Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ТЕОРЕМА РАШЕВСКОГО — ЧОУ НА ГРУППЕ КАРТАНА

А. В. Грешнов, Р. И. Жуков

Аннотация. Рассматривается задача управления нелинейными 5-мерными системами, индуцированными горизонтальными векторными полями X, Y, $[\cdot,\cdot]$-порождающими алгебру Картана, линейно зависящими от двух кусочно-постоянных управлений. Изучены свойства решений таких систем. Решение интерпретируется как горизонтальная k-ломаная L_k на канонической группе Картана $\mathbb{K}$, где звенья ломаной L_k — отрезки интегральных линий векторных полей вида $aX+bY$, $a,b=\mathrm{const}$. На $\mathbb{K}$ доказано, что минимальное число $N_{\mathbb{K}}$ такое, что любые две точки $u,v\in\mathbb{K}$ соединяются L_k, $k\le N_{\mathbb{K}}$, равно 4. Таким образом, получена наилучшая версия теоремы Рашевского — Чоу на группе Картана. Доказано, что минимальное число звеньев замкнутой горизонтальной ломаной на $\mathbb{K}$ равно 6.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.510

Ключевые слова: горизонтальные векторные поля, группы Карно, группа Картана, горизонтальная ломаная, вершина, теорема Рашевского — Чоу.

§ 1 Введение

Рассмотрим следующую задачу управления:

$$\dot{x}(s)=\varphi_1(s)X_1(x(s))+\ldots+\varphi_{r_1}(s)X_{r_1}(x(s)),\quad x(0)=u,\ x(s_0)=v,\quad s\in[0,s_0],\tag{1}$$

где $x\in\mathbb{R}^N$, $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_{r_1})\in\mathbb{R}^{r_1}$ — измеримые локально ограниченные управления, $\mathscr{X}=\{X_1,\ldots,X_{r_1}\}$, $r_1<N$, — гладкие векторные поля такие, что рассматриваемая система вполне управляема [1]. Система называется *вполне управляемой*, если для любых u,v задача (1) разрешима для некоторого $s_0>0$. Критерий управляемости системы из задачи (1) может быть сформулирован в терминах условия Хермандера (степени n) на векторные поля $\mathscr{X}$ [2–4], которые в этом случае называются $[\cdot,\cdot]$- *порождающими* [4]. Задача (1) возникает естественным образом в анализе и геометрии [3, 4], в инженерии [1].

В настоящее время не существует способа в явном виде решать задачу (1). Отметим, что задача (1) имеет решение в классе измеримых управлений φ_i; более того, решение задачи (1) существует в классе кусочно-постоянных управлений, где количество переключений ограничено некоторой константой [3, 4]. Действительно, рассмотрим гладкое связное многообразие $\mathscr{M}$, $\dim\mathscr{M}=N$, и пусть $Y_1,\ldots,Y_m$, $m<N$, — C^∞- гладкие векторные поля, удовлетворяющие условию Хермандера на многообразии $\mathscr{M}$ (субриманово многообразие). Векторные поля

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН проект FWNF-2022-0006.

$Y_1, \dots, Y_m$ и подрасслоение $H_{\mathscr{M}} \subset T\mathscr{M}$, натянутое на $Y_1, \dots, Y_m$, называются *горизонтальными*. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma(s) : [0, s_0] \to \mathscr{M}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(s) \in H_{\mathscr{M}}(\gamma(s))$ почти всюду. Хорошо известна следующая

Теорема 1 (Рашевского — Чоу [3, 4]). *Любые две точки $u, v \in \mathscr{M}$ могут быть соединены некоторой горизонтальной кривой $\gamma \subset \mathscr{M}$, состоящей из конечного числа отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $Y_1, \dots, Y_m$.*

Отметим следующий более точный (по сравнению с теоремой 1) результат.

Теорема 2 [4]. *Любые две точки $u, v \in \mathscr{M}$ могут быть соединены (во всяком случае локально) горизонтальной кривой в $\mathscr{M}$, состоящей не более чем из $2N$ отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $Y_1, \dots, Y_m$.*

Естественная задача, которая возникает в свете теоремы Рашевского — Чоу, состоит в нахождении минимального числа $N_{\mathscr{M}}$ такого, что любые две точки $u, v \in \mathscr{M}$ можно соединить (во всяком случае локально) горизонтальной кривой, состоящей не более чем из k отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $Y_1, \dots, Y_m$, где $k \leq N_{\mathscr{M}}$.

Положим

$$a_J X = \sum_{j=1}^{r_1} a_j X_j, \quad a_J = (a_1, \dots, a_{r_1}) \in \mathbb{R}^{r_1}, \quad a_i = \mathrm{const}\,.$$

Обозначим через $\exp(a_J X)(u)$ точку интегральной линии $\exp(s a_J X)(u)$, $s \geq 0$, горизонтального векторного поля $a_J X$, соответствующую значению $s = 1$; для простоты полагаем, что выражение $\exp(a_J X)(u)$ корректно определено для каждого вектора a_J, $u \in \mathbb{R}^N$. По индукции определим *горизонтальную k-ломаную $L_k(x_0, x_k)$, состоящую из k сегментов I_i, $i = 1, \dots, k$,* (*имеющую k звеньев*) и $k+1$ *вершин* в точках $x_0, \dots, x_k$ с началом в точке x_0 и концом в точке x_k:

$$L_k(x_0, x_k) = \bigcup_{i=1}^{k} I_i, \ \ I_i = \bigcup_{s \in [0,1]} \exp(s a_{J_i} X)(x_{i-1}), \ \exp(a_{J_i} X)(x_{i-1}) = x_i, \ |a_{J_i}| \neq 0. \tag{2}$$

Если $x_0 = x_k$ ($k \geq 2$), то горизонтальная k-ломаная $L_k(x_0, x_k)$ *замкнута*; таким образом, k вершинами замкнутой горизонтальной k-ломаной являются точки $x_1, \dots, x_k = x_0$ и каждая вершина замкнутой k-ломаной принадлежит двум звеньям. Таким образом, решение задачи (1) (принимая во внимание теорему 1) в классе кусочно-постоянных управлений можно интерпретировать как некоторую горизонтальную k-ломаную, где величина $k - 1$ соответствует количеству переключений. Такую интерпретацию решений задачи (1) в классе кусочно-постоянных управлений будем использовать в дальнейшем.

Расстояние Карно — Каратеодори на $\mathscr{M}$ определяется как

$$d_{cc}(u, v) = \inf\{l_{\mathscr{M}}(\gamma) \mid \gamma \text{ — горизонтальная кривая, соединяющая } u, v\};$$

длина $l_{\mathscr{M}}(\gamma)$ абсолютно непрерывной кривой $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, определяется при помощи скалярного риманова произведения обычным способом. Пара

$(\mathscr{M}, d_{cc})$ называется *пространством Карно — Каратеодори* [3, 4]. Важнейшим частным случаем пространств Карно — Каратеодори являются группы Карно [5–7].

Горизонтальная кривая $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, называется *cc-кратчайшей*, соединяющей $u, v \in (\mathscr{M}, d_{cc})$, если

$$l_{\mathscr{M}}(\gamma) = d_{cc}(u, v), \quad u = \gamma(0), \ v = \gamma(s_0).$$

cc-Кратчайшая является решением задачи (1) на классе измеримых управлений, минимизирующем функционал длины на соответствующем классе горизонтальных кривых. Явное нахождение cc-кратчайших даже в частных случаях пространств Карно — Каратеодори является сложной задачей (см., например, [4, 8–19]). Многие свойства cc-кратчайших до сих пор неизвестны, в частности, открытой проблемой является гладкость cc-кратчайших (см., например, [20]). В ряде задач (например, доказательство существования равномерных и NTA-областей в субримановой геометрии [21]) информация о свойствах cc-кратчайших может оказаться ключевой. Однако в силу отсутствия такой информации используют вспомогательные горизонтальные кривые, в частности, cc-ломаные. В настоящей работе на канонической группе Картана $\mathbb{K}$ решается задача нахождения наименьшего числа $N_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}$ такого, что любые две точки $u, v \in \mathbb{K}$ соединяются горизонтальной k-ломаной $L_k(u, v)$, где $k \leq N_{\mathbb{K}}$. Такая задача ранее была решена для канонических 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением коранга 1 [22], для канонической группы Энгеля [23], для канонических 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением ранга 3 [24, 25].

В работе доказана следующая

Теорема 3. $N_{\mathbb{K}} = 4$.

С точки зрения количественных оценок теорем 1, 2 теорема 3 является наилучшей версией теоремы Рашевского — Чоу для группы Картана.

В последнее время аналитические и геометрические свойства группы Картана интенсивно изучались в связи с различными задачами вариационного исчисления и оптимального контроля (см., например, [13, 19]).

Группа Картана естественным образом возникает в задаче об управлении машиной с двумя прицепами и в задаче о качении шара по плоскости без проскальзывания и прокручивания [17, 18]. Отметим, что в работах [17, 18] изучалась задача построения приближенного решения в задаче о качении шара по плоскости без проскальзывания при помощи точного решения соответствующей нильпотентной задачи (в алгебре Картана) в классе кусочно-постоянных управлений. Для определения коэффициентов управления в системе Mathematica авторами была написана соответствующая программа, но из-за сложности формул сам алгоритм в работах [17, 18] не приводился; при этом отмечалось, что для построения этого точного решения достаточно трех переключений. Отсюда можно сделать вывод о том, что любые две точки группы Картана можно соединить горизонтальной 4-ломаной. Наше доказательство теоремы 3 не использует методы работ [17, 18]. Реализация группы Картана как канонической группы, которую мы используем, отличается от той, что была использована в [17, 18]. Используя свойства канонических групп, в серии вспомогательных утверждений (утверждения 9, 13, теоремы 16, 17, следствие 11) для произвольной точки $M \in \mathbb{K}$ мы непосредственным образом строим горизонтальную ломаную $L_k(O, M)$, где $k \leq 4$. В то же время существуют точки $M \in \mathbb{K}$, для которых не существуют горизонтальные k-ломаные $L_k(O, M)$, где $k \leq 3$ (следствие 10, замечание 15). Отсюда получаем теорему 3.

Другая задача, которая решается в работе, состоит в нахождении минимального числа $k_{\mathbb{K}}$ такого, что существует горизонтальная замкнутая $k_{\mathbb{K}}$-ломаная. В § 4 нами доказана следующая

Теорема 4. $k_{\mathbb{K}} = 6$.

Доказательство теоремы 4 базируется на тех же идеях, что и доказательство теоремы 2 (см. теорему 22); при этом на группе Картана $\mathbb{K}$ не существует замкнутых горизонтальных k-ломаных $L_k(u, v)$, где $k \leq 5$ (см. свойства 18, 19). Отметим, что на первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ и на группе Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ не существуют замкнутые горизонтальные 3-ломаные, но существуют замкнутые горизонтальные 4-ломаные [23].

Существование горизонтальных замкнутых ломаных связано с описанием и оценками множеств достижимости управляемой системы (1), где φ_i — кусочно-постоянные управления, а правый конец траектории $x(s_0) = v$ не закреплен [1]. Результат теоремы 4 говорит о том, что не менее чем за шесть шагов вдоль подходящим образом выбранных горизонтальных траекторий любая точка группы Картана попадет в исходное положение при условии, что мы не можем последовательно двигаться в обратном направлении.

§ 2. Вспомогательные определения и результаты

Канонической N-мерной группой Ли [26] называется аналитическая группа Ли G такая, что ее экспоненциальное отображение $\mathrm{Exp} : \mathbb{R}^N \to G$ тождественно; таким образом, любой элемент $x \in G$ однозначно определяется координатной записью $x = (x_1, \dots, x_N)$, точка O (начало координат $\mathbb{R}^N$) является нейтральным элементом, $x^{-1} = (-x_1, \dots, -x_N)$, групповая операция $P^G_u u' = u \cdot u'$ для любых $u, u' \in G$ определяется посредством формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа, а таблица коммутаторов определяется на векторах $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ из $\mathbb{R}^N$.

Каноническая *группа Картана* $\mathbb{K}$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ с системой координат (x, y, t, z_1, z_2), индуцированной координатным репером $(O, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, при помощи следующей таблицы коммутаторов:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha \neq 0, \\ [e_1, e_3] = \beta_1 e_4, & \beta_1 \neq 0, \\ [e_2, e_3] = \beta_2 e_5, & \beta_2 \neq 0; \end{cases} \tag{3}$$

все остальные возможные коммутаторы e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 равны 0. Изменяя нумерацию и направления векторов $\{e_i\}$, всегда можно добиться того, что $\alpha > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$; поэтому в дальнейшем будем придерживаться таких условий. Используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа [27] и таблицу (3), получаем аналитическую запись левого сдвига $P^{\mathbb{K}}_w w'$ произвольного элемента $w' =$

$(x', y', t', z_1', z_2') \in \mathbb{K}$ на произвольный элемент $w = (x, y, t, z_1, z_2) \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} P_w^{\mathbb{K}} w' = w \cdot w' = (x, y, t, z_1, z_2)(x', y', t', z_1', z_2') \\ = \Big(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), \\ z_1 + z_1' + \frac{\beta_1}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - x')(xy' - x'y), \\ z_2 + z_2' + \frac{\beta_2}{2}(yt' - y't) + \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - y')(xy' - x'y) \Big). \end{aligned} \tag{4}$$

Используя (4), получаем выражения базиса левоинвариантных векторных полей (базис Якоби [5]) на $\mathbb{K}$ в произвольной точке (x, y, t, z_1, z_2):

$$\begin{gathered} X = \left(1, 0, -\frac{\alpha}{2}y, -\frac{\beta_1}{2}t - \frac{\alpha\beta_1}{12}xy, -\frac{\alpha\beta_2}{12}y^2\right), \\ Y = \left(0, 1, \frac{\alpha}{2}x, \frac{\alpha\beta_1}{12}x^2, -\frac{\beta_2}{2}t + \frac{\alpha\beta_2}{12}xy\right), \\ T = \left(0, 0, 1, \frac{\beta_1}{2}x, \frac{\beta_2}{2}y\right), \quad Z_1 = e_4, \quad Z_2 = e_5, \end{gathered} \tag{5}$$

и $[X, Y] = \alpha T$, $[X, T] = \beta_1 Z_1$, $[Y, T] = \beta_2 Z_2$. Алгебра Ли, порожденная векторными полями $\{X, Y, T, Z_1, Z_2\}$, называется *алгеброй Картана* (ср. с [13]).

Векторные поля X, Y горизонтальные, и их линейная оболочка $\mathscr{L}\{X, Y\}$ формирует пространство $[\cdot,\cdot]$-порождающих векторных полей на $\mathbb{K}$. *Горизонтальный отрезок* интегральной линии горизонтального векторного поля $a_1X + a_2Y$, $a_i = \mathrm{const}$, начинающийся в точке $u \in \mathbb{K}$, определяется как

$$\exp\big(s(a_1X + a_2Y)\big)(u) = u \cdot (sa) = P_u^{\mathbb{K}} sa, \quad s \in [0, 1],\ a_i = \mathrm{const},\ a_1^2 + a_2^2 \neq 0,$$

где $a = (a_1, a_2, 0, 0, 0)$, и так же, как и выше, можно определить понятие *горизонтальной ломаной* на $\mathbb{K}$.

Действие однородной подгруппы растяжений $\delta_\tau : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ определяется по правилу

$$\delta_\tau : (x, y, t, z_1, z_2) \to (\tau x, \tau y, \tau^2 t, \tau^3 z_1, \tau^3 z_2),$$

и для любой точки $u = (x, y, t, z_1, z_2) \in \mathbb{K}$ и любой однопараметрической подгруппы

$$\exp(s(a_1X + a_2Y + a_3T + a_4Z_1 + a_5Z_2))(u) = P_u^{\mathbb{K}}(sa), \quad a = (a_1, \dots, a_5),\ s \in \mathbb{R},$$

имеем

$$\delta_\lambda\big(P_u^{\mathbb{K}}(sa)\big) = P_{\delta_\lambda u}^{\mathbb{K}}(s\delta_\lambda a). \tag{6}$$

С группой Картана $\mathbb{K}$ тесно связана первая группа Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$, которая определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t), индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3), при помощи следующей таблицы коммутаторов:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha > 0, \\ [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа [27] и таблицу (7), получаем аналитическое выражение операции левого сдвига $P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} w'$ произвольного элемента $w' = (x', y', t') \in \mathbb{H}_\alpha^1$ на произвольный элемент $w = (x, y, t) \in \mathbb{H}_\alpha^1$:

$$P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} w' = w \cdot w' = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y)\right). \tag{8}$$

Используя (8), получаем аналитическое выражение для базиса левоинвариантных векторных полей (базис Якоби [5]) группы $\mathbb{H}^1_\alpha$ в каждой точке (x, y, t):

$$X = \left(1, 0, -\frac{\alpha}{2}y\right), \quad Y = \left(0, 1, \frac{\alpha}{2}x\right), \quad T = (0,0,1) = e_3. \tag{9}$$

Векторные поля X, Y горизонтальные, и их линейная оболочка $\mathscr{L}\{X, Y\}$ формирует пространство $[\cdot,\cdot]$-порождающих векторных полей на $\mathbb{H}^1_\alpha$. Интегральная линия векторного поля $aX + bY + cT$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, с началом в точке $M \in \mathbb{H}^1_\alpha$ является обычной прямой линией, а множество

$$\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M) = \Big\{ \bigcup_{a,b,s\in\mathbb{R}} \exp(s(aX + bY))(M) \mid a^2 + b^2 = 1 \Big\}$$

является обычной плоскостью в 3-мерном пространстве (*горизонтальная плоскость в точке* M).

Приведем некоторые свойства группы $\mathbb{H}^1_\alpha$, которые будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 5 [23]. $N_{\mathbb{H}^1_\alpha} = 3$.

Доказательство. 1^0. Каждая точка $M = (x_0, y_0, 0)$ соединяется с $O = (0,0,0)$ одним горизонтальным отрезком.

2^0. Рассмотрим точку $M = (x_0, y_0, t_0)$, где $\left(x_0^2 + y_0^2\right)t_0 \neq 0$. Для определенности положим $t_0 > 0$. Горизонтальные плоскости $\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M)$ и $\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O)$ не параллельны, поэтому

$$l_{O,M} = \Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M) \cap \Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O),$$

где $l_{O,M}$ — прямая линия. Имеем $O \notin l_{O,M}$. Рассмотрим точку $Q \in l_{O,M}$. Тогда O, M соединяются горизонтальной 2-ломаной $[OQ] \cup [QM]$, где $[OQ]$, $[QM]$ — обычные отрезки. Таким образом, точки M и O соединяются бесконечным числом горизонтальных 2-ломаных $[OQ] \cup [QM]$, где Q — произвольная точка прямой $l_{O,M}$.

3^0. Рассмотрим точку $W = (0, 0, t_0)$, $t_0 \neq 0$. Тогда O и W соединяются горизонтальной 3-ломаной $[OQ] \cup [QM] \cup [MW]$, где $[OQ]$, $[QM]$ из п. 2^0, $M \in \Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(W)$, а $[MW]$ — обычный прямолинейный отрезок. Понятно, что не существует горизонтальной 2-ломаной, соединяющей O и W.

Теорема 5 доказана.

Замечание 6 (см. п. 2^0 теоремы 5). Плоскость $\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M)$ определяется в системе координат (x, y, t) евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ уравнением

$$\frac{\alpha}{2}y_0x - \frac{\alpha}{2}x_0y + t - t_0 = 0,$$

и таким образом уравнение прямой линии $l_{O,M}$ записывается как

$$-y_0x + x_0y + \frac{2}{\alpha}t_0 = 0. \tag{10}$$

Вектор $(x_0, y_0, 0)$ является направляющим вектором для прямой $l_{O,M}$. Имеем

$$\frac{2|t_0|}{\alpha} = \rho(l_{O,M}, l_0)\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \tag{11}$$

где $\rho(l_{O,M}, l_0)$ — обычное евклидово расстояние между прямыми $l_{O,M}$ и

$$l_0 : -y_0x + x_0y = 0. \tag{12}$$

Из (10), (11) вытекает, что чем меньше $x_0^2 + y_0^2$, тем дальше прямая $l_{O,M}$ находится от прямой l_0 при фиксированном значении t_0. Пусть для определенности $t_0 > 0$, и пусть векторы $u = (x, y)$, $v = (x_0, y_0)$ образуют положительно ориентированный базис евклидовой плоскости, где пара (x, y) удовлетворяет (10). Тогда

$$t_0 = \frac{\alpha}{2} S(u, v),$$

где $S(u, v)$ — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы u, v.

Замечание 7 (см. п. 3^0 теоремы 5). Пусть

$$Q = \exp(xX + yY)(O), \quad M = \exp(aX + bY)(Q), \quad W = \exp(\widetilde{x}X + \widetilde{y}Y)(M),$$

тогда

$$\begin{aligned} W = (0,0,t_0) &= (x,y,0)(a,b,0)(\widetilde{x},\widetilde{y},0) = (x_0,y_0,t_0)(\widetilde{x},\widetilde{y},0) \\ &= \Big(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya)\Big)(\widetilde{x},\widetilde{y},0) \\ &= \Big(x + a + \widetilde{x}, y + b + \widetilde{y}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}((x+a)\widetilde{y} - (y+b)\widetilde{x})\Big) \\ &= \Big(x_0 + \widetilde{x}, y_0 + \widetilde{y}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}(x_0\widetilde{y} - y_0\widetilde{x})\Big), \end{aligned}$$

таким образом,

$$(x+a)\widetilde{y} - (y+b)\widetilde{x} = x_0\widetilde{y} - y_0\widetilde{x} = 0. \tag{13}$$

Следовательно, для любых x_0, y_0, t_0, $(x_0^2 + y_0^2)t_0 \neq 0$, существует горизонтальная 3-ломаная, соединяющая точки O и W с вершинами

$$O, \quad Q = (x, y, 0), \quad M = (x_0, y_0, t_0), \quad W = (0, 0, t_0),$$

где числа x и y, $x^2 + y^2 \neq 0$, удовлетворяют соотношению (10).

Лемма 8 [23]. *Зафиксируем точку $M = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $m_1 \neq 0$. Тогда для каждого x существуют единственные значения a, y, b такие, что $(x, y, 0)(a, b, 0) = (m_1, m_2, m_3)$.*

§ 3. Горизонтальные 3- и 4-ломаные на $\mathbb{K}$. Доказательство теоремы 3

Утверждение 9. *Любая точка вида $M = (0, 0, t_0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, где $t_0(m_4^2 + m_5^2) \neq 0$, соединяется с началом координат O горизонтальной 3-ломаной.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $t_0 > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &(x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) \\ &= \Big(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\Big)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) \\ &= \Big(x + a + \widetilde{x}, y + b + \widetilde{y}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}((x+a)\widetilde{y} - (y+b)\widetilde{x}), \\ &\frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_1}{4}\widetilde{x}(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x + a - \widetilde{x})((x+a)\widetilde{y} - (y+b)\widetilde{x}), \\ &\frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_2}{4}\widetilde{y}(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_2}{12}(y + b - \widetilde{y})((x+a)\widetilde{y} - (y+b)\widetilde{x})\Big). \end{aligned} \tag{14}$$

Полагаем, что векторы $u = (x, y)$, $v = (a, b)$ образуют положительно ориентированный базис на плоскости.

Имеем $x + a + \widetilde{x} = 0$, $y + b + \widetilde{y} = 0$. Пусть

$$\begin{cases} x_0 = x + a = -\widetilde{x}, \\ y_0 = y + b = -\widetilde{y}, \end{cases} \quad x_0^2 + y_0^2 \neq 0.$$

Используя (13), перепишем (14) в виде

$$\begin{aligned}
&(x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) \\
&\quad = \Big(0, 0, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_1}{4}\widetilde{x}(xb - ya), \\
&\qquad \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_2}{4}\widetilde{y}(xb - ya)\Big) \\
&\quad = \Big(0, 0, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{4}(x + a)(xb - ya), \\
&\qquad \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_2}{4}(y + b)(xb - ya)\Big) \\
&\quad = \Big(0, 0, t_0, \frac{\beta_1}{3}(2x_0 - a)t_0, \frac{\beta_2}{3}(2y_0 - b)t_0\Big). \qquad (15)
\end{aligned}$$

Зафиксируем

$$t_0 = \frac{\alpha}{2}(xb - ya).$$

По построению точка с координатами (x, y) принадлежит прямой (10), откуда с учетом тождества $y_0(x + a) - x_0(y + b) = 0$ получаем

$$y_0 a - x_0 b + \frac{2}{\alpha} t_0 = 0.$$

Учитывая уравнение (10), выводим, что точка с координатами $(2x_0 - a, 2y_0 - b)$ принадлежит прямой (10). При фиксированных значениях x_0, y_0, t_0 все точки

$$(2x_0 - a, 2y_0 - b), \quad \text{где} \quad y_0 a - x_0 b + \frac{2}{\alpha} t_0 = 0$$

(см. (15)), образуют прямую (10). Тогда (см. замечание 6) можно сделать вывод, что при фиксированном значении t_0 все точки $M^{a,b}_{\tau,x_0,y_0} = (2\tau x_0 - a, 2\tau y_0 - b)$, $0 < \tau < \infty$, где $\tau y_0 a - \tau x_0 b + \frac{2}{\alpha} t_0 = 0$ (см. (15)), заполняют открытую полуплоскость $P \subset \mathbb{R}^2$ такую, что

$$\partial P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_0 x - x_0 y = 0\}.$$

Произвольно меняя направление (x_0, y_0), для фиксированного значения t_0 получим, что

$$\bigcup_{\substack{\tau, x_0, y_0, a, b, \\ \tau \in (0,\infty),\, x_0^2 + y_0^2 > 0, \\ \tau y_0 a - \tau x_0 b + \frac{2}{\alpha} t_0 = 0}} M^{a,b}_{\tau,x_0,y_0} = \mathbb{R}^2 \setminus O',$$

где $O' = (0, 0)$.

Таким образом, для любой тройки чисел t_0, m_4, m_5, где $t_0\big(m_4^2 + m_5^2\big) \neq 0$, найдутся значения $x, y, a, b, \widetilde{x}, \widetilde{y}$ такие, что

$$(x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) = (0, 0, t_0, m_4, m_5).$$

Утверждение 9 доказано.

Следствие 10. *Точка вида* $M = (0, 0, t_0, 0, 0) \in \mathbb{K}$, $t_0 \neq 0$, *не может быть соединена с* O *горизонтальной* 3*-ломаной.*

Доказательство. В нашей ситуации, используя (15), получаем $2x_0 - a = 0$, $2y_0 - b = 0$, стало быть, векторы (x, y), (a, b) коллинеарны. Следствие 10 доказано.

Следствие 11. *Любая точка* $M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $\big(m_1^2 + m_2^2\big)m_3 \neq 0$, *может быть соединена с точкой* O *горизонтальной* 4*-ломаной.*

Доказательство. Зафиксируем числа m_1, m_2, m_3 такие, что $\big(m_1^2+m_2^2\big)m_3 \neq 0$. Имеем

$$(0, 0, m_3, m_4', m_5')(m_1, m_2, 0, 0, 0) = \left(m_1, m_2, m_3, m_4' - \frac{\beta_1}{2}m_1m_3, m_5' - \frac{\beta_2}{2}m_2m_3\right),$$

$$(m_1, m_2, 0, 0, 0)(0, 0, m_3, m_4', m_5') = \left(m_1, m_2, m_3, m_4' + \frac{\beta_1}{2}m_1m_3, m_5' + \frac{\beta_2}{2}m_2m_3\right).$$

Рассмотрим системы

$$\begin{cases} m_4' - \frac{\beta_1}{2}m_1m_3 = m_4, \\ m_5' - \frac{\beta_2}{2}m_2m_3 = m_5, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} m_4' + \frac{\beta_1}{2}m_1m_3 = m_4, \\ m_5' + \frac{\beta_2}{2}m_2m_3 = m_5. \end{cases} \tag{17}$$

Всегда найдутся числа m_4', m_5', $(m_4')^2 + (m_5')^2 \neq 0$, такие, что для любых m_4, m_5 выполняется или (16), или (17). Из утверждения 9 следует, что найдется горизонтальная 3-ломаная, соединяющая точки O и $(0, 0, m_3, m_4', m_5')$.

Следствие 11 доказано.

Следствие 12. *Любая точка* $M = (0, 0, m_3, 0, 0) \in \mathbb{K}$, $m_3 \neq 0$, *может быть соединена с точкой* O *горизонтальной* 5*-ломаной.*

Доказательство. Следствие 12 вытекает из формулы

$$(-x_0, 0, 0, 0, 0)(0, 0, m_3, \beta_1 x_0 m_3, 0)(x_0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, m_3, 0, 0) \tag{18}$$

и утверждения 9.

Следствие 12 доказано.

Утверждение 13. *Любая точка* $M = (0, 0, 0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $m_4^2 + m_5^2 \neq 0$, *может быть соединена с точкой* O *горизонтальной* 4*-ломаной* $L_4(O, M)$.

Доказательство. Пусть точки

$$\begin{gathered} O = (0, 0, 0, 0, 0), \quad M_1 = (x, y, 0, 0, 0), \quad M_2 = M_1 \cdot (a, b, 0, 0, 0), \\ M_3 = M_2 \cdot (\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0), \quad M_4 = M_3 \cdot (\widetilde{a}, \widetilde{b}, 0, 0, 0) \end{gathered} \tag{19}$$

являются вершинами ломаной $L_4(O, M)$. Имеем

$$\begin{aligned} M_2 &= \left(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\right), \\ M_4 &= M_2 \cdot \left(\widetilde{x} + \widetilde{a}, \widetilde{y} + \widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_2}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Так как $M_4 = M = (0,0,0,m_4,m_5)$, то

$$x + a + \widetilde{x} + \widetilde{a} = 0, \quad y + b + \widetilde{y} + \widetilde{b} = 0. \tag{21}$$

Полагаем

$$u = (x,y), \quad v = (a,b), \quad \widetilde{u} = (\widetilde{x},\widetilde{y}), \quad \widetilde{v} = (\widetilde{a},\widetilde{b}). \tag{22}$$

Тогда можно переписать (21) в виде

$$u + v + \widetilde{u} + \widetilde{v} = 0. \tag{23}$$

В дальнейшем для удобства будем рассматривать упорядоченную пару векторов u, v, образующих положительно ориентированный базис евклидовой плоскости.

Из (23) следует, что

$$S(u+v, \widetilde{u}+\widetilde{v}) = 0, \tag{24}$$

и, таким образом, третья координата точки M имеет вид

$$\frac{\alpha}{2}(S(u,v) + S(\widetilde{u},\widetilde{v})).$$

Для любого $u \neq 0$ найдутся векторы $v, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ такие, что

$$S(u,v) + S(\widetilde{u},\widetilde{v}) = 0. \tag{25}$$

Действительно, на евклидовой плоскости

— проводим прямую линию $l_{u,v}$ через точку $M_2' = (x+a, y+b)$ и начало координат $O' \in \mathbb{R}^2$,
— проводим прямую линию l, $l \parallel l_{u,v}$, через точку $M_1' = (x,y)$,
— выбираем произвольным образом точку $M_3' \in l$, тогда $\widetilde{u} = \overrightarrow{M_2'M_3'}$, $\widetilde{v} = \overrightarrow{M_3'O'}$.

В таком случае тождество (25) выполняется и третья координата точки M равна 0, а две последние координаты точки M равны соответственно

$$z_1 = z_1(u,v,\widetilde{u},\widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - \widetilde{x} + \widetilde{a} - a)(xb - ya) = \frac{\alpha\beta_1}{6}(x + \widetilde{a})(xb - ya),$$

$$z_2 = z_2(u,v,\widetilde{u},\widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - \widetilde{y} + \widetilde{b} - b)(xb - ya) = \frac{\alpha\beta_2}{6}(y + \widetilde{b})(xb - ya).$$

Например, пусть

$$u = (1,0), \quad v = (0,1), \quad \widetilde{u} = (1,0), \quad \widetilde{v} = (-2,-1),$$

тогда

$$\begin{aligned}(1,0,0,0,0)\,&(0,1,0,0,0)\,(1,0,0,0,0)\,(-2,-1,0,0,0)\\ &= \left(1,1,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha\beta_1}{12},-\frac{\alpha\beta_1}{12}\right)\left(-1,-1,-\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha\beta_1}{4},-\frac{\alpha\beta_1}{12}\right)\\ &= \left(0,0,0,-\frac{\alpha\beta_1}{6},-\frac{\alpha\beta_1}{6}\right).\end{aligned}$$

Обозначим через A_φ матрицу вращения на угол $\varphi \in [0,2\pi)$ вокруг начала координат O' в евклидовой плоскости. Тогда

$$A_\varphi u = (x_\varphi, y_\varphi), \ A_\varphi v = (a_\varphi, b_\varphi), \ A_\varphi \widetilde{u} = (\widetilde{x}_\varphi, \widetilde{y}_\varphi), \ A_\varphi \widetilde{v} = (\widetilde{a}_\varphi, \widetilde{b}_\varphi)$$

и

$$A_\varphi u + A_\varphi v + A_\varphi \widetilde{u} + A_\varphi \widetilde{v} = 0, \quad S(A_\varphi u, A_\varphi v) = S(u,v) = xb - ya = S_0,$$

$$\frac{\alpha}{2}(S(A_\varphi u, A_\varphi v) + S(A_\varphi \widetilde{u}, A_\varphi \widetilde{v}) + S(A_\varphi u + A_\varphi v, A_\varphi \widetilde{u} + A_\varphi \widetilde{v})) = 0$$

(см. (24), (25)). Далее,

$$z_1^\varphi = z_1(A_\varphi u, A_\varphi v, A_\varphi \widetilde{u}, A_\varphi \widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_1}{6}(x_\varphi + \widetilde{a}_\varphi)S_0,$$

$$z_2^\varphi = z_2(A_\varphi u, A_\varphi v, A_\varphi \widetilde{u}, A_\varphi \widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_2}{6}(y_\varphi + \widetilde{b}_\varphi)S_0.$$

Пусть $r = |u + \widetilde{v}| = |A_\varphi u + A_\varphi \widetilde{v}|$, тогда координаты z_1^φ, z_2^φ удовлетворяют уравнению эллипса

$$\frac{\left(z_1^\varphi\right)^2}{\beta_1^2} + \frac{\left(z_2^\varphi\right)^2}{\beta_2^2} = \frac{(\alpha r S_0)^2}{36}$$

в евклидовой плоскости с координатами (z_1, z_2). Следовательно, любая точка $M_\varphi = \left(0,0,0,z_1^\varphi, z_2^\varphi\right)$ соединяется с началом координат O горизонтальной ломаной $L_4(O, M_\varphi)$. Действуя подгруппой растяжений δ_τ на множество $\bigcup\limits_{\varphi\in[0,2\pi)} M_\varphi$, получаем утверждение 13.

Утверждение 13 доказано.

Следствие 14. *Любая точка $M = (m_1, m_2, 0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $\left(m_1^2+m_2^2\right)\left(m_4^2+m_5^2\right) \neq 0$, может быть соединена с началом координат O некоторой горизонтальной 5-ломаной.*

Замечание 15. Никакая точка $(0,0,0,m_4,m_5)$, $m_4^2 + m_5^2 \neq 0$, не может быть соединена с началом координат O горизонтальной 3-ломаной, так как на первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$ нет замкнутых горизонтальных 3-ломаных.

Теорема 16. *Любая точка $M = (0,0,m_3,0,0) \in \mathbb{K}$, $m_3 \neq 0$, соединяется с началом координат O некоторой горизонтальной 4-ломаной $L_4(O, M)$.*

Доказательство. Рассмотрим вершины O, M_1, M_2, M_3, M_4 горизонтальной 4-ломаной $L_4(O,M)$ (см. (19)). Далее будем использовать обозначения и формулы (20)–(23) из утверждения 13. Учитывая (24), получаем

$$\frac{\alpha}{2}(S(u,v) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v})) = m_3.$$

Имеем $M_4 = (0,0,m_3,z_1,z_2)$, где

$$z_1 = \frac{\alpha\beta_1}{12}(x-a)(xb-ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) \\ + \frac{\alpha\beta_1}{4}((x+a)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{x} + \widetilde{a})(xb - ya)), \tag{26}$$

$$z_2 = \frac{\alpha\beta_2}{12}(y-b)(xb-ya) + \frac{\alpha\beta_2}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) \\ + \frac{\alpha\beta_2}{4}((y+b)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{y} + \widetilde{b})(xb - ya)). \tag{27}$$

Так как $M_4 = M$, векторы $u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ таковы, что $z_1 = z_2 = 0$, откуда, используя (26), (27), получаем

$$(xb - ya)(x - a - 3(\widetilde{x} + \widetilde{a})) + (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{x} - \widetilde{a} + 3(x + a)) = 0, \tag{28}$$

$$(xb - ya)(y - b - 3(\widetilde{y} + \widetilde{b})) + (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{y} - \widetilde{b} + 3(y + b)) = 0. \tag{29}$$

Используя (21) и обозначения

$$x_0 = x + a = -\widetilde{x} - \widetilde{a}, \quad y_0 = y + b = -\widetilde{y} - \widetilde{b}, \quad w = (x_0, y_0) = u + v = -\widetilde{u} - \widetilde{v},$$

перепишем (28), (29) в виде

$$S(u,v)(x_0 + x) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v})(x_0 - \widetilde{a}) = S(u,w)(x_0 + x) - S(w, \widetilde{v})(x_0 - \widetilde{a}) = 0, \tag{30}$$

$$S(u,v)(y_0 + y) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v})(y_0 - \widetilde{b}) = S(u,w)(y_0 + y) - S(w, \widetilde{v})(y_0 - \widetilde{b}) = 0. \tag{31}$$

Так как $L_4(O, M)$ — горизонтальная 4-ломаная, должно быть

$$S(u,w)S(w,\widetilde{v}) \neq 0.$$

В этом случае из (30), (31) получаем

$$w + u = \frac{S(w,\widetilde{v})}{S(u,w)}(w - \widetilde{v}) = \tau(w - \widetilde{v}), \quad \frac{S(w,\widetilde{v})}{S(u,w)} = \tau.$$

С другой стороны,

$$\frac{S(w,\widetilde{v})}{S(u,w)} = \frac{S(w,\widetilde{v})}{S(\tau(w - \widetilde{v}) - w, w)} = \frac{1}{\tau},$$

поэтому $\tau^2 = 1$.

Пусть $\tau = 1$. Тогда $u = -\widetilde{v}$, откуда $v = -\widetilde{u}$, что противоречит тому, что $L_4(O, M)$ является горизонтальной 4-ломаной.

Пусть $\tau = -1$. Тогда

$$2w = \widetilde{v} - u. \tag{32}$$

Рассмотрим, например,

$$u = (1,0,0,0,0), \; v = (0,1,0,0,0) \Rightarrow w = (1,1,0,0,0).$$

Используя (32), выводим

$$\widetilde{v} = (3,2,0,0,0), \quad \widetilde{u} = (-4,-3,0,0,0)$$

и, применяя (4), получаем

$$\begin{aligned}&(1,0,0,0,0)(0,1,0,0,0)(-4,-3,0,0,0)(3,2,0,0,0)\\ &\quad = \left(1, 1, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha\beta_1}{12}, -\frac{\alpha\beta_1}{12}\right)\left(-1, -1, \frac{\alpha}{2}, -\frac{7\alpha\beta_1}{12}, -\frac{5\alpha\beta_1}{12}\right) = (0,0,\alpha,0,0).\end{aligned} \tag{33}$$

Принимая во внимание (33), действуя однопараметрической группой растяжений δ_τ на $\mathbb{K}$, получаем теорему 16.

Теорема 16 доказана.

Теорема 17. *Любая точка* $M = (m_1, m_2, 0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $\big(m_1^2 + m_2^2\big)\big(m_4^2 + m_5^2\big) \neq 0$, *соединяется с началом координат* O *некоторой горизонтальной 4-ломаной* $L_4(O, M)$.

Доказательство. Рассмотрим вершины O, M_1, M_2, M_3, M_4 ломаной $L_4(O,M)$ (см. (19)). Имеем

$$\begin{aligned}
M_4 &= (x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0)(\widetilde{a}, \widetilde{b}, 0, 0, 0) \\
&= \bigg(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\bigg) \\
&\cdot \bigg(\widetilde{x} + \widetilde{a}, \widetilde{y} + \widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_2}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})\bigg) \\
= \bigg(& x+a+\widetilde{x}+\widetilde{a}, y+b+\widetilde{y}+\widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(xb-ya)+\frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})+\frac{\alpha}{2}((x+a)(\widetilde{y}+\widetilde{b})-(y+b)(\widetilde{x}+\widetilde{a})), \\
& \frac{\alpha\beta_1}{12}(x-a)(xb-ya)+\frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x}-\widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})+\frac{\alpha\beta_1}{4}((x+a)(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})-(\widetilde{x}+\widetilde{a})(xb-ya)) \\
& \quad + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x + a - \widetilde{x} - \widetilde{a})((x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a})), \\
& \frac{\alpha\beta_1}{12}(y-b)(xb-ya)+\frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{y}-\widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})+\frac{\alpha\beta_1}{4}((y+b)(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})-(\widetilde{y}+\widetilde{b})(xb-ya)) \\
& \quad + \frac{\alpha\beta_1}{12}(y + b - \widetilde{y} - \widetilde{b})((x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}))\bigg).
\end{aligned} \tag{34}$$

Так как $M_4 = M$, то

$$x + a + \widetilde{x} + \widetilde{a} = m_1, \quad y + b + \widetilde{y} + \widetilde{b} = m_2, \tag{35}$$

$$0 = (xb - ya) + (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + (x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}). \tag{36}$$

Пусть $m = (m_1, m_2)$. Далее будем использовать обозначения (22). Выберем векторы $u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ так, чтобы

$$u + v = \tau m,\ \tau > 0,\ \tau \neq 1, \quad u + v + \widetilde{u} + \widetilde{v} = m, \quad S(u, v) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = 0. \tag{37}$$

При этом рассматриваем такие векторы u, v, что $S(u, v) > 0$, откуда вытекает, что $S(\widetilde{u}, \widetilde{v}) < 0$, следовательно, упорядоченный набор векторов $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ образует отрицательно ориентированный базис евклидовой плоскости с началом координат в точке O'.

Используя (37), получаем

$$(x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
m_4 &= \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) \\
&\quad + \frac{\alpha\beta_1}{4}((x + a)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{x} + \widetilde{a})(xb - ya)) = \frac{\alpha\beta_1 S(u, v)}{6}(x + \widetilde{a} - 2m_1),
\end{aligned}$$

$$m_5 = \frac{\alpha\beta_1}{12}(y-b)(xb-ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{y}-\widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha\beta_1}{4}((y+b)(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{y}+\widetilde{b})(xb-ya)) = \frac{\alpha\beta_2 S(u,v)}{6}(y+\widetilde{b}-2m_2).$$

Зафиксируем $m \neq 0$.

1^0. Зафиксируем $\tau > 1$ и $S = S(u,v)$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{O'M'_S} = u + \widetilde{v}$. Множество $\bigcup\limits_{u,\widetilde{v}} M'_S$ представляет собой прямую L_S, расположенную на расстоянии

$$\frac{S}{\tau(\tau-1)|m|} \tag{38}$$

от начала координат O'.

Будем менять векторы u, v так, чтобы величина $S = S(u,v)$ принимала все значения из промежутка $(0,\infty)$; тогда (см. (38)) множество $\bigcup\limits_{S\in(0,\infty)} L_S$ совпадает с открытой полуплоскостью Π_1 такой, что

$$\partial\Pi_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid m_2 x - m_1 y = 0\}.$$

2^0. Зафиксируем $\tau \in (0,1)$ и $S = S(u,v)$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{O'M'_S} = u + \widetilde{v}$. Множество $\bigcup\limits_{u,\widetilde{v}} M'_S$ представляет собой прямую L_S, расположенную на расстоянии

$$\frac{S}{\tau(1-\tau)|m|} \tag{39}$$

от начала координат O'.

Будем менять векторы u, v так, чтобы величина $S = S(u,v)$ принимала все значения из промежутка $(0,\infty)$; тогда (см. (39)) множество $\bigcup\limits_{S\in(0,\infty)} L_S$ совпадает с открытой полуплоскостью $\Pi_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Pi_1}$.

3^0. Если $S(u,v) = 0$, то $u \parallel m$. Полагаем $\widetilde{u} = \widetilde{v} = 0$, $u = \overrightarrow{O'M''}$. Тогда множество $\bigcup M''$ совпадает с прямой $m_2 x - m_1 y = 0$.

Учитывая пп. 1^0–3^0, можем сделать вывод о том, что отображение

$$(x,y,a,b,\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{a},\widetilde{b}) \to (m_4, m_5) = \left(\frac{\alpha\beta_1 S(u,v)}{6}(x+\widetilde{a}-2m_1), \frac{\alpha\beta_2 S(u,v)}{6}(y+\widetilde{b}-2m_2)\right),$$

где $x,y,a,b,\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{a},\widetilde{b}$ удовлетворяют условиям (35), (36), является сюръекцией на все $\mathbb{R}^2$ при любых фиксированных m_1, m_2, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$.

Таким образом, теорема 17 доказана.

Доказательство теоремы 3. Из утверждений 9, 13, теорем 16, 17 и следствия 11 вытекает, что любая точка из $\mathbb{K}$ может быть соединена с началом координат O некоторой горизонтальной k-ломаной, где $k \leq 4$. Используя действия однопараметрической группы растяжений и левые сдвиги (см. (6)), получаем теорему 3.

§ 4. Замкнутые горизонтальные ломаные на $\mathbb{K}$. Доказательство теоремы 4

Свойство 18. *Не существует замкнутой горизонтальной* 4-*ломаной на* $\mathbb{K}$.

Доказательство. Предположим, что замкнутая горизонтальная 4-ломаная L существует на $\mathbb{K}$. Пусть вершины ломаной L совпадают с точками

$$M_1 = O, \quad M_2 = (x, y, 0, 0, 0), \quad M_3 = (x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0),$$

$$M_4 = (x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0).$$

Так как L замкнута, имеем $M_4 = (m_1, m_2, 0, 0, 0)$, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$ и $x + a + \widetilde{x} = m_1$, $y + b + \widetilde{y} = m_2$.

Поскольку третья координата M_4 равна 0, используя (14), выводим

$$((x + a)\widetilde{y} - (y + b)\widetilde{x}) = -(xb - ya).$$

Принимая во внимание равенство нулю двух последних координат точки M_4 (см. (14)), получаем

$$0 = (x - a)(xb - ya) - 3\widetilde{x}(xb - ya) - (x + a - \widetilde{x})(xb - ya) = (xb - ya)(x - m_1), \quad (40)$$

$$0 = (y - b)(xb - ya) - 3\widetilde{y}(xb - ya) - (y + b - \widetilde{y})(xb - ya) = (xb - ya)(y - m_2). \quad (41)$$

Так как векторы (x, y), (a, b) не должны быть коллинеарны, то $(xb - ya) \neq 0$, но тогда из (40), (41) вытекает, что $x = m_1$, $y = m_2$; противоречие.

Свойство 18 доказано.

Свойство 19. *Не существует замкнутой горизонтальной* 5-*ломаной на* $\mathbb{K}$.

Доказательство. Предположим, что существует замкнутая горизонтальная 5-ломаная L на $\mathbb{K}$ с вершинами O, M_1, M_2, M_3, M_4 (см. (19)). Пусть $M_4 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$.

Так как L — замкнутая горизонтальная 5-ломаная, то $m_3 = m_4 = m_5 = 0$. Используя (34), получаем

$$\begin{aligned} M_5 = \biggl(& x + a + \widetilde{x} + \widetilde{a}, y + b + \widetilde{y} + \widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha}{2}A, \\ & \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha\beta_1}{4}((x + a)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{x} + \widetilde{a})(xb - ya)) \\ & \qquad + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x + a - \widetilde{x} - \widetilde{a})A, \\ & \frac{\alpha\beta_1}{12}(y - b)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha\beta_1}{4}((y + b)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{y} + \widetilde{b})(xb - ya)) \\ & \qquad + \frac{\alpha\beta_1}{12}(y + b - \widetilde{y} - \widetilde{b})A \biggr). \end{aligned}$$

Так как $m_3 = 0$, то

$$A = (x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}) = -(xb - ya) - (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}). \quad (42)$$

Используя (42) в тождествах $m_4 = m_5 = 0$, получаем

$$\begin{cases} (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{x} + x + a) - (xb - ya)(a + \widetilde{x} + \widetilde{a}) = 0, \\ (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{y} + y + b) - (xb - ya)(b + \widetilde{y} + \widetilde{b}) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Поскольку L — замкнутая горизонтальная 5-ломаная, должно выполняться $(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})(xb-ya)\neq 0$ (в противном случае или векторы (x,y), (a,b), или векторы $(\widetilde{x},\widetilde{y})$, $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ будут коллинеарны), и таким образом исследование системы (43) сводится к следующим двум случаям.

1^0. $(\widetilde{x}+x+a)(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})\neq 0$, $(\widetilde{y}+y+b)(b+\widetilde{y}+\widetilde{b})\neq 0$. Используя (43), получаем

$$\frac{\widetilde{x}+x+a}{a+\widetilde{x}+\widetilde{a}}=\frac{\widetilde{y}+y+b}{b+\widetilde{y}+\widetilde{b}}\Leftrightarrow(\widetilde{x}+x+a)(b+\widetilde{y}+\widetilde{b})-(\widetilde{y}+y+b)(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})=0.$$

Последнее тождество может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}0&=(\widetilde{x}+x+a)(b+\widetilde{y}+\widetilde{b})-(\widetilde{y}+y+b)(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})\\&=(xb-ya)+(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{a}\widetilde{y})+x\widetilde{y}+x\widetilde{b}+a\widetilde{b}-\widetilde{x}y-\widetilde{a}y-\widetilde{a}b.\end{aligned}\tag{44}$$

С другой стороны,

$$(x+a)(\widetilde{y}+\widetilde{b})-(y+b)(\widetilde{x}+\widetilde{a})=x\widetilde{y}+a\widetilde{y}+x\widetilde{b}+a\widetilde{b}-\widetilde{x}y-b\widetilde{x}-\widetilde{a}y-\widetilde{a}b.\tag{45}$$

Из (42), (44), (45) получаем $a\widetilde{y}-b\widetilde{x}=0$, но это влечет коллинеарность векторов (a,b), $(\widetilde{x},\widetilde{y})$, что, в свою очередь, противоречит тому, что L является замкнутой горизонтальной 5-ломаной.

2^0. Пусть

$$\widetilde{x}+x+a=0.\tag{46}$$

Принимая во внимание $xb-ya\neq 0$, получаем

$$a+\widetilde{x}+\widetilde{a}=0\tag{47}$$

и

$$x=\widetilde{a}.\tag{48}$$

Используя (42), (46)–(48), выводим

$$\begin{aligned}0&=(x+a)(\widetilde{y}+\widetilde{b})-(y+b)(\widetilde{x}+\widetilde{a})+(xb-ya)+(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})\\&=b(x-\widetilde{x}-\widetilde{a})-y(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})+\widetilde{b}(\widetilde{x}+x+a)+\widetilde{y}(-\widetilde{a}+a+x)=-b\widetilde{x}+\widetilde{y}a,\end{aligned}$$

что влечет коллинеарность векторов $(\widetilde{x},\widetilde{y})$, (a,b), а это, в свою очередь, противоречит тому, что L является замкнутой горизонтальной 5-ломаной. Случай $\widetilde{y}+y+b=0$ исследуется аналогично разобранному выше.

Свойство 19 доказано.

Определение 20 (ср. с [28, 29]). Пусть $\mathscr{G}$ — гладкое многообразие, $\mathscr{G}\subset\mathbb{K}$, $2\leq\dim\mathscr{G}<5$. Точка $p\in\mathscr{G}$ называется *характеристической*, если плоскость, натянутая на векторы $X(p)$, $Y(p)$, содержится в касательном пространстве $T_p\mathscr{G}$. Обозначим через $\mathrm{Char}(\mathscr{G})$ множество всех характеристических точек многообразия $\mathscr{G}$.

Любая точка $M'\in\mathbb{K}$, которая соединяется с O горизонтальной 2-ломаной, имеет вид

$$M'=\exp(aX+bY)\circ\exp(xX+yY)(O)=(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5)$$

для некоторых чисел a,b,x,y, $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\neq 0$. Пусть

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(M_0)=\Big\{\bigcup_{a,b,s\in\mathbb{R}}\exp(s(aX+bY))(M_0)\mid a^2+b^2=1\Big\},\quad M_0\in\mathbb{K}.$$

Отметим, что $\Gamma_{\mathbb{K}}(O)$ является (в обычном смысле) 2-мерной плоскостью в $\mathbb{R}^5$. Обозначим $\mathscr{P}(O)=\Gamma_{\mathbb{K}}(O)\cup\bigcup M'$.

Утверждение 21. 1^0) $\operatorname{Char}\big(\Gamma_{\mathbb{K}}(O)\big) = O$,

2^0) *$\mathscr{P}(O)$ является 4-мерной гладкой поверхностью без самопересечений в $\mathbb{R}^5$ с координатами* $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$,

3^0) $\Gamma_{\mathbb{K}}(O) \subseteq \operatorname{Char}(\mathscr{P}(O))$.

Доказательство. П. 1^0 следует из координатной записи векторных полей X, Y.

П. 2^0. Пусть $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4, \mathscr{F}_5)$ — отображение, переводящее произвольную точку с координатами (x, y, a, b) в точку $\exp(aX + bY) \circ \exp(xX + yY)(O) \in \mathbb{R}^5$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{F} = (\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4, \mathscr{F}_5) &: (x, y, a, b) \to \exp(aX + bY) \circ \exp(xX + yY)(O)\\ &= \left(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\right)\\ &= (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5). \qquad (49)\end{aligned}$$

Из (49) выводим

$$m_4 = \frac{\beta_1 m_3}{6}(2x - m_1). \qquad (50)$$

Пусть $m_1 \neq 0$, $m_3 \neq 0$. Используя лемму 8 и формулу (50), получаем, что m_2, m_4 принимают любые значения, и в то же самое время имеем

$$x = \frac{3m_4}{\beta_1 m_3} + \frac{m_1}{2}.$$

Тогда

$$m_3 = \frac{\alpha}{2}(xm_2 - ym_1) \Rightarrow y = \frac{xm_2 - \frac{2}{\alpha}m_3}{m_1} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{3m_4}{\beta_1 m_3} + \frac{m_1}{2}\right) - \frac{2m_3}{\alpha m_1},$$

значит,

$$\begin{aligned}m_5 = m_5(m_1, m_2, m_3, m_4) &= \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\\ &= \frac{\beta_2 m_3}{6}(2y - m_2) = \frac{\beta_2 m_3}{6}\left(2\left(\frac{3m_4 m_2}{\beta_1 m_3 m_1} + \frac{m_2}{2} - \frac{2m_3}{\alpha m_1}\right) - m_2\right)\\ &= \frac{\beta_2}{3\alpha\beta_1 m_1}\big(3\alpha m_4 m_2 - 4\beta_1 m_3^2\big).\end{aligned}$$

В случае $m_2 \neq 0$, $m_3 \neq 0$, используя переформулировку леммы 8 и выражение для m_5, аналогичное формуле (50), так же, как и в предыдущем случае, получим

$$m_4 = m_4(m_1, m_2, m_3, m_5).$$

Таким образом, множество $\mathscr{P}(O)$ является 4-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^5$ в некоторой окрестности любой точки $M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \in \mathscr{P}(O)$, $m_3(m_1^2 + m_2^2) \neq 0$.

Если $m_1 = m_2 = 0$, то $m_3 = 0$, и тогда $m_4 = m_5 = 0$ (см. (49)).

Пусть $M = (m_1, m_2, 0, m_4, m_5) \in \mathscr{P}(O)$, тогда $M = (m_1, m_2, 0, 0, 0)$ (см. (49)). Случай $m_3 = 0$, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, эквивалентен ситуации $x^2 + y^2 \neq 0$, $(a, b) = \tau(x, y)$, $\tau = \text{const}$. Стандартными вычислениями получаем

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4, \mathscr{F}_5)}{\partial(x, y, a, b)}\bigg|_{(x,y,a,b)=(x,y,\tau x,\tau y)} < 4.$$

Таким образом, точки $M = (m_1, m_2, 0, 0, 0)$ — особые точки поверхности $\mathscr{P}(O)$.

Из свойства 18 вытекает, что поверхность $\mathscr{P}(O)$ не имеет самопересечений.

П. 3^0 вытекает из определения $\mathscr{P}(O)$.

Утверждение 21 доказано.

Теорема 22. *Существуют замкнутые горизонтальные* 6*-ломаные на* $\mathbb{K}$.

Доказательство. Рассмотрим поверхность $\mathscr{P}(O)$ из утверждения 21. Так как векторные поля X, Y удовлетворяют условию Хермандера, найдутся точка $u \in \operatorname{Int} \mathscr{P}(O)$ и константы a, b, $ab \neq 0$, такие, что

$$(aX + bY)(u') \notin T_{u'}\mathscr{P}(O) \quad \forall u' \in U,$$

где $U \subset \mathscr{P}(O)$ — некоторая окрестность точки u (здесь топология индуцирована стандартной топологией евклидова пространства $\mathbb{R}^5$). Таким образом,

$$U \not\subset \operatorname{Char}(\mathscr{P}(O)).$$

Пусть $w = \exp(s_0(aX + bY))(u)$, $s_0 > 0$. Тогда $u = \exp(-s_0(aX + bY))(w)$. Из теоремы о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров вытекает, что число $s_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы

$$U_{a',b'} = \exp(s(a'X + b'Y))(w) \cap U \neq \varnothing, \quad s \in (0, s'),$$

где (a', b') принадлежит некоторой 2-мерной окрестности V' точки $(-s_0a, -s_0b)$, s' — некоторая константа, не зависящая от выбора $(a', b') \in V'$, и при этом

$$(a'X + b'Y)(u_{a',b'}) \notin T_{u_{a',b'}}\mathscr{P}(O) \quad \forall (a', b') \in V',$$

где $u_{a',b'} \in U_{a',b'}$.

Выберем две различные пары $(a'_i, b'_i) \in V'$, $i = 1, 2$. Учитывая утверждение 21, выводим, что для каждой пары (a'_i, b'_i) найдется некоторая горизонтальная 2-ломаная $L_2(O, u_{a'_i,b'_i}) \subset \mathscr{P}(O)$. В результате получаем замкнутую горизонтальную 6-ломаную

$$L_2(O, u_{a'_1,b'_1}) \cup I_1 \cup I_2 \cup L_2(O, u_{a'_2,b'_2}),$$

где I_i — отрезок интегральной линии $\exp(s(a'_iX + b'_iY))(w)$ такой, что $u_{a'_i,b'_i} \in I_i$.

Теорема 22 доказана.

Теорема 4 следует из свойств 18, 19 и теоремы 22.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
2. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
3. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry (Prog. Math., 144). Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
4. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.
5. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
6. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.

7. *Водопьянов С. К.* Геометрия пространств Карно — Каратеодори, квазиконформный анализ и геометрическая теория меры // Владикавк. мат. журн. 2003. Т. 5, № 1. С. 14–34.

8. *Грешнов А. В.* Геометрия *cc*-шаров и константы в теореме Ball-Box на группалгебрах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1040–1058.

9. *Берестовский В. Н.* Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 959–970.

10. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Экстремали левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Энгеля // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 735–751.

11. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 481–501.

12. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 748–767.

13. *Ardentov A., Le Donne E., Sachkov Yu.* A sub-Finsler problem on the Cartan group // Proc. Steklov Inst. Math. 2019. V. 304. P. 42–59.

14. *Ardentov A. A., Sachkov Yu. L.* Maxwell strata and cut locus in the sub-Riemannian problem on the Engel group // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22, N 8. P. 909–936.

15. *Ардентов А. А., Сачков Ю. Л.* Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.

16. *Сачков Ю. Л., Сачкова Е. Ф.* Анормальное множество для $(2,3,5,8)$-распределения // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 2. С. 318–320.

17. *Mashtakov A. P.* Algorithms and software solving a motion planning problem for nonholonomic five-dimensional control systems // Progr. Syst.: Theory Appl. 2012. V. 3. P. 3–29.

18. *Сачков Ю. Л., Ардентов А. А., Маштаков А. П.* Конструктивное решение задачи управления на основе метода нильпотентной аппроксимации // Программные системы: теория и приложения (Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения», ИПС им. А. К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский, май 2009). Переславль-Залесский: Университет города Переславля, 2009. Т. 1. С. 5–23.

19. *Sachkov Yu. L.* Sub-Riemannian Cartan sphere // Dokl. Math. 2022. V. 106, N 3. P. 462–466.

20. *Monti R., Pigati A., Vittone D.* Existence of tangent lines to Carnot–Carathéodory geodesics // Calc. Var. 2018. V. 57. P. 57–75.

21. *Грешнов А. В.* О равномерных и NTA-областях на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1018–1035.

22. *Грешнов А. В., Жуков Р. И.* Горизонтальная соединимость на канонической 3-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коранга 2 // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 736–746.

23. *Greshnov A. V.* Optimal horizontal joinability on the Engel group // Atti Accad. Naz. dei Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Rend. Lincei Mat. Appl. 2021. V. 32, N 3. P. 535–547.

24. *Грешнов А. В.* Метод Аграчева — Барилари — Боскайна и оценки числа звеньев горизонтальных ломаных, соединяющих точки в канонической группе Карно $G_{3,3}$ // Оптимальное управление и динамические системы. К 95-летию академика Реваза Валериановича Гамкрелидзе. Тр. МИАН. М.: МИАН, 2023. Т. 321. С. 108–117.

25. *Грешнов А. В., Жуков Р. И.* Горизонтальная соединимость на 5-мерной 2-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коразмерности 2 // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 2. С. 205–218.

26. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

27. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.

28. *Capogna L., Garofalo N.* Non tangentially accessible domains for Carnot–Carathéodory metrics and a Fatou type theorem // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1995. V. 321, N 12. P. 1565–1570.

29. *Capogna L., Garofalo N.* Boundary behavior of nonnegative solutions of subelliptic equations in NTA-domains for Carnot–Carathéodory metrics // J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4, N 4–5. P. 403–432.

Поступила в редакцию 10 июня 2024 г.
После доработки 4 июля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Грешнов Александр Валерьевич (ORCID 0000-0002-1218-2767)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru

Жуков Роман Иванович(ORCID 0009-0007-0251-4995)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
eifromdc@yandex.ru