Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.54

ПТОЛЕМЕЕВА ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕТРАД И КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В. В. Асеев

Аннотация. Рассматривается птолемеева характеристика четверки непустых попарно не пересекающихся компактных подмножеств (обобщенных тетрад). Основная теорема в этой статье утверждает, что любое многозначное отображение F пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, у которого образы различных точек не пересекаются и каждый из них содержит не более двух различных точек, является обратным к K-квазимероморфному отображению тогда и только тогда, когда F имеет контролируемую верхнюю оценку искажения птолемеевой характеристики тетрад.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.502

Ключевые слова: отображение с ограниченным искажением, квазирегулярное отображение, квазимероморфное отображение, квазимёбиусово отображение, многозначное отображение, птолемеева характеристика тетрад.

Введение

Пространственные отображения с ограниченным искажением были впервые введены и изучены в работах Ю. Г. Решетняка в середине прошлого века и впоследствии появились в статьях финских математиков под названием «квазирегулярные отображения». Их обобщение на пространство $\overline{\mathbb{R}}^n$ получило название «квазимероморфные отображения».

Многозначные квазимёбиусовы отображения в пространствах, наделенных птолемеевой мёбиусовой структурой (в смысле С. В. Буяло), были введены в [1] как отображения со свойством ω-BAD (bouded angular distortion). Свойство квазимёбиусовости определялось в [2] как контролируемое искажение абсолютного двойного отношения тетрад (четверок различных точек) при инъективных отображениях метрических пространств. Там же были отмечены связи между квазимёбиусовостью, квазисимметричностью и квазиконформностью отображений. В [3] было замечено, что птолемееву характеристику тетрад можно с тем же успехом использовать в определении квазимёбиусовости, как и абсолютное двойное отношение. Чтобы распространить понятие квазимёбиусовости на случай неинъективных отображений птолемееву характеристику пришлось определить для четверок попарно не пересекающихся множеств в метрических (или полуметрических) пространствах (для так называемых обобщенных тетрад), что и было сделано в [1]. В результате был получен класс многозначных отображений с контролируемым искажением птолемеевой характеристики тетрад, которые изучались в [4–6] как многозначные квазимёбиусовы отображения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0005).

Один из основных вопросов в теории таких отображений заключался в установлении связи между квазимероморфными отображениями пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ из работ [7–9] и многозначной квазимёбиусовостью обратных к ним отображений.

Для натуральных $n \geq 2$ и $N \geq 1$ рассматривается семейство $\mathscr{F}(K; N, n)$ всех K-квазимероморфных отображений $f : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, у которых $\#f^{-1}(y) \leq N$ для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, и соответствующее семейство $\mathscr{F}^{-1}(K; N, n)$ обратных к ним многозначных отображений. Вместе с этим рассматривается семейство $\mathscr{Q}M^*(\omega; N, n)$ всех многозначных отображений F пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ таких, что $\#F(y) \leq N$ для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $F(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$, и при этом для каждой тетрады Ψ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с птолемеевой характеристикой $\beta(\Psi)$ выполняется оценка $\beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi))$ с заданной контрольной функцией $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

В [10] было доказано включение $\mathscr{F}^{-1}(K; N, n) \subset \mathscr{Q}M^*(\omega; N, n)$ для всех $n \geq 2$ и $N \geq 1$ с контрольной функцией ω, зависящей только от K, n, N. Обратное включение $\mathscr{Q}M^*(\omega; N, n) \subset \mathscr{F}^{-1}(K; N, n)$ было получено в [6] только для $n = 2$, $N \geq 1$. В данной статье доказана справедливость этого включения для случая $n > 2$, $N = 2$ (теорема 4.1).

§ 1. Свойство $\boldsymbol{\omega}$-BAD

Пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ наделяем хордовой метрикой $\sigma(\cdot, \cdot)$. Семейство всех непустых компактных множеств в $\overline{\mathbb{R}^n}$ обозначаем через $\mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}^n})$. *Тетрада* Ψ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ есть четверка попарно различных точек, разбитая на две пары: $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$.

Птолемеева характеристика тетрады Ψ определяется формулой

$$\beta(\Psi) = \beta(a_1, a_2; b_1, b_2) := \frac{\sigma(a_1, b_1) \cdot \sigma(a_2, b_2) + \sigma(a_1, b_2) \cdot \sigma(a_2, b_1)}{\sigma(a_1, a_2) \cdot \sigma(b_1, b_2)}. \tag{1.0.1}$$

По теореме Птолемея для любой тетрады Ψ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ выполняется неравенство $\beta(\Psi) \geq 1$. Если все точки тетрады Ψ лежат в $\mathbb{R}^n$, то хордовые расстояния в формуле (1.0.1) можно заменить евклидовыми расстояниями.

Аналогично *обобщенная тетрада* $(A_1, A_2; B_1, B_2)$ — это четверка непустых и попарно не пересекающихся множеств в $\overline{\mathbb{R}^n}$, разбитая на две пары. Ее птолемеева характеристика есть

$$\beta(A_1, A_2; B_1, B_2) := \max_{u_1 \in A_1; u_2 \in A_2} \{ \min_{v_1 \in B_1; v_2 \in B_2} \beta(u_1, u_2; v_1, v_2) \}. \tag{1.0.2}$$

Для заданного открытого множества $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, натурального $N \geq 1$ и гомеоморфизма $\omega : [0, \infty) \to [0, +\infty)$ обозначим через $\mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ семейство всех многозначных отображений $F : \Omega \to \mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ таких, что

(1.0.3) множество $F(\Omega) := \bigcup \{F(y) : y \in \Omega\}$ открыто в $\overline{\mathbb{R}}^n$;

(1.0.4) (*гиперинъективность*) если $y' \neq y''$, то $F(y') \cap F(y'') = \varnothing$;

(1.0.5) $\#F(y) \leq N$ для всех $y \in \Omega$;

(1.0.6) (свойство ω-BAD) для любой тетрады $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$ выполняется неравенство

$$\beta(F(\Psi)) = \beta(F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2)) \leq \omega(\beta(\Psi)).$$

1.1. *Любое многозначное отображение* $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ *непрерывно, т. е.*

$$F(y_0) = \operatorname*{Lim}_{y \to y_0; y \neq y_0} F(y) \tag{1.1.0}$$

в любой точке $y_0 \in \Omega$. Кроме того, левое обратное к F отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ (оно существует в силу условия (1.0.4) гиперинъективности) является непрерывным, открытым, замкнутым и дискретным в $F(\Omega)$.

Доказательство. В силу (1.0.5) и (1.0.6) отображение $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ удовлетворяет всем условиям теоремы [5, теорема 3.2], а именно: метрическое пространство $(\overline{\mathbb{R}^n}, \sigma)$ птолемеево и компактно, отображение $F : \Omega \to F(\Omega)$ имеет свойство ω-BAD и $F(y)$ компактно для любой точки $y \in \Omega$. По этой теореме для любой точки $y_0 \in \Omega$ и любой открытой окрестности V множества $F(y_0)$ существует такая окрестность U точки y_0, что $F(U) \subset V$. Согласно определению из [11, § 18.I(3)] это означает, что F полунепрерывно сверху в каждой точке $y_0 \in \Omega$, а следовательно (см. [11, § 18.I, теорема 1]), F непрерывно сверху в Ω. Так как отображение $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2 из [1], получаем следующее утверждение: *в каждой точке $x_0 \in F(\Omega)$ отображение f либо непрерывно (случай 1), либо в произвольно малой окрестности этой точки принимает все значения из Ω кроме, возможно, одного (случай 2).*

В открытом множестве $\Omega \setminus \{f(x_0)\}$ имеется пара различных точек a и b. По условию гиперинъективности (1.0.4) множества $F(a)$, $F(b)$ и $F(x_0)$ компактны и попарно не пересекаются. Значит, существует окрестность $U \subset F(\Omega)$ точки $x_0 \in F(f(x_0))$, не пересекающаяся с $F(a)$ и $F(b)$. Так как f не принимает в U значения a и b, то случай 2 не реализуется и, следовательно, реализуется случай 1, т. е. f непрерывно в каждой точке $x_0 \in F(\Omega)$ и тем самым f непрерывно на множестве $F(\Omega)$.

Так как (см. [11, § 18.I, теорема 4]) непрерывное отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ замкнуто тогда и только тогда, когда отображение $F = f^{-1}$ полунепрерывно сверху, то f — замкнутое отображение.

Для любой точки $y \in \Omega$ множество $F(y)$ не имеет внутренних точек относительно открытого множества $F(\Omega)$ в силу (1.0.5). Теорема 2.2 из [4] утверждает, что в этой ситуации отображение f открыто.

Таким образом, f — открытое и дискретное (в силу (1.0.5)) отображение.

Теорема 4 из [11, § 18.I] утверждает, что непрерывное отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ открыто тогда и только тогда, когда $F = f^{-1}$ полунепрерывно снизу. Значит, отображение F полунепрерывно снизу.

Таким образом, многозначное отображение F, будучи полунепрерывным сверху и снизу, непрерывно относительно экспоненциальной топологии в гиперпространстве $\mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}^n})$ (см. [11, § 17.I, § 42.I]). Так как $\overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное метрическое пространство, то экспоненциальная топология в $\mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}^n})$ совпадает с топологией, порожденной расстоянием по Хаусдорфу, и с топологией, порожденной топологическим пределом Lim (см. [11, § 42.II, замечание 1]). Таким образом, доказано (1.1.0), и это завершает доказательство утверждения 1.1.

§ 2. О нормальных окрестностях

Напомним некоторые важные свойства непрерывных открытых и дискретных отображений в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

2.1. Лемма [7, лемма 2.9]. *Пусть $f : D \to \Omega$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество Ω. Тогда у любой точки $x_0 \in D$ с образом $y_0 := f(x_0)$ существует положительное число $r^*(x_0)$ такое, что при $0 < r < r^*(x_0)$ замкнутый шар $\overline{B}(y_0, r)$ лежит в Ω, а x_0-компонента $U(r)$ множества $f^{-1}(B(y_0, r))$ имеет следующие свойства:*

(2.1.1) $\overline{U(r)}$ — *компактное подмножество в* D;

(2.1.2) $f(U(r)) = B(y_0, r)$;

(2.1.3) $f(\partial U(r)) = \partial B(y_0, r)$;

(2.1.4) $\overline{U(r)} \cap f^{-1}(y_0) = \{x_0\}$;

(2.1.5) $\overline{U(r)} \to \{x_0\}$ *при* $r \to 0$;

(2.1.6) *если* $0 < s < r \le r^*(x_0)$, *то* $U(r) \setminus \overline{U(s)}$ *является кольцевой областью и* $f(U(r) \setminus \overline{U(s)}) = B(y_0, r) \setminus \overline{B}(y_0, s)$.

Указанное здесь множество $U(r)$ называется (*канонической*) *нормальной окрестностью* точки x_0 и обозначается символом $U(x_0, f, r)$.

2.2. Утверждение. *Пусть отображение* $f : D \to \Omega$ *открытого множества* $D \subset \mathbb{R}^n$ *на открытое множество* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *таково, что* $F = f^{-1} \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$. *Для каждой точки* $y_0 \in \Omega$ *положим* $\Delta(y_0) := \min\{|x' - x''|/3 : x', x'' \in F(y_0), x' \ne x''\}$, *если* $\#F(y_0) > 1$, *и* $\Delta(y_0) = 1$, *если* $\#F(y_0) = 1$. *Пусть* $\Delta_0(y_0) < \Delta(y_0)$ *выбрано так, чтобы* $\overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) \subset D$ *при любом* $x \in F(y_0)$.

Тогда существует положительное число $\delta^*(y_0) < \min\{r^*(x) : x \in F(y_0)\}$ *такое, что при любом* $0 < r \le \delta^*(y_0)$ *канонические нормальные окрестности* $U(x, f, r)$ *точек* $x \in F(y_0)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

(2.2.1) $\overline{U}(x, f, r) \subset \overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) \subset D$ *при* $x \in F(y_0)$;

(2.2.2) $F(\overline{B}(y_0, r)) = f^{-1}(\overline{B}(y_0, r)) = \bigsqcup\{\overline{U}(x, f, r) : x \in F(y_0)\}$;

(2.2.3) *ограничение* $F|_{\overline{B}(y_0,r)}$ *имеет то же самое свойство* ω-BAD, *что и* F.

Доказательство. Согласно 1.1 отображение $f : D \to \Omega$ непрерывное, открытое и дискретное. Поэтому оно удовлетворяет требованиям леммы 2.1 и, следовательно, можно рассматривать канонические нормальные окрестности $U(x, f, r)$.

Пусть $y_0 \in \Omega$. Так как $\#F(y_0) \le N$, существует положительное число $\Delta_0(y_0)$, указанное в формулировке, и получаем конечный набор $\{\overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) : x \in F(y_0)\}$ попарно не пересекающихся замкнутых шаров в D. В обозначениях леммы 2.1 из свойства (2.1.5) вытекает, что для каждой точки $x \in F(y_0)$ имеется положительное число $r(x) < r^*(x)$ такое, что $U(x, f, r) \subset B(x, \Delta_0(y_0))$ при всех $0 < r < r(x)$.

Положив $\delta' := \min\{r(x) : x \in F(y_0)\}$, для каждого $0 < r < \delta'$ получаем конечный набор $\{U(x, f, r) : x \in F(y_0)\}$ канонических нормальных окрестностей, удовлетворяющих условию (2.2.1).

Так как $B := \bigsqcup\{B(x, \Delta_0(y_0)) : x \in F(y_0)\}$ — открытая окрестность множества $F(y_0)$, а отображение F непрерывно (и, в частности, полунепрерывно сверху) в точке y_0, то существует положительное число $\delta^*(y_0) < \delta'$, для которого $F(B(y_0, r)) \subset B$, как только $r < \delta^*(y_0)$. Тогда каждая компонента U открытого множества $F(B(y_0, r)) = f^{-1}(B(y_0, r))$ содержится в B и поэтому имеет компактное замыкание в D. В силу [7, лемма 2.5] U является нормальной областью для отображения f и тем самым $f(U) = B(y_0, r)$.

Отсюда вытекает, что $U = U(x, f, r)$ для некоторой точки $x \in F(y_0)$. Таким образом, $f^{-1}(B(y_0, r)) = \bigsqcup\{U(x, f, r)) : x \in F(y_0)\}$, и это означает выполнение (2.2.2) при любом $0 < r < \delta^*(y_0)$.

В силу (2.2.2) $F(\Psi) \subset \bigcup\{\overline{U}(x, f, r) : x \in F(y_0)\}$ для любой тетрады Ψ в $\overline{B}(y_0, r)$. Это означает, что $F|_{\overline{B}(y_0,r)}(\Psi) = F(\Psi)$, и получаем оценку

$$\beta(F|_{\overline{B}(y_0,r)}(\Psi)) \le \omega(\beta(\Psi)).$$

Следовательно, для любого положительного $r < \delta^*(y_0)$ выполняется (2.2.3).

Утверждение 2.2 доказано.

§ 3. О квазирегулярных отображениях

Будем использовать метрическое определение квазирегулярного отображения, следуя [7].

3.1. Пусть $f : D \to \Omega$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Точку $x_0 \in D$ называют *регулярной* для f, если f инъективно в некоторой окрестности этой точки; в противном случае x_0 называют *точкой ветвления* отображения f. Множество $B_f \subset D$ всех точек ветвления для f замкнуто относительно D и имеет топологическую размерность $\leq n - 2$ (см. [7, лемма 2.11]). Если D_0 — некоторая компонента множества D, то $D_0 \setminus B_f$ есть область, и ограничение $f|_{D_0}$ либо сохраняет ориентацию в D_0, либо меняет ее на противоположную.

3.2 [7, определение 4.2]. Пусть $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0) \in \Omega$ и $U(x_0, f, r)$ — каноническая нормальная окрестность точки x_0, где $0 < r < r^*(x_0)$. Число (возможно, ∞)

$$H^*(x_0, f) := \limsup_{r \to 0} \frac{\max\{|u - x_0| : u \in \partial U(x_0, f, r)\}}{\min\{|u - x_0| : u \in \partial U(x_0, f, r)\}} \tag{3.2.1}$$

называется *обратной линейной дилатацией* отображения f в точке x_0.

3.3. Определение [7, теорема 4.14]. Непрерывное, открытое и дискретное отображение $f : D \to \Omega$ открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется K^*-*квазирегулярным* с $1 \leq K^* < \infty$ если выполняются следующие два условия:

(3.3.1) $H^*(x, f) \leq K^*$ почти всюду в $D \setminus B_f$ относительно n-мерной меры Лебега;

(3.3.2) функция $H^*(x, f)$ локально ограничена на B_f.

3.4. Лемма. *Пусть $f : D \to \Omega$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, на открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть B_f — множество точек ветвления отображения f. Если $F = f^{-1} \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$, то $H^*(x, f) \leq \omega(3)$ в любой точке $x \in D \setminus B_f$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in D \setminus B_f$ и $y_0 := f(x_0) \in \Omega$. Отметим некоторую точку $z_0 \in \Omega \setminus \{y_0\}$. Тогда $F(z_0) = f^{-1}(z_0) \subset D \setminus F(y_0)$. Применим утверждение 2.2 к отображению $f : D' \to \Omega'$ открытого множества $D' := D \setminus F(z_0)$ на открытое множество $\Omega' := \Omega \setminus \{z_0\}$ и используем константы $\Delta_0(y_0)$ и $\delta^*(y_0)$, установленные в 2.2. Получаем конечный набор $\{\overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) : x \in F(y_0)\}$ замкнутых шаров с попарными расстояниями $\geq \Delta_0(y_0)$ между ними. Кроме того, если $r < \delta^*(y_0)$, то $U(x, f, r) \subset B(x, \Delta_0(y_0))$ для каждой точки $x \in F(y_0)$ и при этом

$$F(B(y_0, r)) = \bigcup \{U(x, f, r) : x \in F(y_0))\}. \tag{3.4.1}$$

Так как точка x_0 лежит вне B_f, отображение f инъективно в некоторой окрестности U_0 этой точки. Значит, существует $r_0 < \min\{\delta^*(y_0), |y_0 - z_0|/3\}$ такое, что $\overline{U}(x_0, f, r) \subset U_0$, как только $r \leq r_0$.

Для каждого $0 < r < r_0$ найдем пару различных точек $x_*(r)$ и $x^*(r)$ в $\partial U(x_0, f, r)$, для которых

$$|x_*(r) - x_0| = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, r)\},$$

$$|x^*(r) - x_0| = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, r)\}.$$

Точки $y_*(r) = f(x_*(r)) \in \partial B(y_0, r)$ и $y^*(r) = f(x^*(r)) \in \partial B(y_0, r)$ различны, ибо отображение $f|_{U_0}$ инъективно.

Получаем тетраду $\Psi(r) = (y_*(r), y_0; y^*(r), z_0)$ в Ω. Так как при $r \to 0$ имеется сходимость $|y_*(r) - z_0| \to |y_0 - z_0|$ и $|y^*(r) - z_0| \to |y_0 - z_0|$, справедлива оценка

$$\limsup_{r\to 0} \beta(\Psi(r)) = \limsup_{r\to 0} \frac{|y_*(r) - y^*(r)| \cdot |y_0 - z_0| + |y_*(r) - z_0| \cdot |y^*(r) - y_0|}{|y_*(r) - y_0| \cdot |y^*(r) - z_0|}$$
$$\leq \frac{2r \cdot |y_0 - z_0| + |y_0 - z_0| \cdot r}{r \cdot |y_0 - z_0|} = 3,$$

т. е.

$$\limsup_{r\to 0} \beta(\Psi(r)) \leq 3. \tag{3.4.2}$$

Образ тетрады $\Psi(r)$ при отображении F есть обобщенная тетрада

$$F(\Psi(r)) = (F(y_*(r)), F(y_0); F(y^*(r)), F(z_0)),$$

и ее птолемеева характеристика имеет оценку

$$\beta(F(\Psi(r))) \geq \min\{\beta(x_*(r), x_0; v_1, v_2) : v_1 \in F(y^*(r)), v_2 \in F(z_0)\},$$

где

$$\beta(x_*(r), x_0; v_1, v_2) = \frac{|x_*(r) - v_1| \cdot |x_0 - v_2| + |x_*(r) - v_2| \cdot |x_0 - v_1|}{|x_*(r) - x_0| \cdot |v_1 - v_2|}.$$

Если $v_1 \in F(y^*(r)) \cap \overline{U}(x_0, f, r)$, то $v_1 = x^*(r)$ в силу инъективности $f|_{U_0}$.

Если $v_1 \in F(y^*(r)) \setminus \{x^*(r)\}$, то ввиду (3.4.1) $v_1 \in \partial U(x, f, r)$ для некоторого $x \in F(y_0) \setminus \{x_0\}$. В этом случае $v_1 \in \overline{B}(x, \Delta_0(y_0))$ при $x \neq x_0$ и поэтому $|v_1 - x_0| > \Delta_0(y_0) > |x^*(r) - x_0|$.

Таким образом, приходим к равенству

$$\min\{|v_1 - x_0| : v_1 \in F(y^*(r))\} = |x^*(r) - x_0|. \tag{3.4.3}$$

Так как $x^*(r) \in \overline{B}(x_0, \Delta_0(y_0)) \subset D'$, а $v_2 \in F(z_0) \subset \partial D'$, для любой точки $v_2 \in F(z_0)$

$$|v_2 - x_0| > \Delta_0(y_0) \geq |x^*(r) - x_0|. \tag{3.4.4}$$

Из (3.4.3) и (3.4.4) следует, что для всех $v_1 \in F(y^*(r))$ и $v_2 \in F(z_0)$ выполняется неравенство

$$\beta(x_*(r), x_0; v_1, v_2) \geq \frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|} \cdot \frac{|v_1 - x_*(r)| + |x_*(r) - v_2|}{|v_1 - v_2|} \geq \frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|}.$$

Следовательно, при любом $0 < r < r_0$

$$\frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|} \leq \beta(F(\Psi(r))) \leq \omega(\beta(\Psi(r))),$$

и вместе с (3.4.2) это дает требуемый результат:

$$H^*(x_0, f) = \limsup_{r\to 0} \frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|} \leq \limsup_{r\to 0} \omega(\beta(\Psi(r))) \leq \omega(3).$$

Лемма 3.4 доказана.

3.5. Следствие. *Пусть $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$, где Ω и $D = \bigcup\{F(y) : y \in \Omega\}$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Если $\#F(y) \equiv k \le N$ для всех $y \in \Omega$, то левое обратное к F отображение $f : D \to \Omega$ не имеет точек ветвления в D и является K^*-квазирегулярным с $K^* \le \omega(3)$.*

Доказательство. В силу 1.1 отображение F непрерывно, а его левое обратное отображение $f : D \to \Omega$ непрерывно, открыто и дискретно. Так как F удовлетворяет всем условиям в [6, утверждение 2.4], f является локальным гомеоморфизмом в D. Значит, $B_f = \varnothing$ и требуемый результат непосредственно вытекает из леммы 3.4.

Следствие доказано.

§ 4. Основной результат

4.1. Теорема. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и отображение $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ таково, что $\#F(y) = N > 1$ для всех $y \in \Omega \setminus \Omega_1$, где $\Omega_1 := \{y \in \Omega : \#F(y) = 1\}$. Тогда левое обратное к F отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ является K^*-квазирегулярным с $K^* \le \omega(3)$.*

Доказательство. Для случая $n = 2$ требуемое утверждение вытекает из более общей теоремы в [6]. Поэтому в дальнейшем считаем, что $n \ge 3$.

Каждая компонента открытого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$ (см. [11, § 49.II, теорема 4]) и замкнутым относительно A. Так как отображение F непрерывно, по утверждению 1.1 левое обратное отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ является открытым и замкнутым относительно $F(\Omega)$ и Ω (см. [11, § 17.III, теорема 2]). Следовательно, f переводит каждую компоненту множества $F(\Omega)$ в компоненту множества Ω. Если Ω' — компонента множества Ω, то множество $F(\Omega')$ есть конечное объединение компонент множества $F(\Omega)$ и поэтому является открытым в R^n. Тогда ограничение $F|_{\Omega'}$ отображения F на любой компоненте Ω' множества Ω удовлетворяет условиям (1.0.3)–(1.0.6) и тем самым $F|_{\Omega'} \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega')$.

Пусть компонента Ω' множества Ω такова, что либо $\Omega' \cap \Omega_1 = \varnothing$, либо $\Omega' \subset \Omega_1$. Тогда отображение $F' := F|_{\Omega'}$ удовлетворяет условию $\#F'(y) \equiv k$ для всех $y \in \Omega'$, где $k = N$ в первом случае и $k = 1$ во втором случае. Тогда согласно следствию 3.5 левое обратное отображение $f : F(\Omega') \to \Omega'$ является K^*-квазирегулярным с $K^* \le \omega(3)$.

Остается рассмотреть случай, когда компонента Ω' множества Ω пересекается с каждым из множеств Ω_1 и $\Omega \setminus \Omega_1$. В этом случае $F(\Omega')$ является компонентой множества $F(\Omega)$. Действительно, имеется точка $y_0 \in \Omega' \cap \Omega_1$, для которой $F(y_0) = \{x_0\}$. Выше было показано, что f переводит любую компоненту множества $F(\Omega')$ в Ω'. Следовательно, $f^{-1}(y_0) \cap D' \ne \varnothing$ для каждой компоненты D' множества $F(\Omega')$, так что $x_0 \in D'$. Значит, существует только одна компонента D' у множества $F(\Omega')$ и $F(\Omega') = D'$.

Из всего этого следует, что теорему 4.1 достаточно доказать при дополнительном условии: Ω и $D = F(\Omega)$ суть области в $\mathbb{R}^n$ и при этом $\Omega \ne \Omega_1 \ne \varnothing$.

Из непрерывности F и утверждения [6, 2.0.2(iii)] следует, что множество $\Omega \setminus \Omega_1 = \{y \in \Omega : \#F(y) = N\}$ открытое. В силу утверждения 1.1 отображение $f : D = F(\Omega) \to \Omega$ непрерывно, так что множество $F(\Omega \setminus \Omega_1) = f^{-1}(\Omega \setminus \Omega_1)$ открыто. Значит, можно применить следствие 3.5 к ограничению $F|_{\Omega \setminus \Omega_1}$ и получить K^*-квазирегулярность отображения $f|_{F(\Omega \setminus \Omega_1)} \to \Omega \setminus \Omega_1$ с $K^* \le \omega(3)$ и, кроме того, отсутствие в множестве $F(\Omega \setminus \Omega_1)$ точек ветвления отображения f. Таким образом, $B_f \subset F(\Omega_1)$.

Рассмотрим точку ветвления $x_0 \in B_f$ и ее образ $y_0 := f(x_0) \in \Omega_1$. Пусть $\delta^*(y_0)$ — величина, определенная в утверждении 2.2.

Допустим, существует такое $r_0 \in (0, \delta^*(y_0))$, что $\partial B(y_0, r_0) \cap \Omega_1 = \varnothing$. Так как множество Ω_1 замкнутое, существует $r_0' \in (0, r_0)$, для которого

$$(B(y_0, r_0) \setminus \overline{B}(y_0, r_0')) \cap \Omega_1 = \varnothing. \tag{4.1.1}$$

В силу (2.1.6) открытое множество $G := U(x_0, f, r_0) \setminus \overline{U}(x_0, f, r_0')$ является кольцевой областью и $f(G) = B(y_0, r_0) \setminus \overline{B}(y_0, r_0')$. Из (4.1.1) и равенства $B_f = F(\Omega_1)$ вытекает, что область G не содержит точек ветвления отображения f. Это означает, что $f|_G$ локально гомеоморфно в G. Так как $n \geq 3$, область $f(G)$ односвязная. Тогда из [9, лемма 2.2] следует, что $f|_G$ — гомеоморфизм. Но $F(f(G)) = G$, и это противоречит тому, что $N > 1$.

Таким образом, для любого $r \in (0, \delta^*(y_0))$ существует точка $y(r) \in \Omega_1 \cap \partial B(y_0, r)$.

Выберем точку $w_0 \in \Omega_1 \cap B(y_0, \delta^*(y_0))$, для которой $0 < r_0 = |w_0 - y_0| < \delta^*(y_0)$. Для произвольно малого $0 < \delta < r_0$ существует точка $y_\delta \in \Omega_1$ с $|y_\delta - y_0| = \delta$. Тогда $F(w_0) = \{z_0\}$, где $z_0 \in \partial U(x_0, f, r_0)$, $F(y_\delta) = \{x_\delta\}$, где $x_\delta \in \partial U(x_0, f, \delta)$, и $F(y_0) = \{x_0\}$.

Пусть точки $x_{\max}(\delta)$ и $x_{\min}(\delta)$ выбраны в $\partial U(x_0, f, \delta)$ такими, что

$$|x_{\max}(\delta) - x_0| = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, \delta)\},$$

$$|x_{\min}(\delta) - x_0| = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, \delta)\}$$

и

$$y_{\max}(\delta) := f(x_{\max}(\delta)) \in \partial B(y_0, \delta), \quad y_{\min}(\delta) := f(x_{\min}(\delta)) \in \partial B(y_0, \delta).$$

В силу (2.1.5) существует такое $\delta_0 \in (0, r_0/2)$, что

$$|x_{\max}(\delta) - x_0| < |z_0 - x_0|/2$$

при $\delta < \delta_0$. Далее будем считать, что $\delta < \delta_0$. Для получения верхней оценки величины $|x_{\max}(\delta) - x_0|/|x_\delta - x_0|$ при $\delta \to 0$ рассмотрим тетраду

$$\Psi_\delta = (y_{\max}(\delta), w_0; y_0, y_\delta)$$

и ее образ

$$F(\Psi_\delta) = (F(y_{\max}(\delta)), \{z_0\}; \{x_0\}, \{x_\delta\}).$$

С учетом неравенства $\delta < r_0/2 = |w_0 - y_0|/2$ получаем оценки

$$\beta(\Psi_\delta) = \frac{|y_{\max}(\delta) - y_0| \cdot |w_0 - y_\delta| + |y_{\max}(\delta) - y_\delta| \cdot |w_0 - y_0|}{|y_{\max}(\delta) - w_0| \cdot |y_\delta - y_0|}$$
$$\leq \frac{\delta |w_0 - y_\delta| + 2\delta |w_0 - y_0|}{|y_{\max}(\delta) - w_0| \cdot \delta} \leq \frac{(r_0 + \delta) + 2r_0}{r_0 - \delta} \leq \frac{3r_0 + r_0/2}{r_0/2} = 7.$$

Так как $x_{\max}(\delta) \in F(y_{\max}(\delta))$, то

$$\beta(F(\Psi_\delta)) \geq \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0| \cdot |z_0 - x_\delta| + |x_{\max}(\delta) - x_\delta| \cdot |z_0 - x_0|}{|x_{\max}(\delta) - z_0| \cdot |x_\delta - x_0|}$$
$$\geq \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0| \cdot (|z_0 - x_0| - |x_\delta - x_0|)}{|x_\delta - x_0| \cdot (|z_0 - x_0| + |x_{\max}(\delta) - x_0|)}$$
$$\geq \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0|}{|x_\delta - x_0|} \cdot \frac{|z_0 - x_0|/2}{|z_0 - x_0| + |z_0 - x_0|/2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0|}{|x_\delta - x_0|}.$$

Свойство ω-BAD дает верхнюю оценку

$$\frac{|x_{\max}(\delta)-x_0|}{|x_\delta - x_0|} \le 3\beta(F(\Psi_\delta)) \le 3\omega(\beta(\Psi_\delta)) \le 3\omega(7). \tag{4.1.2}$$

Теперь рассмотрим тетраду $\Psi'_\delta = (y_{\min}(\delta), y_0; y_\delta, w_0)$ и ее образ

$$F(\Psi'_\delta) = (F(y_{\min}(\delta)), \{x_0\}; \{x_\delta\}, \{z_0\}).$$

С одной стороны, имеем оценку

$$\beta(\Psi'_\delta) = \frac{|y_{\min}(\delta)-y_\delta|\cdot|y_0-w_0| + |y_{\min}(\delta)-w_0|\cdot|y_0-y_\delta|}{|y_{\min}(\delta)-y_0|\cdot|y_\delta-w_0|} \le \frac{2\delta\cdot r_0 + (r_0+\delta)\cdot\delta}{\delta\cdot(r_0-\delta)} \le \frac{3r_0 + r_0/2}{r_0/2} = 7.$$

С другой стороны,

$$\beta(F(\Psi'_\delta)) \ge \frac{|x_{\min}(\delta)-x_\delta|\cdot|x_0-z_0| + |x_{\min}(\delta)-z_0|\cdot|x_0-x_\delta|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|\cdot|z_0-x_\delta|} \ge \frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}\cdot\frac{|z_0-x_0|-|x_{\min}(\delta)-x_0|}{|z_0-x_0|+|x_\delta-x_0|} \ge \frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}\cdot\frac{|z_0-x_0|/2}{|z_0-x_0|+|z_0-x_0|/2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}.$$

Свойство ω-BAD дает оценку

$$\frac{|x_\delta - x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|} \le 3\beta(F(\Psi'_\delta)) \le 3\omega(\beta(\Psi'_\delta)) \le 3\omega(7). \tag{4.1.3}$$

Из (4.1.2) и (4.1.3) следует, что для всех достаточно малых δ справедливо неравенство

$$\frac{|x_{\max}(\delta)-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|} = \frac{|x_{\max}(\delta)-x_0|}{|x_\delta-x_0|}\cdot\frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|} \le 9(\omega(7))^2.$$

Это означает, что $H^*(x_0, f) \le 9(\omega(7))^2$ в каждой точке ветвления $x_0 \in F(\Omega_1)$ и, следовательно, отображение $f : D \to \Omega$ является K^*-квазирегулярным с $K^* \le \omega(3)$.

Теорема 4.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеев В. В.* Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 241–256.
2. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. d'Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
3. *Асеев В. В., Сычёв А. В., Тетенов А. В.* Мёбиус-инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеевых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.
4. *Асеев В. В.* Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах. II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 976–987.
5. *Асеев В. В.* Многозначные отображения со свойством квазимёбиусовости // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 953–972.
6. *Асеев В. В.* Многозначные квазимёбиусовы отображения на римановой сфере // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 450–464.
7. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1969. V. 448. P. 1–40.

8. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1970. V. 465. P. 1–13.
9. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1971. V. 488. P. 1–31.
10. *Асеев В. В.* Графические пределы квазимероморфных отображений и искажение характеристики тетрад // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1131.
11. *Куратовский К.* Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1966, 1969.

Поступила в редакцию 6 февраля 2024 г.
После доработки 6 февраля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru