Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 510.5+510.6+512.563

ОБ 1–РАЗРЕШИМОСТИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ОДНИМ ВЫДЕЛЕННЫМ ИДЕАЛОМ

М. Н. Гаськова

Аннотация. Получено описание 1-разрешимых булевых алгебр с одним выделенным идеалом в терминах вычислимости некоторого набора предикатов на данной алгебре, и показана минимальность полученных условий.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.507

Ключевые слова: булева алгебра, вычислимая модель, разрешимая модель, n-разрешимая модель, ограниченные теории булевых алгебр, идеал на булевых алгебрах, I-алгебра.

1. Предварительные сведения

Булевы алгебры с выделенными идеалами являются популярным объектом исследований, среди результатов в рамках теории вычислимости — работы Ю. Л. Ершова, П. Е. Алаева, Д. Е. Пальчунова, А. С. Морозова и др., хороший обзор можно найти в [1]. Булевы алгебры с конечным числом выделенных идеалов называются I-*алгебрами*.

В данной работе рассматриваются не более чем счетные булевы алгебры. Модель конечного языка называется *вычислимой*, если ее носитель — вычислимое множество натуральных чисел, операции — вычислимые функции и отношения вычислимы. Говоря о вычислимой булевой алгебре, будем подразумевать, что она вычислима как модель в языке $\sigma_{BA} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$, где 0 и 1 соответствуют наименьшему и наибольшему элементам. Вычислимая модель называется *n-разрешимой*, если существует алгоритм, определяющий по конечной Σ_n-формуле и набору элементов, истинна ли эта формула на этом наборе.

Для произвольных идеалов I_1 и I_2 булевой алгебры будем использовать следующее обозначение: $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \{x + y \mid x \in \mathrm{I}_1, y \in \mathrm{I}_2\}$. Будем использовать следующие обозначения для канонических предикатов на булевых алгебрах: E_0 — предикат, выделяющий 0 в булевой алгебре, At_0 (или At) — множество атомов, Als_0 (или Als) — идеал безатомных элементов, Atm_0 (или Atm) — идеал атомных элементов, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Als} + \mathrm{Atm}$, At_n — множество элементов булевой алгебры, являющихся атомами в факторе по E_n, Als_n — идеал элементов булевой алгебры, являющихся безатомными в факторе по E_n, Atm_n — идеал элементов булевой алгебры, являющихся атомными в факторе по E_n, $\mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{Als}_n + \mathrm{Atm}_n$. Если элементы $a_1, \dots, a_k$ не пересекаются и их сумма это a, то будем говорить, что $a_1, \dots, a_k$ — *разбиение* a, и коротко записывать «$a_1, \dots, a_k | a$».

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0011).

С. С. Гончаровым [2] было показано, что n-разрешимость булевой алгебры равносильна вычислимости булевой алгебры с вычислимостью первых $n+1$ предикатов последовательности $\mathrm{E}_0, \mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{At}_1, \ldots$, т. е. n-разрешимость булевых алгебр полностью описана. В данной работе рассматривается аналогичная задача для булевых алгебр с выделенным идеалом и дается ответ для $n = 1$, т. е. получено описание 1-разрешимых булевых алгебр с одним выделенным идеалом (теорема 2), далее в разд. 3 показана минимальность полученных условий.

2. Основное описание

Будем пользоваться следующим известным фактом, приведем его в формулировке из [2] (следствие 2.1.10). Его также можно найти в более ранних монографиях [3, 4].

Теорема 1 [2]. *Пусть T — теория сигнатуры σ. Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ T-эквивалентна $\forall$-формуле сигнатуры σ тогда и только когда, когда сохраняет истинность на подмоделях теории T, т. е. для любых моделей $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ теории T и элементов $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{B}_1$, где $\mathscr{B}_1$ — подмодель $\mathscr{B}_2$ в теории T, если φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n$ в $\mathscr{B}_2$, то φ истинна на этих же элементах и в модели $\mathscr{B}_1$.*

Комментарий. Достаточно рассматривать только счетные модели $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$, потому что доказательство данного факта использует теорему о существовании модели, при этом известно, что если счетное множество формул непротиворечиво, то оно имеет модель счетной мощности.

Будем использовать следующие обозначения для сигнатур:

$\sigma_0^I = \sigma_{BA} \cup \{I, \mathrm{E}_0\}$,

$\sigma_1^I = \sigma_0^I \cup \{\mathrm{At}, I \to 0, \mathrm{At}_I\}$, где $I \to 0 = \{x \mid \forall y(y \le x \Rightarrow (y = 0 \vee y \notin I))\}$, At_I — предикат, выделяющий множество элементов булевой алгебры, являющихся атомами в факторе по идеалу I.

Свойство $(*)$ предикатов сигнатуры σ. Пусть сигнатура σ содержит только одноместные предикаты. Будем говорить, что сигнатура σ *обладает свойством* $(*)$, если для любого предиката $P \in \sigma$ и любого $k > 0$ существует бескванторная формула $\Psi_P(x_1, \ldots, x_k)$ сигнатуры σ такая, что для любой булевой алгебры $\mathscr{A}$ и для любого элемента $c \in \mathscr{A}$ и его разбиения $h_1, \ldots, h_k$ в $\mathscr{A}$ выполняется $\mathscr{A} \models P(c) \Leftrightarrow \mathscr{A} \models \Psi_P(h_1, \ldots, h_k)$ (иными словами, зная истинность предикатов сигнатуры σ на разбиении элемента, можно определить с помощью бескванторной формулы истинность заданного предиката на самом элементе).

Лемма 1. *Пусть σ^* и σ' — некоторые расширения сигнатуры σ_{BA} одноместными предикатами, содержащие E_0, σ^* обладает свойством $(*)$ и $\sigma^* \subseteq \sigma'$. Пусть $\mathscr{A}$ — подалгебра булевой алгебры $\mathscr{B}$ в сигнатуре σ'. Пусть для любого элемента $a \in \mathscr{A}$ и его разбиения $e_1, \ldots, e_m$ в $\mathscr{B}$ существует разбиение $e'_1, \ldots, e'_m$ элемента a в $\mathscr{A}$ такое, что для любого $i \in [1, m]$ на e_i и e'_i истинны одни и те же предикаты из σ^*. Тогда для любой $\exists$-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ сигнатуры σ^* и любых $a_1, \ldots, a_k \in \mathscr{A}$ из $\mathscr{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$ следует $\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.*

Доказательство. Лемма частично повторяет лемму 2.6.2 из [2]. Приведем доказательство с необходимыми корректировками. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ — $\exists$-формула сигнатуры σ^*. Она имеет вид $(\exists y_1, \ldots, y_m)\Psi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$, где формула Ψ бескванторная. Если формула $\varphi(x_1,\dots,x_k)$ ложна в $\mathscr{B}$ на любых элементах из $\mathscr{A}$, то заключение леммы очевидно. В противном случае пусть $a_1,\dots,a_k$ — элементы $\mathscr{A}$ и

$$\mathscr{B}\models(\exists y_1\dots\exists y_m)\Psi(a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m).$$

Рассмотрим подалгебру $\mathbf{gr}_{\mathscr{B}}(a_1,\dots,a_k)$, порожденную в булевой алгебре $\mathscr{B}$ элементами $a_1,\dots,a_k$ в сигнатуре булевых алгебр. Это подалгебра является также подалгеброй $\mathscr{A}$, так как $\sigma_{BA}\subseteq\sigma'$. Пусть $b_1,\dots,b_s$ — все атомы этой булевой алгебры. Тогда

$$\mathscr{B}\cong\widehat{b}_1\times\dots\times\widehat{b}_s,\quad \mathscr{A}\cong\widehat{(b_1)}_{\mathscr{A}}\times\dots\times\widehat{(b_s)}_{\mathscr{A}},$$

где $\widehat{(b_i)}_{\mathscr{A}}\subseteq\widehat{b}_i$, $i\in[1,s]$. Для формулы

$$(\exists y_1\dots\exists y_m)\Psi(a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m)$$

возьмем элементы $y_1,\dots,y_m$, которые делают ее истинной в $\mathscr{B}$. Рассмотрим булеву алгебру $\mathbf{gr}_{\mathscr{B}}(a_1,\dots,a_k,\,y_1,\dots,y_m)$ как подалгебру булевой алгебры $\mathscr{B}$ в сигнатуре булевых алгебр и все атомы этой булевой алгебры $e_0,\dots,e_r$. Заметим, что каждый атом лежит под одним из элементов $b_1,\dots,b_s$. Пусть K_i — множество номеров атомов, которые лежат под элементом b_i, $i\in[1,s]$, т. е.

$$K_1,\dots,K_s\subseteq\{0,\dots,r\},\quad \bigvee_{i=1}^{s}K_i=\{0,\dots,r\},\quad \bigvee_{j\in K_i}e_j=b_i.$$

Так как $a_1,\dots,a_k$ лежат в $\mathscr{A}$, атомы $b_1,\dots,b_s$ подалгебры $\mathbf{gr}_{\mathscr{B}}(a_1,\dots,a_k)$ лежат в $\mathscr{A}$. Согласно условию леммы для каждого $i\in[1,s]$ должны найтись $|K_i|$ элементов e'_j, $j\in K_i$, в подалгебре $\mathscr{A}$ таких, что они образуют разбиение b_i (т. е. $\bigvee\limits_{j\in K_i}e'_j=b_i$ и $e'_i\wedge e'_j=0$ для любых $i\neq j$) и относительно предикатов сигнатуры σ^* выполнено следующее условие: на e'_i выполняются те же предикаты из σ^*, что и на e_i. Положим $y'_i=\bigvee\limits_{j:e_j\leq y_i}e'_j$.

Докажем индукцией по сложности формулы, что формула $\Psi(a_1,\dots,a_k,$ $y'_1,\dots,y'_m)$ истинна в $\mathscr{A}$. На y'_i и y_i выполнены одни и те же предикаты из σ^* в силу того, что предикаты сигнатуры σ^* обладают свойством $(*)$. Любой терм от $a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m$ эквивалентен некоторой сумме атомов $e_0,\dots,e_r$. Соответственно два терма равны тогда и только тогда, когда они эквивалентны одной и той же сумме атомов. В силу определения $y'_i=\bigvee\limits_{j:e_j\leq y_i}e'_j$ два терма от $a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m$ равны тогда и только тогда, когда равны эти же термы от $a_1,\dots,a_k,y'_1,\dots,y'_m$. Таким образом, любая атомная формула истинна в $\mathscr{B}$ на $\overline{a}$ и $\overline{y}$ тогда и только тогда, когда она истинна в $\mathscr{A}$ на $\overline{a}$ и $\overline{y}'$. Очевидно, что применение логических связок сохранит это свойство. Тем самым формула $\Psi(a_1,\dots,a_k,y'_1,\dots,y'_m)$ истинна в $\mathscr{A}$. Следовательно, в $\mathscr{A}$ истинна формула $\varphi(a_1,\dots,a_k)$. Лемма доказана.

Пусть Th_1^I — теория, расширяющая теорию булевых алгебр добавлением определений для каждого символа из σ_1^I.

Предложение 1. *Для любой $\exists$-формулы $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры σ_0^I существует $\forall$-формула $\psi(x_1,\dots,x_m)$ сигнатуры σ_1^I такая, что*

$$Th_1^I\vdash(\forall x_1,\dots,\forall x_m)(\varphi(x_1,\dots,x_m)\Leftrightarrow\psi(x_1,\dots,x_m)).$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что формула $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры σ_0^I сохраняет истинность при взятии подмоделей сигнатуры σ_1^I теории Th_1^I.

Пусть $(\mathscr{A}^*,\sigma_1^I)$ — подалгебра алгебры $(\mathscr{B}^*,\sigma_1^I)$. Заметим, что тогда булева алгебра $(\mathscr{A}^*,\sigma_{BA})$, являющаяся обеднением алгебры $(\mathscr{A}^*,\sigma_1^I)$ до сигнатуры σ_{BA}, также является подалгеброй булевой алгебры $(\mathscr{B}^*,\sigma_{BA})$. Воспользуемся леммой 1, в качестве $\mathscr{A}$ возьмем булеву алгебру $(\mathscr{A}^*,\sigma_{BA})$, в качестве $\mathscr{B}$ возьмем булеву алгебру $(\mathscr{B}^*,\sigma_{BA})$, в качестве σ^* возьмем σ_0^I (эта сигнатура обладает свойством $(*)$). Согласно лемме 1 достаточно показать, что для любого элемента $a\in\mathscr{A}=(\mathscr{A}^*,\sigma_{BA})$ и его разбиения на ненулевые элементы $e_1,\dots,e_m,d_1,\dots,d_r|a$ в $\mathscr{B}=(\mathscr{B}^*,\sigma_{BA})$ такого, что $e_i\in I$ для всех $i\in[1,m]$ и $d_j\notin I$ для всех $j\in[1,r]$, существует разбиение на ненулевые элементы $e'_1,\dots,e'_m,d'_1,\dots,d'_r$ элемента a в $\mathscr{A}$ такое, что $e_i\in I$ для всех $i\in[1,m]$ и $d_j\notin I$ для всех $j\in[1,r]$.

Лемма 2. *Если* $\left(\mathscr{A}^*,\sigma_1^I\right)$ *— подалгебра алгебры* $\left(\mathscr{B}^*,\sigma_1^I\right)$, *то для любого элемента* $a\in\mathscr{A}$ *выполняется* $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{A}}|=|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{B}}|$.

Доказательство. Если $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{A}}|=1$, то $a\in I$ в $\mathscr{A}$ и $a\in I$ в $\mathscr{B}$ (так как $I\in\sigma_1^I$), следовательно, $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{B}}|=1$.

Если $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{A}}|=2^n$ для некоторого $n>0$, то существует разбиение a в $\mathscr{A}$ на n атомов в факторе по I. В силу того, что $\mathrm{At}_I\in\sigma_1^I$, эти же элементы являются атомами в факторе по I в $\mathscr{B}$ и образуют разбиение a в $\mathscr{B}$. Значит, $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{A}}|=|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{B}}|$.

Если $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{A}}|=\omega$, то a в $\mathscr{A}$ можно разбить на сколь угодно большое число элементов, не лежащих в I. Так как $I\in\sigma_1^I$, то эти же элементы не лежат в I в $\mathscr{B}$ и образуют по-прежнему разбиение. Получаем, что $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{B}}|=\omega$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство предложения.

Если $r>0$, то $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{B}}|\geq 2^r$, по лемме 2 $|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{A}}|=|\widehat{(a/I)}_{\mathscr{B}}|$, значит, найдутся $b_1,\dots,b_r|a$ в $\mathscr{A}$ такие, что $b_i\notin I$, $i\in[1,r]$. Найдем под a в $\mathscr{A}$ дизъюнктные элементы $e'_1,\dots,e'_m$ из I. Почему такие элементы есть? Допустим, что под a в $\mathscr{A}$ всего l дизъюнктных элементов $e'_1,\dots,e'_l$ из I, $l<m$, а $a-(e'_1+\dots+e'_l)\in I\to 0$. Тогда $e'_1,\dots,e'_l$ должны быть атомами в $\mathscr{A}$, а следовательно, и в $\mathscr{B}$, кроме того, $a-(e'_1+\dots+e'_l)\in I\to 0$ в $\mathscr{B}$ (так как $\mathrm{At}, I\to 0\in\sigma_1^I$), а это противоречит тому, что под a в $\mathscr{B}$ есть m дизъюнктных элементов из I. Значит, под a в $\mathscr{A}$ есть m дизъюнктных элементов $e'_1,\dots,e'_m$ из I. Положим $d'_i=b_i-(e'_1+\dots+e'_l)$ для всех $i\in[1,r]$. Заметим, что $d'_i\notin I$, $e'_1,\dots,e'_m,d'_1,\dots,d'_r|a$ в $\mathscr{A}$, значит, это разбиение искомое.

Если $r=0$, то аналогично предыдущему случаю под b в $\mathscr{A}$ можно найти m дизъюнктных элементов из I и, более того, в связи с тем, что $b\in I$, можно выбрать их таким образом, чтобы $e'_1,\dots,e'_m|b$ в $\mathscr{A}$. Предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{A}^*$ *— булева алгебра,* I *— предикат, выделяющий идеал в булевой алгебре, и* $\mathscr{A}=(\mathscr{A}^*,I)$. *Алгебра* $\mathscr{A}$ *1-разрешима тогда и только тогда, когда* $\mathscr{A}$ *вычислима и вычислимы предикаты* At, $I\to 0$, At_I.

Доказательство. Необходимость следует из возможности описания предикатов At, $I\to 0$, At_I Π_1-формулами в сигнатуре σ_0^I. Покажем достаточность. Согласно предложению 1 любая Σ_1-формула $\varphi(\overline{x})$ сигнатуры σ_0^I эквивалентна

$\forall$-формуле $\varphi_1(\overline{x})$ в сигнатуре σ_1^I. В [5] получен следующий результат (теорема 2.11): теория первого порядка булевых алгебр с последовательностью выделенных идеалов разрешима, т. е. множество геделевских номеров предложений соответствующей теории вычислимо. Перебирая элементы этого множества, для любой Σ_1-формулы $\varphi(\overline{x})$ за конечное число шагов можем найти эквивалентную ей $\forall$-формулу $\varphi_1(\overline{x})$ в сигнатуре σ_1^I такую, что формула $\forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi_1(\overline{x}))$, в которой предикаты At, $I \to 0$, At_I заменены определяющими их формулами, является предложением теории булевых алгебр с последовательностью выделенных идеалов $I, \{0\}, \{0\}, \dots$. И далее по алгоритму из теоремы Поста, перебирая значения переменных, находящихся под квантором существования, за конечное число шагов определим, какая из $\exists$-формул истинна — $\varphi(\overline{x})$ или $\neg\varphi_1(\overline{x})$.

Теорема доказана.

3. Минимальность условий теоремы 2

В этом разделе покажем, что условия 1-разрешимости булевых алгебр с выделенным идеалом, сформулированные в теореме 2, минимальны в следующем смысле: для любого предиката $P \in \{\mathrm{At}, I \to 0, \mathrm{At}_I\}$ существует вычислимая булева алгебра с выделенным идеалом I такая, что в ней вычислимы предикаты $\{\mathrm{At}, I \to 0, \mathrm{At}_I\} \backslash \{P\}$, но нет 1-разрешимого представления.

Сначала рассмотрим случай $P = \mathrm{At}$. Воспользуемся следующим результатом, который является переработанным в [2] примером Фейнера.

Лемма 3 [2]. *Существует вычислимая атомная булева алгебра $\mathscr{B}^*$, не имеющая вычислимого представления с вычислимым множеством атомов.*

Предложение 2. *Существует вычислимая булева алгебра $\mathscr{C}_1$ такая, что в ней вычислим некоторый идеал I, а также множества $I \to 0$ и At_I, но при этом у нее нет 1-разрешимого представления.*

Доказательство. В качестве $\mathscr{C}_1$ возьмем булеву алгебру $\mathscr{B}^*$ из леммы 3, $I = \mathscr{B}^*$, тогда $\mathrm{At}_I(\mathscr{C}_1) = \varnothing$, а $I \to 0 = \{0\}$, при этом у нее нет 1-разрешимого представления, так как нет вычислимого представления с вычислимым множеством атомов. Предложение доказано.

Далее рассмотрим случай $P = \mathrm{At}_I$.

Предложение 3. *Существует вычислимая булева алгебра $\mathscr{C}_2$ такая, что в ней вычислим некоторый идеал I, а также множества* At *и* $I \to 0$, *но при этом у нее нет 1-разрешимого представления.*

Доказательство. По предложению 3.2.2 из [2] для каждой вычислимой булевой алгебры $\mathscr{B}$ существует вычислимый линейный порядок такой, что булева алгебра, построенная по нему, изоморфна $\mathscr{B}$. Пусть γ — вычислимый линейный порядок для булевой алгебры $\mathscr{B}^*$ из леммы 3, т. е. $\mathscr{B}^* \cong \mathscr{B}(\gamma)$. Рассмотрим булеву алгебру $\mathscr{C}_2 = \mathscr{B}(\eta \times \gamma)$, где η — линейный порядок по типу рациональных чисел. Определим идеал $I \subseteq \mathscr{C}_2$ такой, что $I = \{x \in \mathscr{C}_2 \mid x$ является конечной суммой полуинтервалов, оба конца которых лежат в одном экземпляре $\eta\}$. Идеал I вычислим в $\mathscr{C}_2$, так как принадлежность определяется по концам полуинтервалов, принадлежащих вычислимому линейному порядку. Заметим, что под любым ненулевым $x \in \mathscr{C}_2$ найдется ненулевой элемент идеала I, поэтому $I \to 0 = \{0\}$, а $\mathrm{At}(\mathscr{C}_2) = \varnothing$. При этом $\mathscr{C}_2/I \cong \mathscr{B}^*$, поэтому факторалгебра $\mathscr{C}_2/I$ не имеет 1-разрешимого представления, и в силу вычислимости идеала I булева алгебра $\mathscr{C}_2$ тоже не может иметь 1-разрешимого представления. Предложение доказано.

Наконец, рассмотрим случай $P = I \to 0$. В качестве инструмента для построения искомой I-алгебры будем использовать приведенную далее теорему 3 из [6]. Предварительно поместим определения необходимых для этого терминов.

Основной объем работы при применении теоремы 3 для наших целей будет составлять описание отношения $\leq_\alpha^\sigma$ на булевых алгебрах (это так называемое “standard back-and-forth relation” на булевых алгебрах в языке, обогащенном предикатными символами из σ). Через $\Pi_\alpha(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех бесконечных Π_α-предложений, истинных в модели $\mathfrak{M}$, через $\mathfrak{M} \leq_\alpha \mathfrak{N}$ — то, что $\Pi_\alpha(\mathfrak{M}) \subseteq \Pi_\alpha(\mathfrak{N})$. Базовую теоретико-модельную информацию об этом отношении можно найти в [7, 8]. Пусть σ — некоторый конечный набор 1-местных предикатных символов (может быть, пустой), для каждого из которых заранее определена его реализация в любой алгебре, причем эта реализация сохраняется при изоморфизмах. Тогда $\mathscr{A}^\sigma$ означает единственное обогащение алгебры $\mathscr{A}$ предикатами из σ. Если $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — булевы алгебры, то запись вида $\mathscr{A} \leq_\alpha^\sigma \mathscr{B}$ означает, что $\mathscr{A}^\sigma \leq_\alpha \mathscr{B}^\sigma$.

Идеальный оператор — это соответствие T, которое каждой алгебре $\mathscr{A}$ сопоставляет идеал $\mathrm{T}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{A}$ и при этом обладает свойством: если $x \in \mathscr{A}$, $y \in \mathscr{B}$ и $\widehat{x} \cong \widehat{y}$, то $x \in \mathrm{T}(\mathscr{A}) \Leftrightarrow y \in \mathrm{T}(\mathscr{B})$.

Если $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — алгебры и T — идеальный оператор, то изоморфное вложение $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ назовем T-*стабильным*, когда выполняются свойства:

(1) $f^{-1}(\mathrm{T}(\mathscr{B})) = \mathrm{T}(\mathscr{A})$;

(2) $\widehat{f(a)} = f(\widehat{a})$ для $a \in \mathrm{T}(\mathscr{A})$.

В этом случае $\widehat{f(a)} \cong \widehat{a}$ для $a \in \mathrm{T}(\mathscr{A})$.

Идеальный оператор T-*стабилен*, если для любой последовательности алгебр $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$ и любых T-стабильных вложений $h_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_{n+1}$ верно утверждение: если $\mathscr{C} = \mathrm{Lim}\{\mathscr{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{C}$ — естественные вложения, то g_n также являются T-стабильными. Под операцией $\mathrm{Lim}\{\mathscr{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$ понимается стандартная конструкция прямого предела последовательности структур, которую можно найти, например, в [9].

Набор σ будем называть *локальным*, если для любых алгебр $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, любых $a_0, \dots, a_n \in \mathscr{A}$, $a_0, \dots, a_n|1$, и любых $b_0, \dots, b_n \in \mathscr{B}$, $b_0, \dots, b_n|1$, верна эквивалентность: $(\mathscr{A}, a_0, \dots, a_n) \leq_0^\sigma (\mathscr{B}, b_0, \dots, b_n) \Leftrightarrow \widehat{a}_i \leq_0^\sigma \widehat{b}_i$ для всех $i \in [0, n]$.

Пусть $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — изоморфное вложение, σ — локальный набор. Будем говорить, что f — σ-*вложение*, если f является изоморфным вложением $\mathscr{A}^\sigma$ в $\mathscr{B}^\sigma$, т. е. $\mathscr{A} \models P(a) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models P(f(a))$ для всех $a \in \mathscr{A}$, $P \in \sigma$.

Пусть T — идеальный оператор, σ — локальный набор. Будем говорить, что σ *согласован* с T, если для любой последовательности алгебр $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$ и T-стабильных σ-вложений $h_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_{n+1}$ верно: если $\mathscr{C} = \mathrm{Lim}\{\mathscr{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{C}$ — естественные вложения, то g_n также являются σ-вложениями.

Последовательность вида $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$, где $\mathscr{A}_n$ — алгебры, назовем *вычислимой*, если $\mathscr{A}_n$ вычислимы для всех $n \in \omega$ и индекс $\mathscr{A}_n$ может быть вычислен по $n \in \omega$. Если α — вычислимый ординал, то вычислимая последовательность $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$ является α-*дружественной*, если отношение $(\mathscr{A}_n, \overline{a}) \leq_\beta (\mathscr{A}_m, \overline{b})$ на $n, m \in \omega$ наборах $\overline{a}$ из $\mathscr{A}_n$ и $\overline{b}$ из $\mathscr{A}_m$, где $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\beta < \alpha$, является вычислимо-перечислимым. Точная формулировка вычислимой перечислимости по ординалам $\beta < \alpha$, вообще говоря, требует перехода к обозначениям для вычислимых ординалов, но поскольку ниже будут рассматриваться только конечные α, полного определения приводить не будем.

Теорема 3 [6]. *Пусть* T — *стабильный идеальный оператор,* $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$ — *две бесконечные вычислимые алгебры,* $\mathscr{B}_0/\,\mathrm{T}$, $\mathscr{B}_1/\,\mathrm{T} \cong \mathscr{B}(1)$, $\mathrm{T}(\mathscr{B}_0)$, $\mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$ — *вычислимые подмножества в* $\mathscr{B}_0$ *и* $\mathscr{B}_1$ *соответственно. Пусть также* $\alpha \geq 1$ — *вычислимый ординал,* σ — *локальный набор, согласованный с* T, *и выполняются условия:*

(a) $\forall a \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_0)\ \forall \beta < \alpha\ \big(\widehat{a} \leq^\sigma_\beta \widehat{a} \times \mathscr{B}_0$ *и* $\widehat{a} \leq^\sigma_\beta \widehat{a} \times \mathscr{B}_1\big)$;

(b) $\forall a \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)\ \forall \beta < \alpha\ \big(\widehat{a} \leq^\sigma_\beta \widehat{a} \times \mathscr{B}_1\big)$;

(c) $\big\{\big(\mathscr{B}_0^n \times \mathscr{B}_1^m\big)^\sigma\big\}_{\langle n,m\rangle \in \omega}$ — α*-дружественное семейство.*

Тогда для любой Δ^0_α*-алгебры* $\mathscr{A} \neq 0$ *и для любого* Δ^0_α*-идеала* G *алгебры* $\mathscr{A}$ *найдется такая* σ*-вычислимая алгебра* $\mathscr{C}$, *что* $\mathscr{C}/\,\mathrm{T} \cong \mathscr{A}$. *При этом найдется изоморфизм* $f : \mathscr{A} \to \mathscr{C}/\,\mathrm{T}$ *со свойствами:*

(1) *если* $a \in \mathscr{A} \setminus G$ *и* $f(a) = b/\,\mathrm{T}(\mathscr{C})$, *то найдутся* $z \leq b$, $e \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_0)$ *и* T*-стабильное вложение* $g : \widehat{e} \to \widehat{z}$;

(2) *если* $a \in G$, *то существует такой* $d \in \mathscr{C}$, *что* $f(a) = d/\,\mathrm{T}(\mathscr{C})$ *и при любом* $y \leq d$

(i) *если* $y \notin \mathrm{T}(\mathscr{C})$, *то найдутся* $z \leq y$, $e \in B_1 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$ *и* T*-стабильное вложение* $g : \widehat{e} \to \widehat{z}$;

(ii) *если* $y \in \mathrm{T}(\mathscr{C})$, *то* $\widehat{y} \cong \widehat{a}_1 \times \dots \times \widehat{a}_n$, *где* $a_i \in \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$;

(3) *если* $y \in \mathrm{T}(\mathscr{C})$, *то* $\widehat{y} \cong \widehat{a}_1 \times \dots \times \widehat{a}_n$, *где* $a_i \in \mathrm{T}(\mathscr{B}_0)$ *или* $a_i \in \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$.

Для описания отношения $\leq^\sigma_\alpha$ для $\sigma = \{\mathrm{At}, \mathrm{Atm}\}$ будем использовать следующую лемму из [6].

Лемма 4 [6]. *Пусть* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — *алгебры,* σ — *локальный набор,* $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathscr{B}$, α — *ординал. Отношение* $\mathscr{A} \leq^\sigma_{\alpha+1} \mathscr{B}$ *выполняется тогда и только тогда, когда для любых* $b_1, \dots, b_n|1$ *из* $\mathscr{B}$ *существуют* $a_1, \dots, a_n|1$ *из* $\mathscr{A}$ *такие, что* $\widehat{b}_i \leq^\sigma_\alpha \widehat{a}_i$ *для* $i \in [1, n]$.

Лемма 5. *Пусть* $\sigma = \{At, \mathrm{Atm}\}$. *Отношения* $\leq^\sigma_0$, $\leq^\sigma_1$, $\leq^\sigma_2$ *на булевых алгебрах могут быть описаны следующим образом.*

(0) $\mathscr{A} \leq^\sigma_0 \mathscr{B}$ *равносильно* ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(0) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(0)$), ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(1) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(1)$), ($\mathscr{A}$ *атомная* $\Leftrightarrow \mathscr{B}$ *атомная*).

(1) $\mathscr{A} \leq^\sigma_1 \mathscr{B}$ *равносильно* $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$, ($\mathscr{A}$ — *атомная* $\Leftrightarrow \mathscr{B}$ — *атомная*) *и* $|\mathrm{At}(\mathscr{B})| \leq |\mathrm{At}(\mathscr{A})|$.

(2) $\mathscr{A} \leq^\sigma_2 \mathscr{B}$ *равносильно выполнению следующего списка условий:*

(a) $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$;

(b) $\mathscr{A}$ — *атомная* $\Leftrightarrow \mathscr{B}$ — *атомная;*

(c) $|\mathrm{At}(\mathscr{A})| = |\mathrm{At}(\mathscr{B})|$;

(d) *если для некоторого* $p \in \omega$ *в* $\mathscr{B}$ *есть* p *дизъюнктных атомных элементов, под которыми бесконечное число атомов, то в* $\mathscr{A}$ *тоже есть* p *дизъюнктных атомных элементов, под которыми бесконечное число атомов;*

(e) *если* $1 \in E$ *в* $\mathscr{B}$, *то* $1 \in E$ *в* $\mathscr{A}$;

Доказательство. (0) Отношение $\mathscr{A} \leq^\sigma_0 \mathscr{B}$ равносильно тому, что $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ неразличимы бескванторными предложениями $L_{BA} \cup \sigma$. В языке L_{BA} две константы, поэтому любое атомарное предложение эквивалентно $0 = 0$, $0 \neq 0$, $0 = 1$, $\mathrm{At}(1)$ или $\mathrm{Atm}(1)$. Осталось заметить, что неразличимость $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ предложением $0 = 1$ равносильна условию ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(0) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(0)$), предложением

$\mathrm{At}(1)$ — условию ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(1) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(1)$), предложением $\mathrm{Atm}(1)$ — условию ($\mathscr{A}$ — атомная $\Leftrightarrow$ $\mathscr{B}$ — атомная).

(1) Будем использовать лемму 4. Набор $\sigma = \{\mathrm{At}, \mathrm{Atm}\}$ является локальным по лемме 3 из [6]. Согласно лемме 4 отношение $\mathscr{A} \leq_1^\sigma \mathscr{B}$ равносильно тому, что для любых $b_1, \ldots, b_n|1$ из $\mathscr{B}$ существуют $a_1, \ldots, a_n|1$ из $\mathscr{A}$ такие, что $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$.

Необходимость списка условий. Если $|\mathscr{A}| > |\mathscr{B}| = 2^k$, то в $\mathscr{B}$ существуют $b_1, \ldots, b_k|1$ со свойством $\widehat{b}_i \cong \mathscr{B}(1)$, в то время как в $\mathscr{A}$ такого разбиения не будет. Если же $2^k = |\mathscr{A}| < |\mathscr{B}|$, то в $\mathscr{B}$ найдутся дизъюнктные $b_1, \ldots, b_{k+1}$ со свойством $\widehat{b}_i \not\cong \mathscr{B}(0)$, и опять необходимое разбиение будет отсутствовать в $\mathscr{A}$. Отсюда получаем необходимость условия $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$. Если $k = |\mathrm{At}(\mathscr{A})| < |\mathrm{At}(\mathscr{B})|$, то в $\mathscr{B}$ существуют различные $b_1, \ldots, b_{k+1}$ со свойством $\widehat{b}_i \cong \mathscr{B}(1)$, которых не окажется в $\mathscr{A}$, поэтому необходимо требовать, чтобы $|\mathrm{At}(\mathscr{B})| \leq |\mathrm{At}(\mathscr{A})|$. Отношение $\mathscr{A} \leq_1^\sigma \mathscr{B}$ влечет $\mathscr{A} \leq_0^\sigma \mathscr{B}$, поэтому условие ($\mathscr{A}$ — атомная $\Leftrightarrow$ $\mathscr{B}$ — атомная) также является необходимым.

Достаточность списка условий. Пусть $b_1, \ldots, b_n|1$ в $\mathscr{B}$, найдем такие $a_1, \ldots, a_n|1$ в $\mathscr{A}$, что $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$. Можно считать, что набор $b_1, \ldots, b_n$ разбивается на три части: $b_1^{\mathrm{At}}, \ldots, b_k^{\mathrm{At}}$ — атомы, $b_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, b_l^{\mathrm{Atm}}$ — атомные элементы, не являющиеся атомами, и $b'_1, \ldots, b'_m$ — неатомные элементы.

Если $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| < \infty$, то единицы в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ разбиваются на равное количество атомов. Тогда можно поделить $1 \in \mathscr{A}$ на $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы под b_i и под a_i было равное количество атомов. В этом случае, очевидно, выполнение $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$.

Пусть теперь $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| = \omega$. Отделим от $1 \in \mathscr{A}$ k атомов $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$, это можно сделать благодаря условию $|\mathrm{At}(\mathscr{A})| \geq |\mathrm{At}(\mathscr{B})|$. Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — атомные алгебры, то $m = 0$ и в $\mathscr{A}$ счетное число атомов. Разделим $1 - \left(a_1^{\mathrm{At}} + \cdots + a_k^{\mathrm{At}}\right)$ на элементы $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_l^{\mathrm{Atm}}$ так, чтобы под каждым было хотя бы два атома.

Если же $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — неатомные алгебры, то в $\mathscr{A}$ есть ненулевой безатомный элемент, разделим его на ненулевые части $a'_1, \ldots, a'_{m-1}$ и a''_m, а каждый элемент из $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_l^{\mathrm{Atm}}$ положим равным сумме двух атомов (не равных $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$). Пусть, наконец,

$$a'_m = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i^{\mathrm{At}} - \sum_{i=1}^{l} a_i^{\mathrm{Atm}} - \sum_{i=1}^{m-1} a'_i.$$

Заметим, что a'_m неатомный, так как под ним лежит элемент a''_m. При таком разбиении очевидно выполнение всех условий для отношения $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$ для всех $i \in [1, n]$.

(2) Необходимость списка условий. Выполнение $\mathscr{A} \leq_2^\sigma \mathscr{B}$ влечет $\mathscr{A} \leq_1^\sigma \mathscr{B}$ и $\mathscr{B} \leq_1^\sigma \mathscr{A}$, отсюда следует необходимость условий (a), (b), (c). Допустим, что $b_1, \ldots, b_n|1$ в $\mathscr{B}$, тогда должны существовать $a_1, \ldots, a_n|1$ в $\mathscr{A}$ такие, что $\widehat{b}_i \leq_1^\sigma \widehat{a}_i$, при этом если b_i атомный и $|\widehat{b}_i| = \omega$, то a_i тоже должен быть атомным и $|\widehat{a}_i| = \omega$, отсюда получаем необходимость условия (d). Покажем необходимость (e): если $1 \in E$ в $\mathscr{B}$, то $b_1, b_2|1_{\mathscr{B}}$ такие, что $b_1 \in \mathrm{Atm}$, $b_2 \in \mathrm{Als}$. Необходимо, чтобы нашлись $a_1, a_2|1_{\mathscr{A}}$ такие, что $\widehat{b}_1 \leq_1^\sigma \widehat{a}_1$ и $\widehat{b}_2 \leq_1^\sigma \widehat{a}_2$, откуда следует, что a_1 должен быть атомным и $|\mathrm{At}(\widehat{a}_2)| \leq |\mathrm{At}(\widehat{b}_2)|$, а значит, a_2 безатомный, следовательно, $1_{\mathscr{A}} \in E$.

Достаточность списка условий. Снова воспользуемся леммой 4. Пусть $b_1, \ldots, b_n|1$ в $\mathscr{B}$, найдем $a_1, \ldots, a_n|1$ в $\mathscr{A}$ такие, что $\widehat{b}_i \leq_1^\sigma \widehat{a}_i$ для всех $i \in [1, n]$. Заметим, что если некоторые элементы набора $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ будут разделены на несколько новых элементов, которые образуют набор $\overline{b}'|1$, и мы найдем в $\mathscr{A}$ соответствующий набор $\overline{a}'|1$, то этого будет достаточно, так как искомые a_i будут равны соответствующим суммам элементов из $\overline{a}'$. Тем самым можно считать, что набор $\overline{b}$ разбивается на четыре части:

1) $b_1^{\mathrm{At}}, \dots, b_k^{\mathrm{At}}$ — атомы;

2) $b_1^{\mathrm{Als}}, \dots, b_m^{\mathrm{Als}}$ — ненулевые безатомные элементы;

3) $b_1^{\mathrm{Atm}}, \dots, b_l^{\mathrm{Atm}}$ — атомные элементы, под которыми счетное число атомов;

4) $b'_1, \dots, b'_r$ — не атомные, под которыми бесконечное число атомов.

Случай 1. $|\operatorname{At}(\mathscr{A})| = |\operatorname{At}(\mathscr{B})| < \omega$. В этом случае $l = r = 0$. Атомы $a_1^{\mathrm{At}}, \dots, a_k^{\mathrm{At}}$ найдутся благодаря условию (c). Если $m \neq 0$, то $a_1^{\mathrm{Als}}, \dots, a_m^{\mathrm{Als}}$ можно найти благодаря условию (b). Очевидно, что можно выбрать указанные элементы таким образом, чтобы этот набор был разбиением 1 в $\mathscr{A}$.

Случай 2. $|\operatorname{At}(\mathscr{A})| = |\operatorname{At}(\mathscr{B})| = \omega$. Положим $a_1^{\mathrm{At}}, \dots, a_k^{\mathrm{At}}$ равными по одному атому из $\mathscr{A}$. В качестве $a_1^{\mathrm{Atm}}, \dots, a_l^{\mathrm{Atm}}$ возьмем атомные элементы, под которыми бесконечное число атомов, не пересекающихся друг с другом и с $a_1^{\mathrm{At}}, \dots, a_k^{\mathrm{At}}$, такие существуют по условию (d). Если $m = r = 0$, то a_k^{At} выберем таким образом, чтобы полученный набор был разбиением.

Если $m + r \neq 0$, то в $\mathscr{B}$ есть ненулевой безатомный элемент, а по условию (b) такой элемент есть и в $\mathscr{A}$, разделим его на $a_1^{\mathrm{Als}}, \dots, a_m^{\mathrm{Als}}$ и $a'_1, \dots, a'_{r-1}, a''_r$. Если $r \neq 0$, то положим

$$a'_r = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i^{\mathrm{At}} - \sum_{i=1}^{l} a_i^{\mathrm{Atm}} - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\mathrm{Als}} - \sum_{i=1}^{r-1} a'_i.$$

Имеем $a''_r \leq a'_r$, поэтому a'_r не атомный. Если же $r = 0$, то по условию (e) $1 \in E$ в $\mathscr{A}$. Тогда

$$1 - \sum_{i=1}^{k} a_i^{\mathrm{At}} - \sum_{i=1}^{l} a_i^{\mathrm{Atm}} - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\mathrm{Als}} = a_1 + a_2,$$

где $a_1 \in \mathrm{Atm}$, а $a_2 \in \mathrm{Als}$. Положим $c_l^{\mathrm{Atm}} = a_l^{\mathrm{Atm}} + a_1$, $c_m^{\mathrm{Als}} = a_m^{\mathrm{Als}} + a_2$. Нетрудно видеть, что следующий набор будет искомым:

1) $a_1^{\mathrm{At}}, \dots, a_k^{\mathrm{At}}$ — атомы;

2) $a_1^{\mathrm{Als}}, \dots, a_{m-1}^{\mathrm{Als}}, c_m^{\mathrm{Als}}$ — ненулевые безатомные элементы;

3) $a_1^{\mathrm{Atm}}, \dots, a_{l-1}^{\mathrm{Atm}}, c_l^{\mathrm{Atm}}$ — атомные элементы, под которыми счетное число атомов;

4) $a'_1, \dots, a'_r$ не атомные и $|\operatorname{At}(\widehat{a}'_i)| \leq |\operatorname{At}(\widehat{b}'_i)|$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Существует вычислимая булева алгебра $\mathscr{C}_3$ такая, что в ней вычислимы* At *и* Atm, *но нет вычислимого представления, в котором вычислимы* At, Als *и* Atm.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3, возьмем $\sigma = \{\mathrm{At}, \mathrm{Atm}\}$, $T = E = \mathrm{Atm} + \mathrm{Als}$, $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}(1 + \eta + (\omega \times \eta))$, $\alpha = 3$, $\mathscr{A}$ — Δ_3^0-вычислимая булева алгебра, не имеющая Δ_2^0-вычислимого представления, $G = \{0\}$. Такая $\mathscr{A}$ существует в силу релятивизации (относительно оракула $\varnothing'$) результата из [10], где доказано существование Δ_2^0-вычислимой булевой алгебры, не имеющей вычислимого представления.

Покажем, что выполняются все условия теоремы 3. Отображение E, сопоставляющее каждой булевой алгебре ее идеал Ершова — Тарского, является идеальным оператором, что легко проверить по определению, и, более того, является стабильным идеальным оператором, что доказано в [11]. Набор σ является локальным набором, согласованным с E, по лемме 2 из [12].

Для проверки условий (a) и (b) достаточно показать, что $\forall a \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathrm{E}(\mathscr{B}_0)$ $\widehat{a} \leq_2^\sigma \widehat{a} \times \mathscr{B}_0$. Это легко сделать по лемме 5. Осталось проверить условие (c). Зафиксируем для $\mathscr{B}_0$ вычислимое представление, полученное из вычислимых нумераций для ω и η с помощью стандартных приемов для построения нумерации прямого произведения порядков, суммы порядков и нумерации булевой алгебры, построенной по линейному порядку. При такой нумерации в доказательстве теоремы 3 из [12] было показано, что для α-дружественности достаточно сформулировать описание отношения $\leq_\beta^\sigma$ для $\beta < \alpha$ так, чтобы это описание можно было эффективно проверить по концам интервалов, задающих элементы. Такое описание предъявлено в лемме 5.

Согласно заключению теоремы 3 найдется такая σ-вычислимая алгебра $\mathscr{C}_3$, что $\mathscr{C}_3/\mathrm{E} \cong \mathscr{A}$. Идеал E в σ-вычислимой алгебре описывается $\exists\forall$-формулой, т. е. Σ_2-формулой. Если же у $\mathscr{C}_3$ найдется вычислимое представление, в котором вычислимы At, Als и Atm, то E в этом представлении будет описываться Σ_1-формулой, тогда $\mathscr{C}_3/\mathrm{E}$ будет иметь Δ_2^0-вычислимое представление, что противоречит выбору $\mathscr{A}$ и тому, что $\mathscr{C}_3/\mathrm{E} \cong \mathscr{A}$. Значит, у $\mathscr{C}_3$ нет вычислимого представления, в котором вычислимы At, Als и Atm. Теорема доказана.

Резюмируем минимальность условий описания 1-разрешимости булевых алгебр с выделенным идеалом, полученных в теореме 2.

Следствие 1. 1. *Существует вычислимая* I-*алгебра* $(\mathscr{C}_1, I)$, *в которой вычислимы множества* $I \to 0$ *и* At_I, *но при этом у нее нет* 1-*разрешимого представления.*

2. *Существует вычислимая* I-*алгебра* $(\mathscr{C}_2, I)$, *в которой вычислимы множества* At *и* $I \to 0$, *но при этом у нее нет* 1-*разрешимого представления.*

3. *Существует вычислимая* I-*алгебра* $(\mathscr{C}_3, I)$, *в которой вычислимы множества* At *и* At_I, *но при этом у нее нет* 1-*разрешимого представления.*

Доказательство. Следует из предложений 2 и 3 и теоремы 4. Для п. 3 возьмем булеву алгебру $\mathscr{C}_3$ из теоремы 4 $I = \mathrm{Atm}$ и заметим, что $\mathrm{At}_I = \varnothing$, так как любая булева алгебра является безатомной в факторе по Atm.

Благодарность. Автор благодарит д.ф.-м.н. Павла Евгеньевича Алаева за предложенную задачу и важные замечания в ходе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пальчунов Д. Е.* Простые и счетно насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 82–103.
2. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
3. *Кейслер Г., Чен Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
4. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.
5. *Rabin M. O.* Decidability of second-order theories and automata on infinite trees // Trans. Am. Math. Soc. 1969. V. 141, N Jul. P. 1–35.
6. *Алаев П. Е.* Гиперарифметические булевы алгебры с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 963–976.
7. *Ash C. J., Knight J.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam: Elsevier, 2000.
8. *Barwise K. J.* Back and forth through infinitary logic // Studies in Model Theory. Ed. by M.D.Morley. M.A.A. Studies in Mathematics. 1973. V. 8. P. 5–34.
9. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

10. *Feiner L.* Hierarchies of Boolean algebras // J. Symbol. Logic. 1970. V. 35, N 3. P. 365–374.
11. *Алаев П. Е.* Вычислимые однородные булевы алгебры и одна метатеорема // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 2. С. 133–158.
12. *Леонтьева М. Н.* Минимальность некоторых условий разрешимости для булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 132–147.

Поступила в редакцию 22 марта 2024 г.
После доработки 19 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Гаськова Маргарита Николаевна (ORCID 0000-0001-8236-9722)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
leontyeva@math.nsc.ru