Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ РОСТА

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Аннотация. Пусть $V_r(\mathbb{R}^n)$ $(n \geq 2,\ r > 0)$ — множество локально суммируемых функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, имеющих нулевые интегралы по всем шарам радиуса r в $\mathbb{R}^n$. В работе изучается интерполяционная задача $f(a_k) = b_k$, $k = 1, 2, \dots$, для функций класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ с ограничениями роста на бесконечности. Рассматривается случай, когда $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ — множество точек, лежащих на некоторой прямой l в $\mathbb{R}^n$, в некотором смысле близкое к конечному объединению арифметических прогрессий, а $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < +\infty.$$

Показано, что указанная интерполяционная задача разрешима в классе функций, принадлежащих $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, которые вместе со всеми своими производными удовлетворяют специальному условию убывания на бесконечности. Это условие представляет собой верхнюю оценку, которая влечет степенное убывание в направлениях, ортогональных к l, а также не может быть существенно улучшена вдоль прямой l.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.506

Ключевые слова: интерполяция, сферические средние, функции Бесселя.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности $n \geq 2$ со стандартной нормой $|\cdot|$. Для области $G \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $V_r(G)$ множество функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(G)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, содержащимся в G (если область G не содержит таких шаров, то полагаем $V_r(G) = L_{\mathrm{loc}}(G)$). Определение указанного класса восходит к Помпейю [1], который ошибочно утверждал, что $V_r(\mathbb{R}^2) = \{0\}$. Простейшим примером ненулевой функции из $V_r(\mathbb{R}^n)$ является экспонента $f(x) = e^{i\lambda x_1/r}$, где λ — произвольный положительный нуль функции Бесселя $J_{n/2}$. Впервые это было установлено Л. Чакаловым [2] в 1944 г. В дальнейшем класс $V_r(G)$, а также различные его аналоги и обобщения изучались во многих работах (см. обзоры [3–5] и монографии [6–8], содержащие обширную библиографию).

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6).

С недавнего времени исследуются вопросы, связанные с разрешимостью интерполяционных задач для гладких функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$. В работе [9] было показано, что интерполяционная задача

$$f(a_k) = b_k \tag{1}$$

имеет решение $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, если множество узлов интерполяции $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ конечно, а $\{b_k\}$ — произвольный набор комплексных чисел. В случае бесконечного множества узлов ситуация становится значительно сложнее. Единственный из известных до настоящего времени положительных результатов в этом направлении касается случая, когда множество $\{a_k\}$ содержится в некотором луче в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \tag{2}$$

(см. [9]).

В данной работе изучается задача (1) для функций класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ с ограничениями роста на бесконечности. Рассматривается случай, когда множество $\{a_k\}$ является бесконечным и лежит на некоторой прямой l в $\mathbb{R}^n$. Показано, что если $\{a_k\}$ в некотором смысле близко к конечному объединению арифметических прогрессий, а $\{b_k\}$ удовлетворяет условию

$$\sum |b_k|^2 < +\infty,$$

то интерполяционная задача (1) разрешима в классе функций, принадлежащих $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяющих вместе со всеми своими производными условию степенного убывания на бесконечности в направлениях, ортогональных к прямой l (см. теорему и ее обсуждение в § 2).

§ 2. Формулировка основного результата

Далее, как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество n-мерных мультииндексов, т. е. векторов $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, у которых $\eta_j \in \mathbb{Z}_+$ при любом $j \in \{1, \dots, n\}$. Для мультииндекса $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим через

$$\partial^\eta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\eta_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\eta_n}$$

оператор частного дифференцирования соответствующего порядка.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — множество вещественных чисел, у которых все дробные части $\{\gamma_1\}, \dots, \{\gamma_m\}$ различны. Пусть также $a_{k,j}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) — множество различных вещественных чисел, удовлетворяющее следующему условию: существуют постоянная $\alpha > 0$ и положительная невозрастающая функция φ на $[0, +\infty)$ такие, что

$$|a_{k,j} - \alpha(k + \gamma_j)| \le \varphi(|k|), \quad k \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \dots, m\}, \tag{3}$$

и

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt < +\infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $r > 0$ и $b_{k,j}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) — множество комплексных чисел, удовлетворяющее условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} |b_{k,j}|^2 < +\infty. \tag{5}$$

Тогда существует функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$f(a_{k,j}, 0, \dots, 0) = b_{k,j} \quad \text{при любых } k, j, \tag{6}$$

и

$$|\partial^\eta f(x)|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |\partial^\eta f(x)|^2 dx_1 = O\big(\big(1 + \sqrt{|x|^2 - x_1^2}\big)^{2-n}\big), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

для всех $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Сделаем несколько замечаний.

Можно показать, что функция с условиями (6) и (7) в теореме 1 не единственна. Для этого достаточно применить теорему 1 к расширенной системе узлов, соответствующей постоянной $\alpha > 0$ и множеству $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1}\}$, где число γ_{m+1} выбирается так, чтобы $\{\gamma_{m+1}\} \neq \{\gamma_j\}$ при $j = 1, \dots, m$. При этом к условию (6) добавляются дополнительные условия, в которых правые части можно выбрать произвольно, сохраняя аналог условия (5) для новой интерполяционной задачи.

Далее, оценка (7) показывает, что сужение интерполирующей функции на любую прямую в $\mathbb{R}^n$, параллельную прямой

$$l = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0,\ j = 2, \dots, n\},$$

принадлежит классу L^2. В силу условий (6) и (5) это утверждение нельзя существенно ослабить (например, потребовать выполнение оценки

$$f(x) = O(|x|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad x \in l,$$

при $x \to \infty$ и некотором сколь угодно малом $\varepsilon > 0$).

Нетрудно видеть, что условие (2) является очевидным необходимым условием для того, чтобы интерполяционная задача (1) имела решение $f \in C(\mathbb{R}^n)$ для любой ограниченной последовательности $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$. Однако одного условия

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,j} = \infty, \quad j = 1, \dots, m,$$

(без дополнительных требований на расположение узлов $a_{k,j}$) недостаточно для справедливости теоремы 1. Действительно, применяя к f, удовлетворяющей (6) и (7), теорему Лагранжа о среднем на отрезке с концами $a_{k,j}$, $a_{k+1,j}$, получим оценку

$$b_{k+1,j} - b_{k,j} = O(|a_{k+1,j} - a_{k,j}|),$$

показывающую, что числа $b_{k,j}$, удовлетворяющие (5), нельзя выбрать произвольно.

Отметим, наконец, что существуют функции класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, имеющие сколь угодно быстрый рост на заданном луче в $\mathbb{R}^n$ (см. [10, следствие 2]). Поэтому оценка (7) не выполняется без каких-либо дополнительных условий на $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство теоремы 1 приводится в § 4, а в § 3 содержатся необходимые вспомогательные утверждения.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ и
$$\alpha_k = k + \gamma, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$
Пусть также $\{\beta_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — последовательность различных вещественных чисел такая, что
$$|\beta_k - \alpha_k| \leq \varphi(|k|), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$
где φ — положительная невозрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая (4). Из условия (4) и монотонности φ получаем, что
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} < +\infty. \tag{10}$$
Кроме того,
$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0. \tag{11}$$
Поэтому из (9) и (8) следует, что
$$\tau = \inf\{|\beta_k - \beta_l| : k, l \in \mathbb{Z},\ k \neq l\} > 0. \tag{12}$$
Для $\delta > 0$ обозначим
$$E_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_k| \geq \delta,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad G_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - \beta_k| \geq \delta,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
Рассмотрим целую функцию
$$B(z) = p_0(z) \prod_{k=1}^{\infty} p_k(z) p_{-k}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{13}$$
где
$$p_l(z) = \begin{cases} z, & \text{если } \beta_l = 0, \\ 1 - \frac{z}{\beta_l}, & \text{если } \beta_l \neq 0, \end{cases}$$
для любого $l \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Пусть $\delta > 0$. Тогда*
$$|B(z)| \leq c_1 |\sin(\pi(z - \gamma))| \quad \textit{при } z \in E_\delta, \tag{14}$$
$$|\sin(\pi(z - \gamma))| \leq c_2 |B(z)| \quad \textit{при } z \in G_\delta, \tag{15}$$
где постоянные $c_1, c_2 > 0$ не зависят от z.

Доказательство. Далее символами $c_3, c_4, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от z. Используя разложение функции $\sin(\pi(z - \gamma))$ в бесконечное произведение, из (13) при $z \in E_\delta$ находим
$$\frac{B(z)}{\sin(\pi(z - \gamma))} = \frac{p_0(z)}{\pi(z - \gamma)} \prod_{k=1}^{\infty} q_k(z),$$
где
$$q_k(z) = p_k(z) p_{-k}(z) \left(1 - \frac{z - \gamma}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{z - \gamma}{k}\right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Если $\beta_k \beta_{-k} \neq 0$, имеем
$$q_k(z) = \left(1 - \frac{k^2 + \beta_k \beta_{-k}}{\beta_k \beta_{-k}}\right) \left(1 + \frac{\beta_k - k - \gamma}{k + \gamma - z}\right) \left(1 + \frac{\beta_{-k} + k - \gamma}{\gamma - k - z}\right),$$

откуда

$$\ln|q_k(z)| \leq \ln\left(1+\left|\frac{k^2+\beta_k\beta_{-k}}{\beta_k\beta_{-k}}\right|\right) + \ln\left(1+\left|\frac{\beta_k-k-\gamma}{k+\gamma-z}\right|\right) + \ln\left(1+\left|\frac{\beta_{-k}+k-\gamma}{\gamma-k-z}\right|\right). \quad (16)$$

Из (9) и (8) следует, что

$$|\beta_k-k-\gamma| \leq \varphi(k), \quad |\beta_{-k}+k-\gamma| \leq \varphi(k), \quad (17)$$

а также

$$|k^2+\beta_k\beta_{-k}| \leq 2k\varphi(k)+(|\gamma|+\varphi(k))^2. \quad (18)$$

Используя неравенство $\ln(1+t) \leq t$ при $t \geq 0$, из (16)–(18) получаем

$$\ln|q_k(z)| \leq \frac{2k\varphi(k)+(|\gamma|+\varphi(k))^2}{|\beta_k\beta_{-k}|}+\varphi(k)\left(\frac{1}{|k+\gamma-z|}+\frac{1}{|\gamma-k-z|}\right).$$

Условие (10) показывает, что

$$\sum\frac{2k\varphi(k)+(|\gamma|+\varphi(k))^2}{|\beta_k\beta_{-k}|} < +\infty,$$

где суммирование производится по всем $k \in \mathbb{N}$ таким, что $\beta_k\beta_{-k} \neq 0$. Предположим теперь, что $x = \operatorname{Re} z \leq \gamma$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{|k+\gamma-z|} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k+\gamma-x} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k} < +\infty.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{|\gamma-k-z|} \leq c_3+\sum_{k\in M_1}\frac{\varphi(k)}{|k+x-\gamma|}+\sum_{k\in M_2}\frac{\varphi(k)}{k+x-\gamma},$$

где

$$M_1=\{k\in\mathbb{N}: k+x-\gamma\leq -1\}, \quad M_2=\{k\in\mathbb{N}: k+x-\gamma\geq 1\}.$$

Учитывая, что при $M_1 \neq \varnothing$

$$\sum_{k\in M_1}\frac{\varphi(k)}{|k+x-\gamma|} \leq \sum_{k<\frac{1}{2}(\gamma-x-1)}\frac{\varphi(k)}{\gamma-x-k}+\sum_{\frac{1}{2}(\gamma-x-1)\leq k\leq\gamma-x-1}\frac{\varphi(k)}{\gamma-x-k} \leq c_4,$$

а также

$$\sum_{k\in M_2}\frac{\varphi(k)}{k+x-\gamma} \leq \sum_{k\geq\gamma+1-x}\frac{\varphi(k+x-\gamma)}{k+x-\gamma} \leq c_5,$$

приходим к оценке

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{|\gamma-k-z|} \leq c_6.$$

Предположим теперь, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\beta_k\beta_{-k}=0$. Тогда такое k единственно и

$$|q_k(z)| \leq c_7 \quad \text{для } z \in E_\delta.$$

Отметим также, что

$$\left|\frac{p_0(z)}{z-\gamma}\right| \leq c_8 \quad \text{для } z \in E_\delta.$$

Полученные выше неравенства приводят к оценке (14) в случае $\operatorname{Re} z \leq \gamma$. Повторяя аналогичные рассуждения в случае $\operatorname{Re} z > \gamma$, получим (14) при всех $z \in E_\delta$.

Для доказательства оценки (15) достаточно повторить рассуждения из доказательства неравенства (14), при этом нужно поменять местами функции $B(z)$ и $\sin(\pi(z-\gamma))$, а также использовать (9), (11) и (10). $\square$

Лемма 2. *Выполнены следующие утверждения.*

(i) *Существует* $c_1 > 0$ *такое, что*

$$|B(z)| \le c_1 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

(ii) *Существует* $c_2 > 0$ *такое, что*

$$|B'(\beta_k)| \ge c_2 \quad \textit{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Если $z \in E_\delta$, оценка (19) следует из (14). В случае, когда $|z - \alpha_k| < \delta$ при некотором $z \in \mathbb{Z}$, для доказательства (i) достаточно применить принцип максимума модуля к функции $B(z)$ в круге $|z - \alpha_k| \le \delta$.

Докажем (ii). Пусть τ определено равенством (12) и $\delta \in (0, \tau/2)$. Тогда при достаточно больших $|k|$ имеем

$$|B'(\beta_k)| \ge \min_{|z-\beta_k|\le\delta} \frac{|B(z)|}{|z-\beta_k|} \ge \frac{1}{\delta} \min_{|z-\beta_k|=\delta} |B(z)|.$$

Используя (9), (11) и (15), из этого неравенства получаем (20). $\square$

Пусть $\{\xi_q\}_{q=-\infty}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел такая, что

$$K_1 < \xi_{q+1} - \xi_q < K_2 \tag{21}$$

для некоторых констант $K_1, K_2 > 0$ и всех $q \in \mathbb{Z}$. Пусть также $\{b_q\}_{q=-\infty}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} |b_q|^2 < +\infty. \tag{22}$$

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и функция* u *голоморфна и ограничена в полосе*

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}.$$

Пусть также $u(\xi_q) = 0$ *для всех* $q \in \mathbb{Z}$. *Тогда функция*

$$v(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} b_q \left|\frac{u(t)}{t-\xi_q}\right|^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит классу $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $M = \sup\{|u(z)|,\ z \in \Pi\}$ и $q \in \mathbb{Z}$. Если $z \in \Pi$ и $|z - \xi_q| > \varepsilon/2$, имеем

$$\left|\frac{u(z)}{z-\xi_q}\right| = \left(1 + \frac{1}{|z-\xi_q|}\right)\frac{|u(z)|}{1+|z-\xi_q|} < \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)\frac{M}{1+|z-\xi_q|}.$$

Пусть теперь $|z - \xi_q| \le \varepsilon/2$. Применяя в данном круге принцип максимума модуля к функции $u(z)/(z - \xi_q)$, получаем

$$\max_{|z-\xi_q|\le\varepsilon/2} \left|\frac{u(z)}{z-\xi_q}\right| \le \frac{2}{\varepsilon} M \le \frac{(1+2/\varepsilon)M}{1+|z-\xi_q|}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{u(t)}{t-\xi_q}\right| \le \frac{c_1}{1+|t-\xi_q|}, \quad t \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от t и q. Положим

$$t_q = \frac{1}{2}(\xi_{q-1} + \xi_q), \quad q \in \mathbb{Z},$$

и определим функцию $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенством

$$h(\xi) = |b_q| \quad \text{при } \xi \in [t_q, t_{q+1}), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Из (22) и (21) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 \, dt = \sum_{q=-\infty}^{\infty} |b_q|^2 (t_{q+1} - t_q) < +\infty. \tag{24}$$

Кроме того, при $\xi \in [t_q, t_{q+1}]$, $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$|(1 + |t - \xi_q|)^{-1} - (1 + |t - \xi|)^{-1}| \le \frac{|\xi - \xi_q|}{(1 + |t - \xi_q|)(1 + |t - \xi|)} < \frac{K_2}{1 + |t - \xi|},$$

откуда

$$(1 + |t - \xi_q|)^{-1} < \frac{K_2 + 1}{1 + |t - \xi|}.$$

Следовательно, в силу (21)

$$(1 + |t - \xi_q|)^{-2} < \frac{(K_2 + 1)^2}{K_1} \int_{t_q}^{t_{q+1}} (1 + |t - \xi|)^{-2} \, d\xi \tag{25}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}$. Используя неравенства (23) и (25), получаем

$$|v(t)| \le c_1^2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} |b_q| (1 + |t - \xi_q|)^{-2}$$
$$< c_2 \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{t_q}^{t_{q+1}} \frac{|b_q|}{(1 + |t - \xi|)^2} \, d\xi = c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) \, d\xi}{(1 + |t - \xi|)^2}, \tag{26}$$

где $c_2 > 0$ не зависит от t. Условие (24) показывает, что интеграл в правой части (26) есть свертка функций из класса $L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, эта свертка принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и из (26) следует утверждение леммы 3.

Пусть $\nu > -1$. Рассмотрим четную целую функцию

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1) 2^{2k+\nu}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где Γ — гамма-функция. Функция $\mathbf{I}_\nu$ связана с функцией Бесселя J_ν равенством

$$\mathbf{I}_\nu(z) = z^{-\nu} J_\nu(z), \quad z \neq 0, \tag{27}$$

где, как обычно,

$$z^{-\nu} = |z|^{-\nu} e^{-i\nu \arg z}, \quad -\pi < \arg z \le \pi.$$

Из (27) следует (см. [11, гл. 1, § 23]), что функция $\mathbf{I}_\nu$ имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули вещественные и простые.

Пусть $\lambda > 0$, $t \in (-\lambda, \lambda)$ и

$$\Phi_{\lambda,t}(x) = e^{-itx_1} \mathbf{I}_{\frac{n-3}{2}} \Big(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(|x|^2 - x_1^2)} \Big), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\Delta\Phi_{\lambda,t} + \lambda^2\Phi_{\lambda,t} = 0, \tag{29}$$

где $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ *— оператор Лапласа в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для краткости положим

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 - t^2}, \quad \psi(x) = \sqrt{|x|^2 - x_1^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $j \in \{2, \dots, n\}$. Используя формулы

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}, \quad \frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

(см. [11, гл. 1, § 6]), из (28) находим

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda,t}}{\partial x_j} = e^{-itx_1}(\mu\psi(x))^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(\mu\psi(x)) \frac{\mu^2 x_j}{(\mu\psi(x))^{n-1}},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda,t}}{\partial x_j^2} = -\mu^2\Phi_{\lambda,t}\frac{x_j^2}{(\psi(x))^2} - e^{-itx_1}\mu^2\mathbf{I}_{\frac{n-1}{2}}(\mu\psi(x))\left(1 - \frac{(n-1)x_j^2}{(\psi(x))^2}\right).$$

Суммируя полученные вторые производные по $j = 2, \dots, n$ и учитывая очевидное соотношение

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda,t}}{\partial x_1^2} = -t^2\Phi_{\lambda,t},$$

получаем (29). □

Лемма 5. *Для любых* $\varepsilon \in (0, \lambda)$, $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ *выполнено неравенство*

$$|\partial^\eta\Phi_{\lambda,t}(x)| \le c\big(1 + \sqrt{|x|^2 - x_1^2}\big)^{1-\frac{n}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ |t| \le \lambda - \varepsilon,$$

с постоянной $c > 0$, *не зависящей от* x *и* t.

Доказательство. Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — радиальная функция с носителем в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le R\}$. Сферическое преобразование функции g задается равенством

$$\widetilde{g}(z) = 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|)dx, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно теореме о среднем для решений уравнения Гельмгольца если функция $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n,$$

то

$$(f * g)(x) = f(x)\widetilde{g}(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где знак $*$ обозначает свертку функций f и g. Выбирая g так, что $\widetilde{g}(\lambda) \ne 0$, отсюда и из (29) получаем

$$\partial^\eta\Phi_{\lambda,t} = \frac{1}{\widetilde{g}(\lambda)}\partial^\eta(\Phi_{\lambda,t} * g) = \frac{1}{\widetilde{g}(\lambda)}\Phi_{\lambda,t} * \partial^\eta g.$$

Следовательно,

$$|\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x)| \leq \frac{1}{|\widetilde{g}(\lambda)|} \int\limits_{|y|\leq R} |\partial^\eta g(y)| dy \cdot \max_{|y-x|\leq R} |\Phi_{\lambda,t}(y)|. \tag{30}$$

Используя (28) и асимптотическую формулу для функции $\mathbf{I}_{\frac{n-3}{2}}(z)$ при $z \to \infty$ (см. [11, гл. 2, § 29]), имеем оценку

$$\max_{|y-x|\leq R} |\Phi_{\lambda,t}(y)| \leq c_1 \big(1 + \sqrt{|x|^2 - x_1^2}\big)^{1-\frac{n}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |t| \leq \lambda - \varepsilon,$$

где $c_1 > 0$ не зависит от x и t. Отсюда и из (30) следует утверждение леммы 5. $\square$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Прежде всего отметим, что если $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, то функция $f(\lambda x)$ принадлежит классу $(V_{r/\lambda} \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ для любого $\lambda > 0$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha = 1$. Пусть $j \in \{1, \dots, m\}$ и

$$B_j(z) = p_{0,j}(z) \prod_{k=1}^{\infty} p_{k,j}(z) p_{-k,j}(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где

$$p_{l,j}(z) = \begin{cases} z, & \text{если } a_{l,j} = 0, \\ 1 - \frac{z}{a_{l,j}}, & \text{если } a_{l,j} \neq 0, \end{cases}$$

при любом $l \in \mathbb{Z}$. Из (3) и (11) следует, что функция $B_j(z)$ целая. Положим

$$W(z) = \prod_{j=1}^{m} B_j(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{31}$$

Согласно (19) существует $c_1 > 0$ такое, что

$$|W(z)| \leq c_1 e^{\pi m |\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{32}$$

Числа $a_{k,j}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) являются простыми нулями функции W. Поскольку все дробные части $\{\gamma_1\}, \dots, \{\gamma_m\}$ различны, из (20), (31) и (15) заключаем, что

$$|W'(a_{k,j})| \geq c_2 \quad \text{для всех } k, j, \tag{33}$$

где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от k и j. Из (3) и (11) следует также, что

$$\zeta = \inf\{|a_{k,j} - a_{l,i}| : k, l \in \mathbb{Z},\ i, j \in \{1, \dots, m\},\ (k, j) \neq (l, i)\} > 0. \tag{34}$$

Рассмотрим функцию

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} b_{k,j} \left(\frac{W(z)}{W'(a_{k,j})(z - a_{k,j})}\right)^2, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{35}$$

Из условий (5), (33) и (3) вытекает, что ряд в правой части равенства (35) сходится в $\mathbb{C}$ локально равномерно. Следовательно, функция H целая, при этом

$$H(a_{k,j}) = b_{k,j} \quad \text{при всех } k, j. \tag{36}$$

Пусть $\delta \in (0, \zeta/2)$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$|z - a_{k,j}| \geq \delta \quad \text{для всех } k, j.$$

Из (35) и (33) получаем

$$|H(z)| \leq \frac{|W(z)|^2}{c_2^2} \Big(\sum_{k,j} |b_{k,j}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k,j} \frac{1}{|z - a_{k,j}|^4} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, из (5) и (32) видно, что

$$|H(z)| \leq c_3 e^{2\pi m |\operatorname{Im} z|}, \tag{37}$$

где $c_3 > 0$ не зависит от z. Применяя к функции H принцип максимума модуля в каждом круге вида $|z - a_{k,j}| \leq \delta$ и используя (37), получаем, что неравенство

$$|H(z)| \leq c_4 e^{2\pi m |\operatorname{Im} z|} \tag{38}$$

верно уже для всех $z \in \mathbb{C}$ и некоторого $c_4 > 0$, не зависящего от z. Далее, из (35) и (33) имеем

$$|H(z)| \leq \frac{1}{c_2^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} |b_{k,j}| \frac{|W(z)|^2}{|z - a_{k,j}|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно (34) и лемме 3 отсюда следует, что сужение функции H на вещественную ось содержится в классе $L^2(\mathbb{R})$. Используя (38) и теорему Пэли — Винера, приходим к выводу, что существует функция $h \in L^2(\mathbb{R})$ с носителем на $[-2\pi m, 2\pi m]$ такая, что

$$\widehat{h}(z) = \int_{-2\pi m}^{2\pi m} h(t) e^{-itz} dt = H(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{39}$$

Далее, пусть $\lambda > 2\pi m$ и $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r\lambda) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \int_{-2\pi m}^{2\pi m} h(t) \Phi_{\lambda,t}(x)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{40}$$

где $\Phi_{\lambda,t}$ определяется формулой (28). Из (40) и (29) следует, что

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n.$$

Применяя теорему о шаровых средних для решений уравнения Гельмгольца, отсюда имеем равенство

$$\int_{|y| \leq r} f(x+y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r) f(x) = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, из (40), (39) и (36) видно, что

$$f(a_{k,j}, 0, \dots, 0) = b_{k,j} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \dots, m\}. \tag{41}$$

Пусть теперь $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_n\} \in \mathbb{Z}_+^n$, тогда

$$\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x) = (-it)^{\eta_1} \partial^{\eta'} \Phi_{\lambda,t}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $t \in [-2\pi m, 2\pi m]$, $\eta' = \{0, \eta_2, \dots, \eta_n\}$. По теореме Планшереля отсюда и из (40) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\partial^\eta f(x)|^2 dx_1 = 2\pi \int_{-2\pi m}^{2\pi m} |h(t)|^2 |\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x)|^2 \, dt. \tag{42}$$

Из (40) следует также, что

$$|\partial^\eta f(x)| \leq \int_{-2\pi m}^{2\pi m} |h(t)| \cdot |\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x)| \, dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{43}$$

Ввиду леммы 5 неравенство (43) и соотношение (42) показывают, что выполнено условие (7). Применяя во внимание (41), заключаем, что функция f удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pompeiu D.* Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réeles // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique. Sér. 5. 1929. V. 15. P. 265–269.
2. *Chakalov L.* Sur un problème de D. Pompeiu // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. 1944. V. 40. P. 1–14.
3. *Беренстейн К. А., Струппа Д. К.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 54. С. 5–111.
4. *Bagchi S. C., Sitaram A.* The Pompeiu problem revisited // L'Enseignement Math. 1990. V. 36, N 1–2. P. 67–91.
5. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 185–194.
6. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
7. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer-Verl. London Limited, 2009.
8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Interpolation problems for functions with zero ball means // Issues Anal. 2021. V. 10, N 3. P. 129–140.
10. *Волчков В. В., Волчков Вит. В.* Аппроксимация функций на лучах в $\mathbb{R}^n$ решениями уравнений свертки // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 56–64.
11. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 25 марта 2024 г.
После доработки 25 марта 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Волчков Валерий Владимирович, Волчков Виталий Владимирович
Донецкий государственный университет,
ул. Университетская 24, Донецк 283001
valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com