Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.543

О π–МОЩНОСТИ НИСХОДЯЩИХ HNN–РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее HNN–расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ. Свойство группы G «быть мощной» не наследуется группой G^* даже в простейшем случае, когда G — бесконечная циклическая группа. Доказано, что если G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения (полициклическая группа), то индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен и группа G^* является π-мощной (почти π-мощной), где π — множество всех простых чисел, больших m. Доказаны также некоторые обобщения этого утверждения. Некоторые полученные в работе результаты о мощности нисходящих HNN-расширений являются аналогами хорошо известных теорем о финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.501

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, нисходящее HNN-расширение, полициклическая группа, нильпотентная группа, разрешимая группа.

1. Введение

Свойство мощности групп и его модификации в последнее время активно изучаются для групп из некоторых классов, а также для теоретико-групповых конструкций (см., например, [1–4]).

Напомним, что элемент x группы G называется *мощным*, если либо порядок элемента x бесконечен и для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n, либо порядок элемента x конечен и для любого целого положительного n, делящего порядок x, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

Для элемента бесконечного порядка свойство «быть мощным» (без соответствующего термина) возникло в работе Стиба [5].

Очевидно, что элемент x группы G является мощным тогда и только тогда, когда для каждого целого положительного числа n, делящего порядок элемента x, в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, по модулю которой элемент x имеет порядок n (делителем бесконечности здесь и всюду далее считается любое целое положительное число).

Группа G называется *мощной*, если все ее элементы являются мощными.

Исследование выполнено за счет гранта Ивановского государственного университета № 2024–04.

Свойство группы «быть мощной» связано с такими аппроксимационными свойствами, как финитная аппроксимируемость и аппроксимируемость конечными p-группами. Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой* (*аппроксимируемой конечными p-группами*), если для любого ее неединичного элемента x существует гомоморфизм группы G на конечную группу (на конечную p-группу), переводящий x в элемент, отличный от 1. Очевидно, что любая мощная группа финитно аппроксимируема. Очевидно также, что любая группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p, является мощной.

Здесь исследуется вопрос о том, в какой мере свойство группы G «быть мощной» наследуется нисходящими HNN-расширениями группы G. Другие аппроксимационные свойства нисходящих HNN-расширений (в том числе финитная аппроксимируемость и аппроксимируемость конечными p-группами) исследовались ранее в работах [6–11].

Напомним определение нисходящего HNN-расширения (см., например, [12]). Пусть G — группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$ и определяемая множеством соотношений R, и пусть φ — изоморфизм группы G на некоторую ее подгруппу K. Тогда группа

$$G^* = (a_1, a_2, \dots, t; R, t^{-1}a_1t = a_1\varphi, t^{-1}a_2t = a_2\varphi, \dots)$$

называется *нисходящим* HNN-*расширением группы G, соответствующим изоморфизму φ*.

Простейшими примерами нисходящих HNN-расширений являются разрешимые группы Баумслага — Солитэра, т. е. группы

$$G(m) = (a, b; b^{-1}ab = a^m),$$

где m — ненулевое целое число. Группа $G(m)$ представляет собой нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы (a). Очевидно, что группа $G(m)$ наследует от группы (a) свойство мощности, если $|m| = 1$. Если же $|m| \neq 1$, то группа $G(m)$ содержит подгруппу, изоморфную группе m-ичных дробей, и поэтому $G(m)$ уже не наследует от группы (a) свойство мощности. Тем не менее группа $G(m)$ наследует свойство мощности в следующем «ослабленном» виде [3, теорема 1].

Группа $G(m)$ является π-*мощной*, где π — множество всех простых чисел, взаимно простых с m.

Понятие π-мощности вводится следующим образом. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Элемент x группы G будем называть π-*мощным*, если для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента x, в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, по модулю которой элемент x имеет порядок n.

Элемент x группы G будем называть *вполне π-мощным*, если для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента x, в группе G существует вполне характеристическая подгруппа N конечного π-индекса, по модулю которой элемент x имеет порядок n.

В этих определениях делителем бесконечности считается любое целое положительное число.

Группа называется π-*мощной* (*вполне π-мощной*), если все ее элементы являются π-мощными (вполне π-мощными).

Сформулированное выше утверждение о π-мощности группы $G(m)$ здесь обобщаем следующим образом.

Теорема 1. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее* HNN-*расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ, и пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.*

Если G — вполне π-мощная группа, где π — некоторое множество простых чисел, не делящих m, то G^* — π-мощная группа.

Ниже доказано, что любая группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого p из некоторого множества π простых чисел, является вполне π-мощной. Поэтому частным случаем теоремы 1 является следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее* HNN-*расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ, и пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.*

Если G — группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p из некоторого множества π простых чисел, не делящих m, то G^* — π-мощная группа.

В связи с формулировкой теоремы 2 заметим, что накладываемому в ней условию конечности общего ранга удовлетворяют все конечно порожденные группы, а также и многие другие группы, в том числе группы, имеющие конечный ранг Прюфера. Напомним, что группа G *имеет конечный общий ранг*, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

В теоремах 1 и 2 предполагается, что индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен. Хорошо известно и легко проверяется, что это условие (независимо от выбора изоморфизма φ группы G на ее подгруппу K) выполняется, если базовая группа G полициклическая, и, в частности, оно выполняется, если G — конечно порожденная нильпотентная группа.

Так как любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируема конечными p-группами для любого простого числа p [13], то частным случаем теоремы 2 является следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее* HNN-*расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ.*

Если G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, то индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен и группа G^* является π-мощной, где π — множество всех простых чисел, не делящих m.

Эта теорема усиливает результат Д. И. Молдаванского о финитной аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения свободной нильпотентной группы конечного ранга [6]. В дальнейшем этот результат многократно обобщался в различных направлениях [7–10]. Так, например, в работе Су и Вайза [7] доказано следующее утверждение: *нисходящее* HNN-*расширение полициклической группы финитно аппроксимируемо.*

В отличие от конечно порожденных нильпотентных групп полициклические группы (и даже полициклические группы без кручения) не обладают свойством мощности, но, тем не менее, они обладают этим свойством почти, т. е. содержат мощные подгруппы конечных индексов (см., например, [3]). При переходе от полициклической группы к ее нисходящему HNN-расширению свойство почти мощности наследуется в следующем более слабом виде.

Теорема 4. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ.*

Если G — полициклическая группа, то индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен и группа G^* содержит подгруппу без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G^*, где π — множество всех простых чисел, больших m.

Этот результат усиливает упомянутую выше теорему Су и Вайза.

Полициклические группы и их нисходящие HNN-расширения являются примерами конструктивных разрешимых групп. Класс конструктивных разрешимых групп представляет собой наименьший класс разрешимых групп, замкнутый относительно расширений с помощью конечных групп и нисходящих HNN-расширений [14, п. 11.2.3].

Одним из обобщений теоремы, доказанной Су и Вайзом, является следующий результат [14, п. 11.2.4]: *любая конструктивная разрешимая группа финитно аппроксимируема.*

Этот результат (так же, как и теорема Су и Вайза) может быть дополнен следующим образом.

Теорема 5. *Любая конструктивная разрешимая группа G содержит подгруппу без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G, где π — некоторое множество, состоящее из почти всех простых чисел.*

Далее приведены доказательства сформулированных выше теорем.

Доказательство теоремы 1 приведено в разд. 2 и основано на методике исследования финитной аппроксимируемости HNN-расширений, разработанной Д. И. Молдаванским [6].

Доказательство теоремы 2 приведено в разд. 3 и сводится к обоснованию того факта, что теорема 2 является частным случаем теоремы 1.

Тот факт, что теорема 3 является частным случаем теоремы 2, обоснован выше.

Доказательство теоремы 5 приведено в разд. 4 и основано на некоторых результатах, относящихся к теории разрешимых групп конечного ранга.

Заметим, что теорема 4 не является следствием теоремы 5, так как она содержит конкретное описание множества π, для которого нисходящее HNN-расширение полициклической группы является почти π-мощной группой. Доказательство теоремы 4 приведено в разд. 5, и оно (так же, как и доказательство теоремы 5) основано на некоторых результатах из теории разрешимых групп конечного ранга.

2. Доказательство теоремы 1

Здесь используется методика изучения аппроксимационных свойств нисходящих HNN-расширений, разработанная Д. И. Молдаванским [6].

Пусть G — группа, H и K — некоторые изоморфные подгруппы группы G, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Пусть

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi)$$

— HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ. Это означает, что группа G^* в системе порождающих, состоящей из порождающих группы G и проходной буквы t, определяется всеми определяющими соотношениями группы G и соотношениями вида $t^{-1}ht = h\varphi$, где $h \in H$.

Следуя Д. И. Молдаванскому [6], подгруппу N группы G будем называть (H, K, φ)-*совместимой*, если $(N \cap H)\varphi = N \cap K$.

Если N — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение φ_N, определенное по правилу $(hN)\varphi_N = h\varphi N$, где $h \in H$, является изоморфизмом между подгруппами HN/N и KN/N фактор-группы G/N. Пусть

$$G^*_N = (G/N, t; t^{-1}HN/Nt = KN/N, \varphi_N)$$

— HNN-расширение группы G/N с подгруппами HN/N и KN/N, связанными относительно изоморфизма φ_N. Обозначим через ρ_N гомоморфизм группы G^* на группу G^*_N, действующий тождественно на t и продолжающий естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/N.

Предположим теперь, что $H = G$, т. е. что G^* — нисходящее HNN-расширение группы G. В этом случае (G, K, φ)-совместимость подгруппы N группы G означает, что $N\varphi = N \cap K$. Если N — нормальная (G, K, φ)-совместимая подгруппа группы G, то φ_N — изоморфизм группы G/N на ее подгруппу KN/N и

$$G^*_N = (G/N, t; t^{-1}G/Nt = KN/N, \varphi_N)$$

— нисходящее HNN-расширение группы G/N. Если к тому же N имеет конечный индекс в G, то φ_N — автоморфизм группы G/N, и в этом случае группа G^*_N представляет собой расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью бесконечной циклической группы.

Лемма 1. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K. Пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.*

Если N — вполне характеристическая подгруппа конечного индекса группы G и индекс $[G : N]$ взаимно прост с m, то подгруппа N является (G, K, φ)-совместимой, т. е. $N\varphi = N \cap K$.

Доказательство. Так как подгруппа N вполне характеристическая, то $N\varphi \subseteq N$. Очевидно также, что $N\varphi \subseteq K$. Таким образом, $N\varphi \subseteq N \cap K$. Поэтому для доказательства равенства $N\varphi = N \cap K$ остается проверить, что индексы $[G : N \cap K]$ и $[G : N\varphi]$ конечны и совпадают между собой.

Так как φ — изоморфизм группы G на подгруппу K, то $[G : N] = [K : N\varphi]$. Отсюда и из того, что $N\varphi \subseteq K \subseteq G$, получаем:

$$[G : N\varphi] = [G : K][K : N\varphi] = [G : K][G : N] = [G : N \cap K].$$

Последнее равенство в этой цепочке имеет место в силу взаимной простоты индексов $[G : N]$ и $[G : K]$. Таким образом, индексы $[G : N \cap K]$ и $[G : N\varphi]$ конечны и совпадают между собой. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.

Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ. Пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.

Предположим, что G — вполне π-мощная группа, где π — некоторое множество простых чисел, не делящих m. Покажем, что G^* — π-мощная группа.

Заметим прежде всего, что произвольный элемент группы G^* может быть записан в виде $t^r a t^{-s}$, где $a \in G$. Поэтому произвольный элемент из G^* сопряжен с элементом $t^k a$, где $a \in G$, и для доказательства π-мощности группы G^* достаточно проверить π-мощность только для элементов вида $t^k a$, где $a \in G$.

Если $k \neq 0$, то π-мощность элемента $t^k a$ очевидна. В самом деле, рассмотрим гомоморфизм группы G^* на бесконечную циклическую группу (t), действующий тождественно на t и переводящий все элементы из G в 1. Образ t^k элемента $t^k a$ относительно этого гомоморфизма является π-мощным элементом бесконечной циклической группы (t). Поэтому $t^k a$ — π-мощный элемент группы G^*.

Остается доказать π-мощность в G^* элемента $t^k a$ при $k = 0$, т. е. π-мощность в G^* произвольного элемента a из базовой подгруппы G. Так как G — вполне π-мощная группа, элемент a вполне π-мощный в G, т. е. для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента a, в группе G существует вполне характеристическая подгруппа N конечного π-индекса, по модулю которой элемент a имеет порядок n. Так как простые числа из π не делят m, индекс $[G : N]$ взаимно прост с m. Таким образом, подгруппа N удовлетворяет условиям леммы 1, в силу которой подгруппа N является (G, K, φ)-совместимой. Поэтому можно рассмотреть изоморфизм φ_{N} группы G/N на ее подгруппу KN/N и соответствующее нисходящее HNN-расширение $G_{N}^{*} = (G/N, t; t^{-1}G/Nt = KN/N, \varphi_{N})$ группы G/N, а также введенный выше гомоморфизм ρ_{N} группы G^* на группу G_{N}^{*}, действующий тождественно на t и продолжающий естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/N. Как отмечалось выше, группа G_{N}^{*} представляет собой расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому группа G_{N}^{*} финитно аппроксимируема. По построению подгруппы N порядок элемента $aN = a\rho_{N}$ группы G_{N}^{*} равен n. Отсюда и из финитной аппроксимируемости группы G_{N}^{*} следует, что существует гомоморфизм ρ группы G_{N}^{*} на конечную группу такой, что порядок элемента $a\rho_{N}\rho$ равен n. Тем самым доказана π-мощность в G^* произвольного элемента a из базовой подгруппы G.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть K — конечная группа, $\operatorname{Var} K$ — многообразие групп, задаваемое всеми тождествами группы K. Хорошо известно, что все конечно порожденные группы из многообразия $\operatorname{Var} K$ конечны (см., например, [15, гл. 5, п. 2, упражнение д8]). В [10, лемма 1] это утверждение обобщено следующим образом: любая группа конечного общего ранга из многообразия $\operatorname{Var} K$ конечна. Отсюда легко выводится следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть G — группа конечного общего ранга, и пусть M — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G, где π — некоторое множество простых чисел. Тогда в группе G существует вполне характеристическая (и даже вербальная) подгруппа V конечного π-индекса такая, что $V \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть

$$(f_i(x_1, x_2, \dots) = 1)_{i \in I}$$

— система всех тождеств группы G/M. Обозначим через V вербальную подгруппу группы G, порожденную всеми ее элементами $f_i(h_1, h_2, \dots)$, где $i \in I, h_1 \in G, h_2 \in G, \dots$. Тогда $V \subseteq M$ и $G/V \in \operatorname{Var} G/M$. Отсюда и из того, что группа G/V имеет конечный общий ранг, а группа G/M конечна, в силу отмеченного выше результата [10, лемма 1] следует конечность группы G/V. Так как G/M — конечная π-группа, в ней выполняется тождество $x^m = 1$, где

m — π-число. А поскольку $G/V \in \operatorname{Var} G/M$, то и в группе G/V выполняется тождество $x^m = 1$. Поэтому G/V — конечная π-группа. Лемма доказана.

Пусть G — произвольная группа, n — целое неотрицательное число. Через G^n далее будем обозначать степенную подгруппу, т. е. подгруппу группы G, порожденную n-ми степенями всех ее элементов. Очевидно, что G^n — вполне характеристическая подгруппа группы G, и фактор-группа G/G^n является периодической группой с тождеством $x^n = 1$. Очевидно также, что если P — неединичная конечная p-группа, то $P^p \neq P$, и поэтому ряд $P = P_1 > P_2 > \dots$, где $P_{i+1} = {P_i}^p$ для каждого $i = 1, 2, \dots$, строго убывает и стабилизируется на единичной подгруппе группы P.

Лемма 3. *Любая конечная p-группа является вполне p-мощной. Иными словами, для каждого элемента a конечной p-группы P и для каждого делителя p^k порядка элемента a в группе P существует вполне характеристическая подгруппа Q такая, что порядок элемента a по модулю подгруппы Q равен p^k.*

Доказательство. Рассмотрим в группе P вполне характеристический ряд $P = P_1 > P_2 > \dots > P_r = 1$, где $P_{i+1} = {P_i}^p$ для каждого $i = 1, 2, \dots, r-1$. Так как элемент $a^{p^{k-1}}$ отличен от 1, то найдется индекс j такой, что элемент $a^{p^{k-1}}$ принадлежит P_j, но не принадлежит P_{j+1}. Очевидно, что порядок элемента a по модулю вполне характеристической подгруппы $Q = P_{j+1}$ равен p^k. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами. Тогда G — вполне p-мощная группа. Иными словами, для каждого элемента a группы G и для каждого делителя p^k порядка элемента a в группе G существует вполне характеристическая подгруппа конечного p-индекса, по модулю которой порядок элемента a равен p^k.*

Доказательство. Пусть a — неединичный элемент группы G, и пусть p^k — делитель порядка элемента a. Тогда элемент $a^{p^{k-1}}$ отличен от 1. Отсюда и из того, что G аппроксимируема конечными p-группами, следует, что в группе G существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса, не содержащая элемент $a^{p^{k-1}}$. По лемме 2 в группе G существует вполне характеристическая подгруппа V конечного p-индекса такая, что $V \subseteq M$. Так как $a^{p^{k-1}}$ не принадлежит V, то p^k делит порядок элемента aV конечной p-группы G/V. По лемме 3 в группе G/V существует вполне характеристическая подгруппа Q/V, по модулю которой порядок элемента aV равен p^k. Очевидно, что Q — вполне характеристическая подгруппа конечного p-индекса группы G и порядок элемента a по модулю подгруппы Q равен p^k. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого p и некоторого множества π простых чисел. Тогда G — вполне π-мощная группа.*

Доказательство. Если множество π состоит из одного простого числа p, то утверждение леммы 5 совпадает с леммой 4. Поэтому далее будем считать, что множество π содержит более одного простого числа. Тогда группа G аппроксимируема конечными p-группами по крайней мере для двух значений числа p. Поэтому произвольный неединичный элемент a группы G имеет бесконечный порядок. Пусть n — целое положительное π-число, $n = {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} \dots {p_r}^{k_r}$ — разложение числа n на простые множители. По условию леммы для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ группа G аппроксимируема конечными p_i-группами. Поэтому в силу леммы 4 для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ в группе G существует вполне характеристическая подгруппа N_i конечного p_i-индекса, по модулю которой элемент a имеет порядок ${p_i}^{k_i}$. Тогда подгруппа $N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_r$ вполне характеристична в G, имеет конечный π-индекс и порядок элемента a по модулю подгруппы N равен n. Лемма доказана.

Теорема 2 является частным случаем теоремы 1 в силу леммы 5.

4. Доказательство теоремы 5

Здесь используются некоторые результаты, относящиеся к теории разрешимых групп конечного ранга.

Группы конечного ранга составляют подкласс в классе всех групп конечного общего ранга. Напомним, что группа G имеет *конечный ранг* (или, в другой терминологии, *конечный ранг Прюфера*), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Фундаментальный результат Робинсона утверждает, что разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована, т. е. не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел [14, следствие 5.3.2]. Другие аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга исследуются в [16] (см. также [17]).

Важным подклассом в классе всех разрешимых групп конечного ранга является класс всех разрешимых минимаксных групп. Напомним, что группа G называется *минимаксной*, если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности для подгрупп или условию максимальности для подгрупп. Примерами разрешимых минимаксных групп являются разрешимые группы с условием минимальности для подгрупп, которые называются также *черниковскими группами* и представляют собой конечные расширения прямых произведений конечного числа квазициклических групп. Другим важным примером разрешимых минимаксных групп являются полициклические группы. Напомним, что полициклические группы могут быть охарактеризованы как разрешимые группы с условием максимальности для подгрупп. Класс всех конструктивных разрешимых групп занимает промежуточное положение между классом всех полициклических групп и классом всех разрешимых минимаксных групп.

С учетом сказанного выше очевидно, что любая разрешимая минимаксная группа G является поли (циклической, квазициклической), т. е. обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической группой, либо квазициклической группой. Рассмотрим множество всех простых чисел p, для которых квазициклическая группа типа p^∞ присутствует среди факторов указанного выше рада. Это множество является конечным, не зависит от выбора ряда и называется *спектром* группы G. Полициклические группы — это в точности разрешимые минимаксные группы с пустым спектром.

Классический результата Баумслага (см., например, [14, п. 11.2.4]) утверждает, что любая конструктивная разрешимая группа является редуцированной разрешимой минимаксной группой. С учетом сформулированного выше результата Робинсона этот результат допускает следующую формулировку.

Предложение 1. *Пусть G — конструктивная разрешимая группа. Тогда G — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа.*

С другой стороны, в [3] доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G.*

Тогда группа G содержит подгруппу без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными в группе G, и, в частности, группа G является почти π-мощной.

Справедливость теоремы 5 непосредственно вытекает из предложений 1 и 2.

5. Доказательство теоремы 4

Справедливость теоремы 4 вытекает из предложения 2 и следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть G — полициклическая группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K,*

$$G^* = (G, t; t^{-1}Gt = K, \varphi)$$

— нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ.

Тогда индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен, группа G^* является финитно аппроксимируемой разрешимой минимаксной группой и спектр группы G^* содержится в множестве $\{1, 2, \dots, m\}$.

Доказательство. Очевидно, что индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен. Так как G^* — конструктивная разрешимая группа, по предложению 1 G^* — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа.

Пусть F — нормальное замыкание подгруппы G в группе G^*. Так как фактор-группа группы G^* по подгруппе F является бесконечной циклической группой, спектр группы G^* совпадает со спектром подгруппы F.

Для каждого целого неотрицательного числа i введем следующее обозначение: $G_i = t^iGt^{-i}$. Подгруппы G_i обладают следующими очевидными свойствами: G_0 — полициклическая группа, $G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots$, $G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots = F$ и $[G_{i+1} : G_i] = m$ для любого целого неотрицательного числа i.

Пусть X — подгруппа группы F, Y — нормальная подгруппа группы X, $P = X/Y$ — фактор-группа группы X по подгруппе Y. Для каждого целого неотрицательного числа i обозначим через P_i образ подгруппы $G_i \cap X$ относительно естественного гомоморфизма группы X на фактор-группу $P = X/Y$.

Из перечисленных выше свойств подгрупп G_i следует, что подгруппы P_i обладают следующими свойствами: P_0 — полициклическая группа, $P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \dots$, $P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots = P$ и $[P_{i+1} : P_i] \leq m$ для любого целого неотрицательного числа i.

Отсюда следует, что группа P не может быть квазициклической типа p^∞ ни для какого простого числа p, большего m. Поэтому спектр группы F, а значит, и совпадающий с ним спектр группы G^*, содержится в множестве $\{1, 2, \dots, m\}$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.

2. *Азаров Д. Н.* О слабой π-мощности некоторых групп и свободных произведений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1199–1211.

3. *Азаров Д. Н.* О почти мощности некоторых групп и свободных конструкций // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1023–1033.

4. *Азаров Д. Н.* О почти мощности групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1131.
5. *Stibe P.* Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Am. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 119–129.
6. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. С. 842–845.
7. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 182, N 1. P. 65–78.
8. *Rhemtulla A. H., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. Math. 2003. V. 47. P. 477–484.
9. *Borisov A., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // Invent. Math. 2005. V. 160. P. 341–356.
10. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 163–169.
11. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 1. С. 9–19.
12. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
13. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 3, N 7. P. 29–62.
14. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon Press, 2004.
15. *Каргаполов М. И, Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
16. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2014. № 8. С. 18–29.
17. *Wehrfritz B. A. F.* Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank // Boll. Unione Mat. Ital. 2016. doi:10.1007/s40574-015-0047-8.

Поступила в редакцию 15 марта 2024 г.
После доработки 15 марта 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru