг 1. Фиксируем произвольные $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon > 0$ и рассмотрим покрытие множества Σ шарами $\{\mathrm{Box}_2(y_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ такое, что
$$r_i < \min\{\varepsilon, \delta_{y_i}(\varepsilon), \overline{r}_{y_i,\varepsilon}\}/K, \quad i \in \mathbb{N},$$
и сумма их $\mathscr{H}^\nu$-мер не превосходит $\widehat{\varepsilon}/K^\nu > 0$, т. е.
$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu < \frac{\widehat{\varepsilon}}{K^\nu},$$
где $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$, причем $K < \infty$ не зависит от точек Σ.

Покажем, что покрытие с такими свойствами существует. Действительно, пусть $\{\mathrm{Box}_2(t_j, r_j)\}$ — такой набор шаров, что их объединение содержит Σ, и сумма их $\mathscr{H}^\nu$-мер не превосходит заданного $\widetilde{\varepsilon} > 0$. В силу обобщенного неравенства треугольника можем считать, что $t_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$. Фиксируем $j \in \mathbb{N}$ и рассмотрим пересечение $\mathrm{Box}_2(t_j, r_j) \cap \Sigma$. Пусть $\widetilde{K} < \infty$. Система шаров
$$\{\mathrm{Box}_2(y, r) : y \in \Sigma,\ r < \min\{\varepsilon, \delta_y(\varepsilon), \overline{r}_{y,\varepsilon}\}/\widetilde{K},\ \mathrm{Box}_2(y, r) \subset \mathrm{Box}_2(t_j, r_j)\}$$

образует покрытие Витали множества $\mathrm{Box}_2(t_j, r_j) \cap \Sigma$. Тогда можно выбрать такую дизъюнктную систему $\{\mathrm{Box}_2(y_{j,l}, r_{j,l})\}_{l\in\mathbb{N}}$, что

$$\mathrm{Box}_2(t_j, r_j) \cap \Sigma \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_{j,l}, Lr_{j,l}), \tag{6}$$

где число $L < \infty$ зависит только от группы $\mathbb{G}$. Так как по условию

$$\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_{j,l},\, r_{j,l}) \subset \mathrm{Box}_2(t_j, r_j),$$

то сумма их $\mathscr{H}^\nu$-мер не превосходит $\prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} r_j^\nu$. Тогда и сумма $\mathscr{H}^\nu$-мер всех шаров $\{\mathrm{Box}_2(y_{j,l}, Lr_{j,l})\}_{l\in\mathbb{N}}$ будет не более чем $L^\nu \prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} r_j^\nu$. Повторяя эту процедуру для всех $j \in \mathbb{N}$ и полагая $\widetilde{K} = LK$ и $\widetilde{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}/(KL)^\nu$, получим искомое покрытие

$$\{\mathrm{Box}_2(y_{j,l}, Lr_{j,l}),\ y_{j,l} \in \Sigma,\ r_{j,l} < \min\{\varepsilon, \delta_{y_{j,l}}(\varepsilon), \overline{r}_{y_{j,l},\varepsilon}\}/(KL)\}_{j,l\in\mathbb{N}}$$

множества Σ, где сумма мер шаров покрытия не превосходит $\widehat{\varepsilon}/K^\nu$.

Для упрощения обозначений будем использовать символ $\{\mathrm{Box}_2(y_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ для построенного покрытия.

Шаг 2. Перейдем в группу $\widetilde{\mathbb{G}}$. Тогда

$$\widehat{D}\varphi(y_i)\langle \mathrm{Box}_2(y_i, r_i)\rangle \subset \mathrm{Box}_2(x_i, Kr_i) \cap \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_i) \subset \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_i),$$

где $x_i = \varphi(y_i)$, а $\mathfrak{d}_2^2 \le \big(\widetilde{d}_2\big)^2$, $i \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 2.13 такое пересечение ограничено, и, кроме того,

$$\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_i) = \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap^{x_i} \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_i).$$

Так как для $A = \varphi(\Sigma)$ в силу определения (3) (см. обозначение 3.7) множество $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, Kr_i)$ совпадает с

$$\pi_{x_i}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap^{x_i} \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_i))$$

или с

$$\bigcup_{y_{x_i}:\varphi(y_{x_i})=x_i} \pi_{Kr_i, y_{x_i},\varepsilon}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, \min\{Kr_i, \overline{r}_{y_{x_i},\varepsilon}\}) \cap^{x_i} \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_{x_i})),$$

или с объединением этих двух множеств, $i \in \mathbb{N}$, то

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, Kr_i)\big) \supset \varphi(\Sigma).$$

Действительно, пусть $v \in \varphi(\Sigma)$. Тогда существует $w \in \Sigma$ такое, что $\varphi(w) = v$. Кроме того, найдется шар $\mathrm{Box}_2(y_w, r_w)$ из покрытия множества Σ, содержащий точку w. Тогда если $x_w = \varphi(y_w)$, то

$$\widehat{D}\varphi(y_w)\langle \mathrm{Box}_2(y_w, r_w)\rangle \subset \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_w, Kr_w) \cap \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_w).$$

Кроме того, по выбору покрытия

$$r_w < \min\{\varepsilon, \delta_{y_w}(\varepsilon), \overline{r}_{y_w,\varepsilon}\}/K, \tag{7}$$

где $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$. Покажем, что для $v = \varphi(w)$ верно

$$v = \pi_{x_w}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle) \quad \text{или} \quad v \in \pi_{Kr_w, y_w, \varepsilon}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle);$$

отсюда будет следовать, что

$$v \in \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_w, Kr_w).$$

Если $y_w \notin D_0$, то из (7) вытекает $Kr_w < r_{x_w,\varepsilon}$, поэтому значение $\pi_{x_w}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle)$ определено корректно и оно совпадает с v (см. (3)).

Далее, для $y_w \in D_0$ выражение

$$\pi_{Kr_w, y_w, \varepsilon}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle) \tag{8}$$

также определено корректно для всех $w \in \mathrm{Box}_2(y_w, r_w)$. Действительно, пусть $\widehat{D}\varphi(y_w) \neq 0$. Тогда в силу (7) имеем $\max\{r_w, Kr_w\} < \overline{r}_{y_w,\varepsilon}$, поэтому ρ из соотношения (4), равное в нашем случае $\min\{Kr_w, \overline{r}_{y_w,\varepsilon}\}$, совпадает с Kr_w. В свою очередь, из свойства 3.4 следует $r_w \leq \widehat{r}_{K\cdot r_w, y_w, \varepsilon}$, а так как $w \in \mathrm{Box}_2(y_w, r_w)$, то и v совпадет с одним из значений (8).

Если же $\widehat{D}\varphi(y_w) = 0$, то в силу (7) выполняется $r_w < \min\{\varepsilon, \delta_{y_w}(\varepsilon)\}$ и, следовательно, $r_w \leq \widehat{r}_{K\cdot r_w, y_w, \varepsilon}$.

Таким образом, для заданных $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдено покрытие из определения 3.10 величины $\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}$ такое, что ему соответствует сумма, не превосходящая $\widehat{\varepsilon}$, выбранного произвольным образом. Тогда и точная нижняя грань сумм из определения 3.10 не будет превосходить $\widehat{\varepsilon}$, и предельное значение при $\varepsilon \to 0$ также будет оцениваться этой величиной.

Теорема доказана.

Теорема 3.13. *Значение $\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}$ корректно определено для образов измеримых множеств $E \subset D$ в том смысле, что множество покрытий из определения* 3.10 *величины $\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(E))$ непусто для любого $\varepsilon > 0$.*

Кроме того, существует такое $T = T(D) < \infty$, что

$$\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(E)) < T\mathscr{H}^{\nu}(E), \quad \text{где } T < \infty \text{ и зависит только от } \mathbb{G} \text{ и } \varphi. \tag{9}$$

Доказательство. Так как бóльшая часть рассуждений проводится по той же схеме, что и для теоремы 3.12, ограничимся описанием шагов, имеющих принципиальные отличия.

Если $\mathscr{H}^{\nu}(E) = 0$, то все доказано в теореме 3.12.

Пусть теперь $\mathscr{H}^{\nu}(E) = S > 0$. Фиксируем $\widehat{\varepsilon} > 0$ и рассмотрим такое покрытие $\{\mathrm{Box}_2(t_j, r_j)\}$ из определения $\mathscr{H}^{\nu}(E)$ множества E, что

$$\left|\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum_{i\in\mathbb{N}} r_j^{\nu} - \mathscr{H}^{\nu}(E)\right| < \widehat{\varepsilon} \cdot \mathscr{H}^{\nu}(E).$$

Повторяя аргументы первого шага доказательства теоремы 3.12, получим новое покрытие $\{\mathrm{Box}(y_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, $y_i \in E$, множества E, которому соответствует сумма

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\nu} < L^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(E)(1 + \widehat{\varepsilon}),$$

где число $L < \infty$ такое же, как в (6).

Осталось повторить рассуждения второго шага доказательства теоремы 3.12, получить набор $\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(\varphi(y_i), Kr_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, где $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$, и убедиться, что

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \supset \varphi(E).$$

Этому покрытию соответствует сумма

$$(KL)^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(E)\big(1+\widehat{\varepsilon}\big). \tag{10}$$

Окончательно выводим, что множество покрытий из определения $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ для образов измеримых множеств E непусто и значение $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(E))$ контролируется значением $\mathscr{H}^{\nu}(E)$, т. е. верно (9). Теорема доказана.

Еще один результат — утверждение о значении $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(D_0))$.

Теорема 3.14. *Имеем* $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(D_0)) = 0$.

Доказательство. Схема повторяет шаги доказательства теоремы 3.13 почти дословно. Различие состоит в том, что в соотношении, аналогичном (10), будет присутствовать множитель $\varepsilon > 0$ из соотношения $Kr_i < \min\{\varepsilon, \delta_{y_i}(\varepsilon), \overline{r}_{y_i,\varepsilon}\}$, $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$ (см. (7), а также начало доказательства теоремы 3.12 и определение 3.10).

Действительно, пусть $E = D_0$. Если $\mathscr{H}^{\nu}(D_0) = 0$, то все доказано в теореме 3.12. Если же $\mathscr{H}^{\nu}(D_0) > 0$, построим, пользуясь рассуждениями доказательства теоремы 3.13, покрытие

$$\{\mathrm{Box}_2(y_i, r_i),\ y_i \in D_0,\ r_i < \min\{\varepsilon, \delta_{y_i}(\varepsilon), \overline{r}_{y_i,\varepsilon}\}/K\}.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i)\big) \supset \varphi(D_0), \tag{11}$$

где $x_i = \varphi(y_i)$, $i \in \mathbb{N}$ (см. подробности в доказательстве второго шага теоремы 3.12). Кроме того, в силу определения 3.10 и аргументов, аналогичных выводу (10), получаем, что (11) соответствует сумма

$$\varepsilon(KL)^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(D_0)(1+\widehat{\varepsilon}),$$

где $\varepsilon, \widehat{\varepsilon} > 0$ взяты произвольным образом. Иными словами, эта сумма может быть сделана сколь угодно близкой к нулю. Теорема доказана.

Для доказательства квазиаддитивности функции множества (5) нам потребуется следующее утверждение, касающееся слагаемых r_i^{ν}, $i \in \mathbb{N}$, в определении $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$, где $i \in \mathbb{N}$ таковы, что $x_i \in \varphi(D_0)$.

Теорема 3.15. *Рассмотрим множество* $\widehat{B} \subset D$ *такое, что пересечение* $\varphi^{-1}(\varphi(D_0) \cap B)$, *где* $B = \varphi(\widehat{B})$, *замкнуто, и* $\sigma > 0$. *Пусть* $\varepsilon_0 > 0$ *таково, что для всякого* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *значение* $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(B)$, *равное*

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset B,\ x_i \in B,$$
$$r_i < \min\{\varepsilon, r_{x_i,\varepsilon}\}, \delta_i = \varepsilon \text{ при } \varphi^{-1}(x_i) \cap D_0 \neq \varnothing \text{ и } \delta_i = 1 \text{ при } x_i \notin \varphi(D_0)\Big\},$$

отличается от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(B)$ *не более чем на* $\sigma/4$. *Тогда для достаточно малых* $\xi > 0$, $\xi < \varepsilon_0$, *и покрытий*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)) \supset B, \quad r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\},$$

таких, что

$$\left|\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^{\nu} - \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\xi}(B)\right| < \sigma/4,$$

справедлива оценка

$$\xi\cdot\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\in\varphi(D_0)\cap B} r_i^{\nu} < \sigma.$$

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ — произвольное малое значение. Рассмотрим покрытие

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)) \supset B$$

из определения $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\eta}(B)$. Тогда объединение

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(D_0)\cap B}(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))$$

согласно свойству 3.3 совпадает с образом при отображении φ подмножества η-окрестности множества $\varphi^{-1}(\varphi(D_0)\cap B)\supset D_0\cap\widehat{B}$. Действительно, по определению $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\eta}$ верно $r_i < \min\{\eta, r_{x_i,\eta}\}$, и если y таково, что $\varphi(y) = x_i$, то величина ρ из соотношения (4) не превосходит $\min\{r_i, \overline{r}_{y,\eta}\}$; тогда $\widehat{r}_{\rho,y,\eta}\le\eta$.

Положим

$$\widehat{D}_0 = \varphi^{-1}(\varphi(D_0)\cap B).$$

Это множество по условию теоремы замкнуто и, следовательно, компактно.

Дальнейшая задача — рассмотреть малую величину $\xi > 0$ и заменить образ подмножества ξ-окрестности множества $\widehat{D}_0$ образом множества, содержащего ξ-окрестность $\widehat{D}_0$.

Пусть $\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}_0) > 0$. Рассмотрим его покрытие, построенное, как в доказательстве теорем 3.12 и 3.13:

$$\{\mathrm{Box}_2(y_i,\rho_i),\ y_i\in\widehat{D}_0,\ \rho_i < \min\{\eta, \delta_{y_i}(\eta), \overline{r}_{y_i,\eta}\}/K\}, \tag{12}$$

где $K \ge \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$. Из аргументов доказательств теорем 3.12 и 3.13 (где величина $\widehat{\varepsilon}$ из теоремы 3.13 взята не превосходящей единицу) следует, что

$$\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_i^{\nu} < 2L^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}_0).$$

Кроме того, так как $\widehat{D}_0$ компактно, покрытие (12) конечно. Из компактности $\widehat{D}_0$ следует, что существует $\xi_0 = \xi_0(\eta) > 0$ такое, что

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}_2(y_i,\rho_i) \tag{13}$$

содержит ξ-окрестность множества $\widehat{D}_0$ для всякого $\xi < \xi_0$.

Фиксируем
$$\eta < \min\left\{\varepsilon_0, \frac{\sigma}{8(LK)^\nu \mathscr{H}^\nu(\widehat{D}_0)}\right\}$$
и $\xi < \min\{\xi_0(\eta), \eta\}$ и рассмотрим покрытие
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset B, \quad r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\}, \tag{14}$$
из определения $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\xi}$ такое, что
$$\left|\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\xi}(B)\right| < \sigma/4. \tag{15}$$
По доказанному выше объединение
$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(D_0)} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \tag{16}$$
совпадает с образом при отображении φ подмножества ξ-окрестности множества $\widehat{D}_0$. Действительно, если $r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\}$, то величина ρ из свойства 3.3 для случая $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$ не превосходит $\min\{\xi, \overline{r}_{y,\xi}\}$, где $\varphi(y) = x_i$, и поэтому $\widehat{r}_{\rho,y,\xi} \leq \xi$. Если же $\widehat{D}\varphi(y) = 0$, то аналогично $\widehat{r}_{r_i,y,\xi} \leq \xi$. В свою очередь, ξ-окрестность множества $\widehat{D}_0$ лежит в объединении (13) в силу выбора $\xi > 0$. Следовательно,
$$\begin{aligned}\bigcup_{i:x_i\in\varphi(D_0)} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) &\subset \varphi\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_i, \rho_i)\Big) \\ &\subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varphi(\mathrm{Box}_2(y_i, \rho_i)) \subset \bigcup_{i:\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(\varphi(y_i), K\rho_i)\big)\end{aligned} \tag{17}$$
(см. аргументы второго шага доказательства теоремы 3.12). Заменим в покрытии (14) объединение (16) объединением из правой части (17). Объединению из правой части (17) соответствует сумма
$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta \cdot (K\rho_i)^\nu < \eta \cdot 2(LK)^\nu \mathscr{H}^\nu(\widehat{D}_0) < \sigma/4.$$
Так как $\xi < \eta$, то $r_{x_i,\xi} \leq r_{x_i,\eta}$, т. е. новое покрытие корректно подходит для множества сумм, приближающих $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}$. По выбору ε_0 справедливо
$$\big|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta} - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\xi}\big| < \sigma/2,$$
а из (15) вытекает
$$\left|\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}(B)\right| < 3\sigma/4.$$
Если
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu \leq \sum_{i:x_i\notin\varphi(D_0)} r_i^\nu + \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta \cdot (K\rho_i)^\nu,$$
то
$$\xi \cdot \sum_{i:x_i\in\varphi(D_0)} r_i^\nu \leq \eta \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} (K\rho_i)^\nu,$$

и теорема доказана. Пусть теперь
$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^\nu > \sum_{i:x_i\notin\varphi(D_0)} r_i^\nu + \sum_{i\in\mathbb{N}}\eta\cdot(K\rho_i)^\nu.$$
Тогда
$$\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}(B) \le \prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\notin\varphi(D_0)} r_i^\nu + \prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\eta\cdot(K\rho_i)^\nu$$
$$< \prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^\nu < \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}(B) + 3\sigma/4,$$
поэтому
$$\xi\cdot\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\in\varphi(D_0)} r_i^\nu - \eta\cdot\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}(K\rho_i)^\nu < 3\sigma/4$$
и
$$\xi\cdot\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\in\varphi(D_0)} r_i^\nu < \sigma.$$

Случай $\mathscr{H}^\nu(D_0) = 0$ рассматривается аналогично с заменой в выводимых оценках величины $\mathscr{H}^\nu(D_0)$ на некоторое $\kappa > 0$ и применением аргументов и оценок из теоремы 3.12. Теорема доказана.

Установим квазиаддитивность функции (5).

Определение 3.16 (см., например, [15, 16]). Функция множества Φ называется *квазиаддитивной*, если для любого конечного набора попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$, лежащих в некотором открытом шаре B_0, справедливо
$$\sum_{j=1}^J \Phi(B_j) \le \Phi(B_0).$$

Теорема 3.17. *Функция множества* (5) *квазиаддитивна.*

Замечание 3.18. Значение (5) на произвольном шаре B понимается как $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B\cap D))$.

Прежде чем доказывать квазиаддитивность функции (5), докажем еще одно свойство $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}$ для открытых множеств.

Лемма 3.19. *Пусть $B\subset\mathbb{G}$ — шар. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует такой вложенный замкнутый шар $\widehat{B}\subset B$, что*
$$\bigl|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\widehat{B})) - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B))\bigr| < \delta.$$

Доказательство. Прежде всего приведем наблюдения о свойствах B и $\widehat{B}\subset B$. Пусть $\widehat{\varepsilon} > 0$. Рассмотрим вложенный замкнутый шар $\widehat{B}\subset B$ такой, что
$$\mathscr{H}^\nu(B\setminus\widehat{B}) < \widehat{\varepsilon}.$$
Для множеств $\varphi(\widehat{B})$ и $\varphi(B)$ рассмотрим $\sigma > 0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma) > 0$ такие, что для всякого $\varepsilon < \varepsilon_0$ значение
$$\max\bigl\{\bigl|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B})) - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\widehat{B}))\bigr|, \bigl|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B))\bigr|\bigr\}$$

не превосходит $\sigma > 0$ (см. также формулировку теоремы 3.15, где описана величина $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}$).

Построим для $\varphi(\widehat{B})$ покрытие $\widehat{\mathscr{P}_\sigma} = \{\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i,\rho_i)\}$, соответствующая которому сумма

$$\widehat{S}(\widehat{\mathscr{P}_\sigma}) = \prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i\rho_i^{\nu}$$

отличается от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$ не более чем на $\sigma > 0$. Далее, для $\varphi(B\setminus\widehat{B})$ рассмотрим покрытие $\mathscr{P}_{B\setminus\widehat{B}}$, построенное, как в доказательстве теоремы 3.13. Ему соответствует сумма, не превосходящая $T\widehat{\varepsilon}$, $T<\infty$.

Пусть теперь $\delta > 0$. Рассмотрим такое $\widehat{B}\subset B$, что

$$T\mathscr{H}^{\nu}(B\setminus\widehat{B}) < \delta/16, \tag{18}$$

возьмем $\sigma < \delta/16$ и рассмотрим соответствующее этому значению число ε_0 и покрытие $\widehat{\mathscr{P}_\sigma}$. Тогда сумма S, соответствующая построенному покрытию

$$\mathscr{P}_B = \widehat{\mathscr{P}_\sigma}\cup\mathscr{P}_{B\setminus\widehat{B}} \tag{19}$$

образа шара B, не будет отличаться от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$ более, чем на $\delta/8$, и от $\widehat{S}(\widehat{\mathscr{P}_\sigma})$ более, чем на $\delta/16$.

Покажем, что эта же сумма будет приближать $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ с точностью до $3\delta/8$.

Предположим, что это не так: иными словами, так как $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}$ — точная нижняя грань, то $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ не может быть больше, чем S, поэтому если

$$\bigl|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - S\bigr| > 3\delta/8,$$

то

$$\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) < S - 3\delta/8 < \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B})) - 3\delta/8 + \delta/8 = \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B})) - \delta/4. \tag{20}$$

Построим для $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ покрытие

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigl(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)\bigr)\supset\varphi(B)$$

такое, что

$$\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^{\nu}$$

отличается от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ менее, чем на $\delta/16$. Рассмотрим объединение

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}:x_i\in\varphi(\widehat{B})}\bigl(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)\bigr). \tag{21}$$

Проверим, как соотносится (21) с $\varphi(\widehat{B})$. Если (21) содержит $\varphi(\widehat{B})$, то получаем противоречие с выбором $\widehat{\mathscr{P}_\sigma}$, так как новая сумма получилась строго меньше точной нижней грани: в силу соотношений (20) сумма

$$\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}:x_i\in\varphi(\widehat{B})}\delta_i r_i^{\nu}$$

будет меньше, чем $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$, на $3\delta/16 > 0$.

Пусть теперь (21) не содержит $\varphi(\widehat{B})$. Тогда если существует элемент $w \in \varphi(\widehat{B})$, который не принадлежит (21), то он принадлежит по крайней мере одному из множеств $\operatorname{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)$, где $x_i \in \varphi(B) \setminus \varphi(\widehat{B})$. Следовательно, у x_i нет прообразов в $\widehat{B}$, так что все его прообразы могут лежать только в $B \setminus \widehat{B}$. Поэтому прообраз v элемента w может принадлежать пересечению ε-окрестности U_ε множества $B \setminus \widehat{B}$ и $\widehat{B}$ (см. (3) и свойство 3.3). Построим для $U_\varepsilon \cap \widehat{B}$ покрытие, как в теореме 3.13. Его $\mathscr{H}^{\nu}$-мера не превосходит $\varepsilon \cdot P$, где $P < \infty$ зависит от B, поэтому покрытию будет соответствовать сумма, не превосходящая $\varepsilon \cdot Q$, где $Q < \infty$ зависит от B и от φ. Так как можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$, которое обеспечивает одновременно $\sigma < \delta/16$ и $\varepsilon \cdot Q < \delta/16$, снова получаем противоречие с определением $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$ как точной нижней грани: полученная сумма будет меньше, чем $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$, на $\delta/8 > 0$.

Таким образом,

$$\left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - S\right| \leq 3\delta/8 \text{ и } \left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B)) - S\right| \leq \delta/2, \tag{22}$$

поэтому

$$\left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))\right| < 3\delta/8 + \delta/8 = \delta/2$$

и тем самым

$$\left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B)) - \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(\widehat{B}))\right| < \delta.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.20. Так как $\widehat{B}$ — замкнутый шар, его образ компактен и, следовательно, замкнут. Тогда и прообраз $\varphi^{-1}(\varphi(\widehat{B}))$ будет замкнут, а прообраз $\varphi^{-1}(\varphi(D_0) \cap \varphi(\widehat{B}))$ компактен (см. п. 1 предположения 2.10).

Доказательство теоремы 3.17. Рассмотрим шар B_0 и набор попарно не пересекающихся шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$ такой, что

$$\bigcup_{j=1}^{J} B_j \subset B_0.$$

Идея состоит в том, чтобы для малых величин $\xi > 0$, $\eta > 0$ и произвольного покрытия

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \supset \varphi(B_0) \tag{23}$$

множества $\varphi(B_0)$, соответствующая которому сумма приближает значение $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\xi}$, где все $r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\}$, $i \in \mathbb{N}$, найти аналогичные покрытия

$$\left\{\operatorname{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_{jl}, r_{jl})\right\}_{l \in \mathbb{N}}$$

для каждого $\varphi(B_j)$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{J} \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}} \delta_{jl} r_{jl}^{\nu} \leq \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} + \eta.$$

Фиксируем $\sigma > 0$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ таково, что для каждого из шаров B_j, $j = 1, \ldots, J$, значения $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B_j))$ отличаются от соответствующих пределов $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_j))$ не более, чем на $\sigma/(4J)$, если $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Далее, рассмотрим замкнутый шар $\widehat{B}_0 \subset B_0$ такой, что

$$\left|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\widehat{B}_0)) - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_0))\right| < \sigma$$

(см. лемму 3.19). Для $\xi > 0$, $\xi < \varepsilon_0$, и $\sigma > 0$ рассмотрим покрытие вида (23) множества $\varphi(\widehat{B}_0)$, удовлетворяющее условиям теоремы 3.15 для σ и ξ, и дополним это покрытие до покрытия множества $\varphi(B_0)$ так же, как это сделано в лемме 3.19 (см. (19)). Тогда соответствующая ему сумма отличается от значения $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_0))$ не более чем на $\sigma/2$ (см. (22)). Пусть для покрытия множества $\varphi(B_0)$ верно

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu > 0. \tag{24}$$

В силу определения 3.10 каждое пересечение $\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)$, если $x_i \notin \varphi(D_0)$, является образом при отображении φ подмножества, которое лежит в шаре $\mathrm{Box}_2(y_i, s)$, где $\varphi(y_i) = x_i$ и $s < \xi$ (см. обозначение 3.1). Если же $x_i \in \varphi(D_0 \cap \widehat{B}_0)$, то объединение

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(D_0\cap\widehat{B}_0)} \bigl(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\bigr) \tag{25}$$

является образом подмножества ξ-окрестности компактного множества $\widehat{D}_0 = \varphi^{-1}(\varphi(D_0 \cap \widehat{B}_0)) \supset D_0 \cap \widehat{B}_0$ (см. обозначения 3.1, 3.2 и 3.7 и свойство 3.3). Кроме того, (25) совпадает с множеством

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(\widehat{D}_0\cap\widehat{B}_0)} \bigl(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\bigr).$$

Согласно теореме 3.15 объединению (25) в сумме (24) соответствуют слагаемые, сумма которых не превосходит σ.

Кроме того, для $x_i \in \varphi(B_0) \setminus \varphi(\widehat{B}_0)$ объединению

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(B_0)\setminus\varphi(\widehat{B}_0)} \bigl(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\bigr) \tag{26}$$

в сумме (24) соответствуют слагаемые, сумма которых не превосходит $\sigma/16$ (см. (18)).

Заменим каждый из шаров B_j вложенным шаром $\widehat{B}_j$ меньшего радиуса таким, что если $y \notin B_j$, то $\mathrm{Box}_2(y, \xi) \cap \widehat{B}_j = \varnothing$, $j = 1, \dots, J$. Тогда по теореме 3.13 для каждого из множеств $\varphi(B_j \setminus \widehat{B}_j)$ существует такое покрытие из определения 3.10, что соответствующая ему сумма не будет превосходить

$$T\mathscr{H}^\nu(B_j \setminus \widehat{B}_j), \quad T < \infty.$$

Обозначим каждое такое покрытие символом $\mathscr{P}_j$, $j = 1, \dots, J$. Каждый шар $\widehat{B}_j$ можно выбрать таким образом, что $\mathscr{H}^\nu(B_j \setminus \widehat{B}_j) < P\xi$, где $P < \infty$ зависит только от множества D.

При построении новых покрытий для каждого B_j рассмотрим элементы (23), где $x_i \in \varphi(B_j)$, $j = 1, \dots, N$. Так как если $x_i \in \varphi(\widehat{D}_0)$, прообразы x_i могут принадлежать нескольким B_j, поэтому объединение (25) может входить в каждое из новых покрытий. Поскольку среди x_i из объединения (26) могут также оказаться $x_i \in \varphi(D_0)$, то и элементы (26) могут входить в каждое из новых покрытий. Если же $x_i \in \varphi(B_j)$ и $x_i \notin \varphi(D_0)$, то x_i имеет единственный прообраз в B_j, поэтому множество $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, r_i)$ не может быть использовано как элемент покрытия для любого другого $\varphi(B_k)$, $k \neq j$.

Покажем, что для каждого фиксированного j выбранные наборы

$$\big\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, r_i) : x_i \in \varphi(B_j)\big\}_{i\in\mathbb{N}}$$

покрывают $\varphi(\widehat{B}_j)$. Фиксируем $j = 1, \dots, J$. Если $y \in \widehat{B}_j \subset B_0$, то для $\varphi(y)$ найдется по крайней мере одно содержащее его множество $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, r_i)$. Если $x_i \in \varphi(D_0)$, то все прообразы $\varphi^{-1}(\varphi(y))$, для которых определены соотношения (3) и (4), лежат в подмножестве ξ-окрестности (относительно d_2) прообразов x_i (см. обозначение 3.7). Так как по предположению по крайней мере один из таких прообразов $\varphi(y)$ принадлежит $\widehat{B}_j$, существует хотя бы один прообраз x_i, который не может лежать вне B_j. Если же $x_i \notin \varphi(D_0)$, то рассуждения аналогичны.

Как итог, получены покрытия каждого из $\varphi(B_j)$, равные

$$\big\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, r_i) : x_i \in \varphi(B_j)\big\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \mathscr{P}_j,$$

$j = 1, \dots, N$. Им соответствует сумма, не превосходящая

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} + J\cdot\sigma + J\cdot\sigma/16 + J\cdot TP\cdot\xi,$$

где $T, P < \infty$ зависят только от множества D. Таким образом, для произвольного малого $\eta > 0$ достаточно взять $\sigma < \eta/(8J)$ и $\xi < \eta/(8JTP)$. Тогда с учетом того, что $\mathscr{H}_{\mathfrak{d},\xi}^{\nu}$ — точная нижняя грань, выводим с учетом свойства, установленного в (22), что

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(B_j)) \le \sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}_{\mathfrak{d},\xi}^{\nu}(\varphi(B_j)) + \sigma/4 &\le \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} + 3\eta/8 \\ &\le \mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(B_0)) + \sigma/2 + 3\eta/8 < \mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(B_0)) + \eta.\end{aligned}$$

Так как $\eta > 0$ взято произвольно, то

$$\sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(B_j)) \le \mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(B_0)).$$

Следовательно, функция множества (5) квазиаддитивна. Теорема доказана.

Из результатов [15, 16] получаем следующее свойство.

Теорема 3.21. *Функция* (5) *дифференцируема почти всюду по мере* $\mathscr{H}^{\nu}$: *для почти всех* $x \in D$ *существует предел*

$$\Phi'(y) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}\big(\varphi(\mathrm{Box}_2(y, r))\big)}{\mathscr{H}^{\nu}(\mathrm{Box}_2(y, r))} = D_{\mathscr{H}^{\nu}} \mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(y).$$

Кроме того, функция (5) *восстанавливается по своей производной: для* $A \subset D$ *верно*

$$\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(A)) = \int_A D_{\mathscr{H}^{\nu}} \mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(y)\, d\mathscr{H}^{\nu}(y).$$

4. Формула площади

В настоящем разделе установим формулу площади для отображений, определенных на измеримых подмножествах.

Обозначение 4.1. Положим $\widehat{D}_0 = \varphi^{-1}(\varphi(D_0))$.

В силу аддитивности интеграла выводим

$$\Phi(A) = \int\limits_A \Phi'(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y) = \int\limits_{A\setminus\widehat{D}_0} \Phi'(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y) + \int\limits_{A\cap\widehat{D}_0} \Phi'(y)\,d\mathscr{H}^\nu(y)$$
$$= \Phi(A\setminus\widehat{D}_0) + \Phi(A\cap\widehat{D}_0) = \Phi(A\setminus\widehat{D}_0).$$

Следовательно, $\Phi'(y) = 0$ для почти всех $y \in \widehat{D}_0$.

Известно [17], что почти все точки измеримого множества являются точками плотности. Иными словами, для почти всех $y \in D$ выполняется

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^N(B(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^N(B(y,r))} = 1,$$

где $B(y,r)$ — евклидов шар радиуса $r > 0$ с центром в $y \in D$. Тогда почти всюду верно

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^N(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^N(\mathrm{Box}_2(y,r))} = \lim_{r\to 0}\frac{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))} = 1.$$

Таким образом, для вывода формулы площади необходимо исследовать значения $\Phi'(y)$, где $y \notin \widehat{D}_0$ и y — точка плотности $D\setminus\widehat{D}_0$.

Теорема 4.2. *Пусть $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ удовлетворяет условиям предположения* 2.10. *Тогда*

$$\Phi'(y) = \prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^+\varphi(y)^*\widehat{D}_k^+\varphi(y) - \widehat{D}_k^-\varphi(y)^*\widehat{D}_k^-\varphi(y)\bigr)}$$

для почти всех $y \in D\setminus\widehat{D}_0$ и справедлива формула площади

$$\int\limits_{A\cap D}\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^+\varphi(y)^*\widehat{D}_k^+\varphi(y) - \widehat{D}_k^-\varphi(y)^*\widehat{D}_k^-\varphi(y)\bigr)}\,d\mathscr{H}^\nu(y) = \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(A)). \tag{27}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем рассматривать множество точек плотности $D\setminus\widehat{D}_0$. Воспользуемся идеей работы [18] и результатами [5]. Фиксируем точку плотности $y \in D\setminus\widehat{D}_0$, рассмотрим шар $B = \mathrm{Box}_2(y,r)$, $r > 0$, такой, что $\overline{\mathrm{Box}_2(y,r)} \cap \widehat{D}_0 = \varnothing$, и его образ $\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))$. Так как $\overline{\mathrm{Box}_2(y,r)} \cap \widehat{D}_0 = \varnothing$, существует $\widehat{r} > r$ такое, что и $\overline{\mathrm{Box}_2(y,\widehat{r})} \cap \widehat{D}_0 = \varnothing$. Положим $\widehat{B} = \mathrm{Box}_2(y,\widehat{r})$. Для произвольного $\sigma > 0$ существует такое $r_0 > 0$, что если $r < r_0$, то

$$\frac{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))} > 1-\sigma. \tag{28}$$

Будем считать, что $\widehat{r} < r_0$ для взятого произвольным образом малого $\sigma > 0$ и, кроме того, что

$$\mathscr{H}^\nu\bigl(\widehat{B}\setminus B\bigr) < \frac{\sigma}{2}\cdot\mathscr{H}^\nu(B) \tag{29}$$

и на $\widehat{B}\cap D$ выполняется

$$\widetilde{d}_2(\varphi(w),\widehat{D}\varphi(w)\langle u\rangle) > \kappa d_2(w,u)$$

для всех $w,u\in\widehat{B}\cap D$, $\kappa>0$.

Фиксируем $\varepsilon>0$ и рассмотрим покрытие $\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i,r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ из определения 3.10 множества $\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))$. Положим $x_j=\varphi(y_j)$, $j\in\mathbb{N}$. Без ограничения общности можем считать $\varepsilon>0$ настолько малым, что $\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,r_j))\subset\widehat{B}$, и, следовательно, $\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,r_j))\cap\widehat{D}_0=\varnothing$, $j\in\mathbb{N}$. Из [5, теорема 2.4] вытекает, что значение $\prod\limits_{k=1}^{M}\omega_k\cdot r_i^{\nu}$ с точностью до множителя $1+o(1)$ совпадает с

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y_i)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y_i)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y_i)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y_i)\bigr)}\cdot\mathscr{H}^{\nu}\bigl(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\bigr),$$

$i\in\mathbb{N}$, где величина $o(1)$ равномерна на компактных окрестностях точки y в силу непрерывности риманова тензора, и поэтому

$$\prod_{k=1}^{M}\omega_k\sum_{i\in\mathbb{N}}r_i^{\nu}=(1+o(1))\cdot\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\bigr)}\\ \times\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))),\quad(30)$$

где $y_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $i\in\mathbb{N}$. Таким образом, левая часть (30) достигает точной нижней грани тогда и только тогда, когда правая часть этого соотношения близка к точной нижней грани с точностью до множителя $1+o(1)$, и наоборот.

Исследуем точную нижнюю грань значений

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))).$$

По определению 3.10, определению отображения π_x (см. обозначение 3.7) и выбору $\varepsilon>0$ выводим, что

$$\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\cap D=\varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i,r_i)\bigr),$$

следовательно, множества $\{\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\}$ образуют покрытие пересечения $B\cap D$, $i\in\mathbb{N}$. Из локальной билипшицевой эквивалентности $\bigl(\widetilde{d}_2\bigr)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ на $\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w)$, $w\in D\setminus\widehat{D}_0$ (см., например, [5, теорема 2.1; 6, теорема 9]), следует

$$\mathrm{Box}_2(v,r)\cap\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w)\subset\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(v,r)\cap\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w)\subset\mathrm{Box}_2(v,Qr)\cap\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w),$$

$v=\varphi(w)$, где Q одно и то же для всех w из окрестности y, поэтому в прообразе справедливо

$$\mathrm{Box}_2(w,r/K)\subset\widehat{D}\varphi(w)^{-1}(\mathrm{Box}_2(v,r))\subset\widehat{D}\varphi(w)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(v,r)),\quad(31)$$

где $K=\max\{1,\mathrm{Lip}(\varphi)\}$. Напомним, что в силу выбора $\varepsilon>0$ радиусы $r_i>0$ таковы, что $\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\subset\widehat{B}$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Далее, как и в [5], для доказательства того, что величина

$$\Bigl|\inf\Bigl\{\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))):x_i\in\varphi(B)\Bigr\}-\mathscr{H}^{\nu}(\mathrm{Box}_2(y,r))\Bigr|\quad(32)$$

не превосходит $\sigma \cdot \mathscr{H}^\nu\big(\mathrm{Box}_2(y,r)\big)$, достаточно

- по теореме Витали выбрать набор $\{\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\}_{i\in\mathbb{N}}$, покрывающий $B\cap D$ с точностью до множества $\mathscr{H}^\nu$-меры нуль;
- для оставшегося множества $\mathscr{H}^\nu$-меры нуль выбрать покрытие шарами $\{\mathrm{Box}_2(y_j,\rho_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, сумма $\mathscr{H}^\nu$-мер которых не превосходит заранее заданного $\widehat{\varepsilon}>0$, и где $\rho_j>0$ таковы, что $\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}(x_j,K\rho_j))\subset\widehat{B}$ (см. (31)), $j\in\mathbb{N}$; идея построения покрытия аналогична примененной в доказательстве теоремы 3.12;
- этот набор шаров заменить набором $\big\{\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,K\rho_j))\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ таким, что
$$\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,K\rho_j))\supset\mathrm{Box}_2(y_j,\rho_j),$$
$x_j=\varphi(y_j)$, $K=\max\{1,\mathrm{Lip}(\varphi)\}<\infty$, $j\in\mathbb{N}$ (см. (31)); тогда сумма мер элементов этого набора не будет превосходить $\widehat{K}\widehat{\varepsilon}$, $\widehat{K}<\infty$. Величину $\widehat{\varepsilon}>0$ можно выбрать таким образом, что
$$\widehat{K}\widehat{\varepsilon}<\frac{\sigma}{2}\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)).$$

Отсюда с учетом (28) и (29) имеем

$$\begin{aligned}(1-\sigma)\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))&\le\mathscr{H}^\nu(B\cap(D\setminus\widehat{D}_0))\\&\le\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^\nu(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)))+\widehat{K}\widehat{\varepsilon}\\&\le\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))+2\cdot\frac{\sigma}{2}\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))=(1+\sigma)\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)).\end{aligned}$$

Отсюда выводим, что (32) не превосходит $\sigma\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))$. Так как $\sigma>0$ взято произвольным образом, значение

$$\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap(D\setminus\widehat{D}_0)))=\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r)))$$

совпадает с

$$(1+o(1))\cdot\sqrt{\det\big(\widehat{D}^+_k\varphi(y)^*\widehat{D}^+_k\varphi(y)-\widehat{D}^-_k\varphi(y)^*\widehat{D}^-_k\varphi(y)\big)}\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)),$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$. Таким образом, производная $\Phi'(y)$ равна

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\big(\widehat{D}^+_k\varphi(y)^*\widehat{D}^+_k\varphi(y)-\widehat{D}^-_k\varphi(y)^*\widehat{D}^-_k\varphi(y)\big)},$$

и в силу результатов [15, 16] верна формула (27). Теорема доказана.

Замечание 4.3. Если потребовать, чтобы отображение φ было биективно на $D\setminus\varphi^{-1}(\varphi(D_0))$, то теорема 4.2 будет также верна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
2. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 1. С. 62–70.
3. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 3. С. 68–80.

4. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.
5. *Карманова М. Б.* Липшицевы образы открытых множеств на сублоренцевых структурах // Мат. тр. 2023. Т. 26, № 2. С. 138–161.
6. *Карманова М. Б.* Площадь поверхностей на сублоренцевых структурах глубины два // Мат. тр. 2023. Т. 26, № 1. С. 93–119.
7. *Карманова М. Б.* Мера образов контактных отображений на двухступенчатых сублоренцевых структурах // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 1. С. 149–153.
8. *Magnani V.* Contact equations, Lipschitz extensions and isoperimetric inequalities // Calc. Var. PDE. 2010. V. 39, N 1–2. P. 233–271.
9. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
10. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
11. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
12. *Vodopyanov S.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2000. P. 603–670.
13. *Карманова М. Б.* Об аппроксимируемости и параметризации прообразов элементов групп Карно на сублоренцевых структурах // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 1. С. 140–144.
14. *Карманова М. Б.* Формула коплощади на группах Карно с сублоренцевой структурой для вектор-функций // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 298–325.
15. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
16. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.
17. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer, 1969.
18. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

Поступила в редакцию 9 апреля 2024 г.
После доработки 6 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com