Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.553

ЗАМЕЧАНИЕ О ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ, РАЦИОНАЛЬНЫХ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

О. А. Иванова, С. Н. Мелихов

Аннотация. Исследованы голоморфные в полицилиндрической области функции, рациональные по части переменных при произвольно зафиксированных остальных. Доказано, что такие функции можно представить в виде отношения многочленов от этих переменных, коэффициенты которых голоморфны по остальным переменным. При этом применяется метод Кронекера доказательства критерия рациональности голоморфной в окрестности точки 0 функции одной комплексной переменной, использующий свойства ганкелевых матриц.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.511

Ключевые слова: голоморфная функция, рациональная функция, ганкелева матрица.

1. Введение

Пусть $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$ — произведение односвязных областей в $\mathbb{C}$. В настоящей работе изучаются функции, голоморфные в Ω и рациональные по переменным $z_1, \dots, z_M$, $1 \le M < N$, при любых фиксированных остальных. Такие функции для любых $z_j \in \Omega_j$, $M+1 \le j \le N$, можно представить в виде отношения многочленов от переменных $z_1, \dots, z_M$, коэффициенты и степени которых зависят от $z_{M+1}, \dots, z_N$. Возникает естественный вопрос о том, можно ли формальные степени таких многочленов выбрать не зависящими от $z_{M+1}, \dots, z_N$, а их коэффициенты — голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \cdots \times \Omega_N$. Основной результат данной работы — теорема 1 — положительно отвечает на этот вопрос. Мы предлагаем доказательство этого результата, поскольку в известной нам литературе его не нашли.

При доказательстве теоремы 1 используется метод Кронекера [1], установившего с его помощью критерий рациональности голоморфной функции одной комплексной переменной в терминах ее тейлоровских коэффициентов (см. также [2, разд. 7, § 2]). Существенную роль в нем играют свойства ганкелевых матриц. Особенностью рассмотренной в статье ситуации является то, что элементы таких матриц здесь являются голоморфными функциями. Внимание авторов к упомянутому методу привлекла работа Сичака [3], использовавшего его при доказательстве достаточного условия рациональности функции многих комплексных переменных. Потребность исследовать «почти» рациональные функции возникла при изучении циклических векторов и инвариантных подпространств системы операторов частного обратного сдвига в пространствах функций, голоморфных в полицилиндрических областях, в частности (и тогда речь идет о «почти» многочленах), в пространстве всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций (см., например, [4]).

2. Основной результат

Далее $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$; Ω_j, $1 \leq j \leq N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0; $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $z \in \mathbb{C}^N$ полагаем $z' := (z_2, \ldots, z_N)$; $\Omega' := \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N$.

Теорема 1. *Пусть функция f голоморфна в Ω, отлична от тождественного нуля и рациональна по переменным $z_1, \ldots, z_M$, $1 \leq M < N$, при произвольно зафиксированных остальных. Тогда f можно представить в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где P, Q — многочлены от переменных $z_1, \ldots, z_M$ с голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \cdots \times \Omega_N$ коэффициентами.*

Доказательство. Мы следуем идее доказательства критерия Кронекера рациональности функции одной комплексной переменной [1, § X, XI]. Доказательство упомянутого критерия Кронекера, связанное с ганкелевыми матрицами, содержится, например, в [2, разд. 7, § 2]. Приведем соответствующие рассуждения с необходимой адаптацией к рассматриваемой многомерной ситуации.

Вначале покажем нужное для $M = 1$. Для любого $z' \in \Omega'$ найдется $k = k(z') \in \mathbb{N}$ такое, что f представляется в виде

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} a_j(z') z_1^j}{\sum\limits_{q=0}^{k} b_q(z') z_q^l}, \quad z \in \Omega. \tag{1}$$

Существует $\varepsilon > 0$, для которого круг $\{z_1 \in \mathbb{C} \mid |z_1| < \varepsilon\}$ содержится в Ω_1. В этом круге функцию f можно разложить в ряд Тейлора по переменной z_1:

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(z') z_1^s, \quad z' \in \Omega'. \tag{2}$$

Из равенств

$$c_s(z') = \frac{1}{s!} \frac{\partial^s f}{\partial z_1^s}(0, z'), \quad z' \in \Omega', \ s \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

следует, что функции c_s, $s \in \mathbb{N}_0$, голоморфны в Ω'.

Если не более конечного числа функций c_s ненулевые в Ω', то представление f в виде (2) является тем, которое нужно доказать. Пусть бесконечное число функций c_s являются ненулевыми в Ω'. В силу (1) в Ω' выполняются равенства

$$\sum_{s=0}^{j} c_s b_{j-s} = a_j, \ 0 \leq j \leq k-1, \quad \sum_{s=j-k}^{j} c_s b_{j-s} = 0, \ j \geq k. \tag{4}$$

Для $m, l \in \mathbb{N}_0$, $z' \in \Omega'$ введем матрицы

$$\mathscr{C}_{m,l}(z') := \begin{pmatrix} c_m(z') & c_{m+1}(z') & \cdots & c_{m+l}(z') \\ c_{m+1}(z') & c_{m+2}(z') & \cdots & c_{m+l+1}(z') \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ c_{m+l}(z') & c_{m+l+1}(z') & \cdots & c_{m+2l}(z') \end{pmatrix}.$$

Из равенств (4) и того, что для любого $z' \in \Omega'$ хотя бы один из коэффициентов $b_q(z')$ отличен от 0, вытекает, что $\det \mathscr{C}_{m,l}(z') = 0$ для всех $z' \in \Omega'$, $m \in \mathbb{N}_0$,

$l \geq k$. Выберем $r > 0$ такое, что замкнутый поликруг $\overline{D}_r := \{z' \in \Omega' \mid |z_j| \leq r,\, 2 \leq j \leq N\}$ содержится в Ω'. Введем множества

$$M_p := \{z' \in \overline{D}_r \mid k(z') = p\}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $\overline{D}_r = \bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} M_p$. Вследствие теоремы Бэра о категориях, примененной к полному метрическому пространству $\overline{D}_r$ с обычной евклидовой метрикой, существует $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого множество M_{k_0} не является нигде не плотным в $\overline{D}_r$. Тогда замыкание M_{k_0} в $\overline{D}_r$ содержит некоторое непустое открытое множество $V \subset \Omega'$. Это влечет, что $\det C_{m,l} = 0$ в V, а значит, и в Ω' для всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \geq k_0$.

Воспользуемся таким свойством альтернативной стабильности матриц $\mathscr{C}_{m,l}$: если для $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $z' \in \Omega'$ выполняются равенства $\det \mathscr{C}_{m+t,l}(z') = 0$ для любого $t \in \mathbb{N}_0$, то либо все определители $\det \mathscr{C}_{m+1+t,l-1}(z')$, $t \in \mathbb{N}_0$, равны 0, либо все они не равны 0 (см. [2, разд. 7, § 2, задачи 19, 20]). В силу этого свойства найдется $r_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $r_0 \leq k_0$, $\det \mathscr{C}_{m,r_0} = 0$ в Ω' для любых $m \geq k_0 - r_0$, и существует $z_0' \in \Omega'$, для которого $\det \mathscr{C}_{m,r_0-1}(z_0') \neq 0$ для всех $m \geq k_0 - r_0 + 1$. Введем множество

$$\Omega_0' := \{z' \in \Omega' \mid \det \mathscr{C}_{k_0-r_0+1,r_0-1}(z') \neq 0\},$$

непустое и открытое в Ω'. Из теоремы единственности для голоморфных функций следует, что множество $\{z' \in \Omega' \mid \det \mathscr{C}_{k_0-r_0+1,r_0-1}(z') = 0\}$ нигде не плотно в Ω' (см., например, [5, гл. II, § 8, п. 21, теорема 1]), а значит, Ω_0' плотно в Ω'. Свойство стабильности влечет, что $\det \mathscr{C}_{m,r_0-1}(z') \neq 0$ для всех $m \geq k_0 - r_0 + 1$ и $z' \in \Omega_0'$.

Определим подходящим образом заново коэффициенты a_j и b_q, оставив для них предыдущие обозначения. Для каждого $z' \in \Omega_0'$ существует решение $\xi(z') = (\xi_{k_0-r_0}(z'), \xi_{k_0-r_0}(z'), \cdots, \xi_{k_0}(z'))$ системы

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_{s+j}(z')\xi_s(z') = 0, \quad 1 \leq j \leq r_0,$$

для которого $\xi_{k_0}(z') = 1$. Из формул Крамера следует, что все функции ξ_s, $k_0 - r_0 \leq s \leq k_0$, могут быть представлены в следующем виде:

$$\xi_s(z') = \frac{\eta_s(z')}{\det \mathscr{C}_{k_0-r_0+1,r_0-1}(z')}, \quad z' \in \Omega_0', \tag{5}$$

где функции η_s, $k_0 - r_0 \leq s \leq k_0$, голоморфны в Ω'. Так как для любого $z' \in \Omega_0'$ первая строка матрицы $\mathscr{C}_{k_0-r_0,r_0}(z')$ является линейной комбинацией остальных ее строк, то для $z' \in \Omega_0'$ выполняется равенство

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_s(z')\xi_s(z') = 0.$$

Поскольку для каждого $j \geq r_0 + 1$ и всякого $z' \in \Omega_0'$ последняя строка матрицы $\mathscr{C}_{k_0-r_0+j,r_0}(z')$ является линейной комбинацией предыдущих, то вектор $\xi(z')$ для $z' \in \Omega_0'$ является решением и бесконечной системы

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_{s+j}(z')\xi_s(z') = 0, \quad j \geq r_0 + 1.$$

Равенства (5) и плотность Ω_0' в Ω' влекут, что для любого $j \geq 0$ в Ω'

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_{s+j}\eta_s = 0.$$

Если $r_0 < k_0$, то положим $\eta_s(z') = 0$ при $0 \leq s \leq k_0 - r_0 - 1$, $z' \in \Omega'$. Тогда $\sum\limits_{s=0}^{k_0} c_{s+j}\eta_s = 0$ в Ω' для любого $j \in \mathbb{N}_0$. Положим $b_q(z') = \eta_{k_0-q}(z')$, $0 \leq q \leq k_0$, $z' \in \Omega'$. Коэффициенты a_j определим равенствами

$$a_j := \sum_{s=0}^{j} c_s b_{j-s}, \quad 0 \leq j \leq k_0 - 1.$$

Так как $\sum\limits_{s=j-k_0}^{j} c_s b_{j-s} = 0$ в Ω' для любого $j \geq k_0$, то функция f имеет представление

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k_0-1} a_j(z')z_1^j}{\sum\limits_{q=0}^{k_0} b_q(z')z_1^q}, \quad z \in \Omega, \tag{6}$$

обладающее требуемыми свойствами при $M = 1$.

Предположим, что $2 \leq M \leq N - 1$ и доказываемое утверждение верно для $M - 1$. Зафиксируем $z_j \in \Omega_j$, $M + 1 \leq j \leq N$. Функцию f можно представить в виде $f(z) = A(z_1, \dots, z_M)/B(z_1, \dots, z_M)$, где A, B — взаимно простые многочлены от переменных $z_1, \dots, z_M$, зависящие от зафиксированных $z_j \in \Omega_j$, $M + 1 \leq j \leq N$. Согласно [6, лемма 2.2.2] B не имеет корней в $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_M$. Поэтому для любых $z_j \in \Omega_j$, $2 \leq j \leq M$, функция $B(z_1, \dots, z_M)$ является ненулевым многочленом от z_1. Значит, функция $f(z)$ рациональна по z_1 для любых $z_j \in \Omega_j$, $2 \leq j \leq N$. По предыдущей части f имеет вид, как в (6). При этом коэффициенты a_j и b_q выражаются описанным выше образом через функции c_s, $s \in \mathbb{N}_0$. Вследствие равенств (33) и того, что $B \neq 0$ в $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_M$, все функции c_s рациональны по $z_2, \dots, z_M$. Поэтому все коэффициенты a_j и b_q рациональны по переменным $z_2, \dots, z_M$ при любых фиксированных $z_j \in \Omega_j$, $M + 1 \leq j \leq N$. По предположению каждая из функций a_j и b_q является отношением многочленов от $z_2, \dots, z_M$ с голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \dots \times \Omega_N$ коэффициентами. Поэтому функция f представляется нужным образом и для M. Теорема доказана. □

Отметим простое утверждение, которое влекут приведенные при доказательстве предыдущей теоремы рассуждения.

Следствие 1. *Пусть функция f голоморфна в Ω и является многочленом от переменных $z_1, \dots, z_M$, $1 \leq M < N$, при любых фиксированных остальных. Тогда f является многочленом от переменных $z_1, \dots, z_M$ с голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \dots \times \Omega_N$ коэффициентами.*

Доказательство. Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 1. В этом случае при $M = 1$ в равенстве (1) можно взять $b_0(z') = 1$ и $b_q(z') = 0$, $1 \leq q \leq k = k(z')$, $z' \in \Omega'$. Тогда для $z' \in \Omega'$ выполняются соотношения $a_j(z') = c_j(z')$, если $0 \leq j \leq k-1$, и $c_j(z') = 0$, если $j \geq k$. По доказательству теоремы 1 для $M = 1$ существует $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого замыкание множества M_{k_0} в Ω' содержит непустое открытое подмножество Ω' и $c_j = 0$ в M_{k_0} для всех

$j \geq k_0$. Значит, $c_j = 0$ в Ω' для любого $j \geq k_0$. С помощью доказанного для $M = 1$ случай с $M \geq 2$ сводится к $M - 1$. $\square$

Благодарность. Авторы выражают признательность профессору А. В. Домрину и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kronecker L.* Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen // Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin). 1881. P. 535–600.
2. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. II.
3. *Siciak J.* A note on rational functions of several complex variables // Ann. Polonici Math. 1962. V. 12. P. 139–142.
4. *Ivanov P. A., Melikhov S. N.* Pommiez operator in spaces of analytic functions of several complex variables // J. Math. Sci. 2021. V. 252, N 3. P. 345–359.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Т. II.
6. *Rudin W., Stout E. L.* Boundary properties of functions of several complex variables // J. Math. Mech. 1965. V. 14. P. 991–1005.

Поступила в редакцию 1 декабря 2023 г.
После доработки 1 декабря 2023 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8-а, Ростов-на-Дону 344090
neo_ivolga@mail.ru

Мелихов Сергей Николаевич (ORCID 0000-0002-5895-9607)
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8-а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Ватутина, 53, Владикавказ 362025
snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru