Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.957

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение переноса, содержащее две нелинейности и коэффициент $q(\mathbf{x})$ при младшем нелинейном члене, зависящий от двух или трех пространственных переменных. Изучается прямая задача для этого уравнения с данными на части боковой поверхности цилиндрической области. Решение строится в явном виде. Доказывается единственность решения. Ставится задача нахождения коэффициента $q(\mathbf{x})$ по некоторой информации о решении прямой задачи. Показывается, что обратная задача редуцируется к задаче рентгеновской томографии. Это открывает путь ее эффективного численного решения.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.518

Ключевые слова: нелинейное уравнение переноса, обратная задача, томография, единственность.

1. Введение

Пусть

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\mathbf{x}| \le R\},\ n = 2, 3,\ R > 0, \quad S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\mathbf{x}| = R\},$$

$$\nu = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ n = 2; \quad \nu = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),\ n = 3,$$

где φ — некоторый фиксированный угол. Определим

$$S_-(\nu) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} \cdot \nu \le 0\}, \quad S_+(\nu) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} \cdot \nu > 0\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$u_t + u\,\nu \cdot \nabla u + q(\mathbf{x})u^m = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in B \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

в котором $q(\mathbf{x})$ — непрерывно дифференцируемая в области $\overline{B} = B \cup S$ функция, m — вещественное число. Присоединим к уравнению (1) условие

$$u|_{S_-(\nu)} = A, \quad (\mathbf{x}, t) \in S_-\ (\nu) \times [0, T]. \tag{2}$$

Здесь A и T — положительные постоянные.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

Прямая задача. *При заданных* $q(\mathbf{x})$, ν, m *и* A *найти функцию* $u(\mathbf{x},t)$ *как решение задачи* (1), (2) *в области* $\overline{B}\times\mathbb{R}$ *там, где это возможно.*

Наряду с этой задачей будет рассмотрена обратная задача, заключающаяся в построении функции $q(\mathbf{x})$ в области $\overline{B}$ по информации о решении прямой задачи для $\mathbf{x}\in S_+(\nu)$ и некоторого множества $\nu=\nu(\varphi)$. Более точная постановка задачи будет сформулирована в разд. 3.

Обратные задачи для нелинейных уравнений начали интенсивно изучаться в последнее время. В [1–5] были изучены задачи, в которых уравнения гиперболического типа рассматриваются на лоренцевом многообразии, а сами уравнения являются квазилинейными. При этом изучены задачи определения лоренцевой метрики либо коэффициентов при нелинейностях. В работе [5] рассмотрена задача для системы нелинейных уравнений теории упругости. В [6–11] изучены обратные задачи определения коэффициентов нелинейного волнового уравнения. В [12–15] исследованы задачи определения коэффициентов, входящих в волновое уравнение, содержащее одну или две нелинейности. Основой исследования этих задач являлось разложение решения прямой задачи в окрестности фронта волны. В статье [16] изучена одномерная обратная задача определения коэффициента, стоящего при нелинейности в системе уравнений электродинамики с нелинейным поглощением. Найдены условия, при выполнении которых имеет место теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи. Получена также глобальная оценка устойчивости решений задачи.

В настоящей работе изучается обратная задача определения коэффициента $q(\mathbf{x})$, входящего в уравнение (1). В разд. 2 дается анализ решения прямой задачи (1), (2), выписывается явный вид решения. На его основе формулируется и исследуется обратная задача. Решение задачи определения искомой функции $q(\mathbf{x})$ сводится к классической задаче рентгеновской томографии об определении функции через интегралы от нее вдоль всевозможных прямых линий, лежащих в плоскостях ортогональных оси x_3. Насколько известно автору, все результаты статьи новые.

2. Анализ решения прямой задачи

Для задачи (1), (2) имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция* $q(\mathbf{x})$ *непрерывно дифференцируема в области* $\overline{B}$ *и для нее выполнено условие*

$$2|2-m|R\|q\|_{C(\overline{B})}<A^{2-m}. \tag{3}$$

Тогда существует единственное непрерывно дифференцируемое положительное решение задачи (1), (2) *и это решение дается формулой*

$$u(\mathbf{x},t)=\begin{cases} A\exp\Bigl(-\int\limits_0^{\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)} q(\mathbf{x}+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\Bigr), & m=2,\\ \Bigl(A^{2-m}-(2-m)\int\limits_0^{\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)} q(\mathbf{x}^0+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\Bigr)^{1/(2-m)}, & m\neq 2,\end{cases} \tag{4}$$

$$(\mathbf{x},t)\in D=\bigcup_{t^0\in[0,T]}\Sigma(t_0),\ \Sigma(t_0)=\{(\mathbf{x},t)\mid \mathbf{x}\in\overline{B},t\in[t^0,t^0+\omega(\mathbf{x},\nu)]\},\ t^0\in[0,T],$$

в которой

$$s(\mathbf{x},\nu) = (\mathbf{x}\cdot\nu) + \sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}, \tag{5}$$

функция $\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)$ *является обратной по первому аргументу к функции* $\psi(s,\mathbf{x},\nu)$, *определяемой формулой*

$$\psi(s,\mathbf{x},\nu) = \begin{cases} \frac{1}{A}\int\limits_0^s \exp\left(\int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\right)ds'', & m=2,\\ \int\limits_0^s\left(A^{2-m}-(2-m)\int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}^0+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\right)^{1/(m-2)} ds'', & m\neq 2, \end{cases} \tag{6}$$

$\mathbf{x}\in\overline{B},\ s\in[0,2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2+R^2-|\mathbf{x}|^2}]$. $\omega(\mathbf{x},\nu)=\psi(2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2+R^2-|\mathbf{x}|^2},\mathbf{x},\nu)$.

Доказательство. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = u(\mathbf{x},t)\nu, \quad \frac{du}{dt} = -q(\mathbf{x})u^m(\mathbf{x},t) \tag{7}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}|_{t=t^0} = \mathbf{x}^0\in S_-(\nu), \quad u|_{t=t^0}=A, \quad t^0\in[0,T]. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) определяют интегральные линии уравнения (1), выходящие из точек $(\mathbf{x}^0,t^0)\in S_-(\nu)\times[0,T]$, и значения функции $u(\mathbf{x},t)$ вдоль этих линий. Проекции интегральных линий на пространство $\mathbb{R}^n$ представляют собой отрезки прямых линий

$$L(\mathbf{x}^0,\nu) = \{\mathbf{x}^0+s\nu,\ s=[0,-2(\mathbf{x}^0\cdot\nu)]\},$$

содержащиеся в $\overline{B}$, выходящие из точек $\mathbf{x}^0\in S_-(\nu)$ в направлении ν. Вдоль $L(\mathbf{x}^0,\nu)$ параметр s является функцией t. В связи с этим уравнения (7) вдоль $L(\mathbf{x}^0,\nu)$ можно записать в виде

$$\frac{ds}{dt} = u(\mathbf{x}^0+s(t)\nu,t)\nu, \quad \frac{du}{dt} = -q(\mathbf{x}^0+s(t)\nu)u^m(\mathbf{x}^0+s(t)\nu,t). \tag{9}$$

К уравнениям (9) надо добавить начальные условия

$$s|_{t=t^0}=0, \quad u|_{t=t^0}=A, \quad t^0\in[0,T]. \tag{10}$$

Чтобы проинтегрировать систему уравнений (9), (10) удобно рассматривать t как функцию s, т. е. $t=t(s)$, временно опуская зависимость этой функции от $\mathbf{x}^0$, t^0 и ν. Тогда уравнения (9) приводят к уравнениям

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{u(\mathbf{x}^0+s\nu,t(s))}, \quad \frac{du}{ds} = -q(\mathbf{x}^0+s\nu)u^{m-1}(\mathbf{x}^0+s\nu,t(s)). \tag{11}$$

Условия (10) можно записать в виде

$$t|_{s=0}=t^0, \quad u|_{s=0}=A. \tag{12}$$

Если $m=2$, то из второго уравнения (11) и начальных данных (12) следует формула для отыскания функции $u(x,t)$ вдоль $L(\mathbf{x}^0,\nu)$:

$$u(\mathbf{x}^0+s\nu,t(s)) = A\exp\left(-\int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0+s'\nu)\,ds'\right), \quad s\in[0,-2(\mathbf{x}^0\cdot\nu)]. \tag{13}$$

Тогда

$$t(s) = t(s, \mathbf{x}^0, t^0, \nu) = t^0 + \frac{1}{A}\int\limits_0^s \exp\left(\int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\,ds'\right) ds'', \quad s \in [0, -2(\mathbf{x}^0 \cdot \nu)]. \tag{14}$$

Если $m \neq 2$, то уравнение для $u(\mathbf{x}^0 + s\nu, t(s))$ запишем в виде

$$\frac{du}{u^{m-1}} = -q(\mathbf{x}^0 + s\nu).$$

Интегрируя его с учетом начальных данных, получаем уравнение

$$u^{2-m}(\mathbf{x}^0 + s\nu, t(s)) - A^{2-m} = -(2-m)\int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\,ds',$$

из которого находим, что

$$u(\mathbf{x}^0 + s\nu, t(s)) = \left(A^{2-m} - (2-m)\int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\,ds'\right)^{1/(2-m)}, \quad s \in [0, -2(\mathbf{x}^0 \cdot \nu)]. \tag{15}$$

Уравнение для отыскания функции $t(s)$ тогда принимает вид

$$\frac{dt}{ds} = \left(A^{2-m} - (2-m)\int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\,ds'\right)^{1/(m-2)}.$$

Интегрируя его, приходим к формуле

$$t(s) = t(s, \mathbf{x}^0, t^0, \nu) = t^0 + \int\limits_0^s \left(A^{2-m} - (2-m)\int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\,ds'\right)^{1/(m-2)} ds'', \tag{16}$$

$s \in [0, -2(\mathbf{x}^0 \cdot \nu)]$. Заметим, что при выполнении условия (3) формулы (15) и (16) корректны, так как

$$A^{2-m} - (2-m)\int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\,ds' \geq A^{2-m} - |2-m|s\|q\|_{C(\overline{B})}$$
$$\geq A^{2-m} - 2|2-m|R\|q\|_{C(\overline{B})} > 0.$$

Формулы (13)–(16) определяют параметрическое задание функции $u(\mathbf{x}, t)$. Чтобы представить ее в виде (4)–(6) надо вначале выразить $\mathbf{x}^0$ через $\mathbf{x}$ и ν. Это делается с помощью формулы

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x} - s(\mathbf{x}, \nu)\nu. \tag{17}$$

В этой формуле $s(\mathbf{x}, \nu)$ определяется равенством (5). После этого надо подставить выражение для $\mathbf{x}^0$ из формулы (17) в равенства (13)–(16). В результате равенства (14), (16) запишутся в виде

$$t = t^0 + \psi(s, \mathbf{x}, \nu),$$

в котором функция $\psi(s,\mathbf{x},\nu)$ определена равенством (6). Эта функция монотонно растет с ростом s. При этом $s \in [0, 2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}]$, так как $-2(\mathbf{x}^0\cdot\nu) = 2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}$. В силу монотонности функции $\psi(s,\mathbf{x},\nu)$ по первому аргументу она имеет обратную $\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)$ по этому аргументу для $t \in [t^0, t^0 + \omega(\mathbf{x},\nu)]$, $\omega(\mathbf{x},\nu) = \psi(2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}, \mathbf{x},\nu)$. Подставляя в формулы (13), (15) вместо s функцию $\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)$, получаем формулу (4). Непрерывная дифференцируемость функции $u(\mathbf{x},t)$ в области

$$D = \bigcup_{t^0\in[0,T]} \Sigma(t_0), \quad \Sigma(t_0) = \{(\mathbf{x},t) \mid \mathbf{x}\in\overline{B},\ t\in[t^0, t^0+\omega(\mathbf{x},\nu)]\},$$

достаточно очевидна.

Докажем единственность решения задачи (1), (2). Допустим, что существуют два ее решения $u_1(\mathbf{x},t)$ и $u_2(\mathbf{x},t)$. Обозначим

$$\widetilde{u}(\mathbf{x},t) = u_1(\mathbf{x},t) - u_2(\mathbf{x},t).$$

Из уравнения (1) следует равенство

$$\widetilde{u}_t + u_1\nabla\widetilde{u}\cdot\nu + \widetilde{u}\,\nabla u_2\cdot\nu + q(\mathbf{x})\big(u_1^m - u_2^m\big) = 0. \tag{18}$$

Представим разность $u_1^m - u_2^m$ в виде

$$u_1^m - u_2^m = m\int\limits_{u_2}^{u_1} z^{m-1}\,dz = \widetilde{u}\,m\int\limits_0^1 [u_2(1-z') + u_1 z']^{m-1}\,dz' =: \widetilde{u}\rho(u_1,u_2).$$

Тогда равенство (18) можно переписать в виде

$$\widetilde{u}_t + u_1(\mathbf{x},t)\,\nabla\widetilde{u}\cdot\nu + \widetilde{u}\,\Phi(\mathbf{x},t) = 0, \tag{19}$$

в котором

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \nabla u_2(\mathbf{x},t)\cdot\nu + q(\mathbf{x})\,\rho(u_1(\mathbf{x},t), u_2(\mathbf{x},t)).$$

Граничное условие (2) приводит к однородному условию

$$\widetilde{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in S_-(\nu)\times[0,T]. \tag{20}$$

Рассмотрим интегральные кривые уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = u_1(\mathbf{x},t)\nu, \tag{21}$$

выходящие из точек $(\mathbf{x},t)\in S_-(\nu)\times[0,T]$. Вдоль этих кривых уравнение (19) записывается в виде линейного однородного уравнения

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \widetilde{u}\,\Phi(\mathbf{x},t). \tag{22}$$

Из уравнения (22) и нулевого начального условия (20) следует, что $\widetilde{u}(\mathbf{x},t) = 0$ вдоль любой интегральной линии уравнения (21), т. е. $u_1(\mathbf{x},t) = u_2(\mathbf{x},t)$. Совокупность интегральных линий образует область D, определенную выше. Отсюда следует единственность решения прямой задачи во всей области D. $\square$

3. Постановка обратной задачи и ее анализ

В этом разделе будем предполагать, что вектор ν может меняться в зависимости от угла φ, который пробегает промежуток $[0,\pi)$. Таким образом, $\nu=\nu(\varphi)$. Как и в разд. 1, примем, что $\nu=\nu(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, если $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$, и $\nu=\nu(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$, если $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$. Рассмотрим формулу (4). Положим в ней $t^0=0$ и $\mathbf{x}\in S_+(\nu(\varphi))$. Тогда

$$s(\mathbf{x},\nu)=2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)),\quad \psi^{-1}(t,\mathbf{x},\nu)=2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)).$$

Обозначим

$$\partial\Sigma(0,\varphi)=\{(\mathbf{x},t)\mid \mathbf{x}\in S_+(\nu(\varphi)),\ t=\omega(2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)),\mathbf{x},\nu(\varphi))\}.$$

Тогда формула (4) примет вид

$$u_0(\mathbf{x},t,\varphi)=\begin{cases} A\exp\Bigl(-\int\limits_0^{2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi))} q(\mathbf{x}+(s'-2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)))\nu)\,ds'\Bigr), & m=2,\\ \Bigl(A^{2-m}-(2-m)\int\limits_0^{2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi))} q(\mathbf{x}^0+(s'-2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)))\nu)\,ds'\Bigr)^{1/(2-m)}, & m\neq 2,\end{cases}\tag{23}$$

$$(\mathbf{x},t)\in\partial\Sigma(0,\varphi).$$

Обратная задача. *Пусть для всех $\nu=\nu(\varphi)$, $\varphi\in[0,\pi)$, известны множества $\Sigma(0,\varphi)$ и функция*

$$u_0(\mathbf{x},t,\varphi),\quad (\mathbf{x},t)\in\Sigma(0,\varphi),\ \varphi\in[0,\pi).$$

Требуется найти $q(\mathbf{x})$ в области $\overline{B}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция $q(\mathbf{x})$ однозначно определяется в области $\overline{B}$ по заданной информации. Решение обратной задачи сводится при этом к обычной задаче рентгеновской томографии.*

Доказательство. Формула (23) позволяет вычислить интегралы

$$\int\limits_0^{2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi))} q(\mathbf{x}-s\nu(\varphi))\,ds=h(\mathbf{x},\varphi),\quad \mathbf{x}\in S_+(\nu(\varphi)),\ \varphi\in[0,\pi).\tag{24}$$

В случае двумерного пространства формула (24) определяет интегралы по прямым, соединяющим произвольную пару точек границы S области $\overline{B}$, а в случае трехмерного пространства по всевозможным прямым, лежащим в сечениях области $\overline{B}$ плоскостями, ортогональными оси x_3. И в том, и другом случаях обратная задача восстановления функции $q(\mathbf{x})$ по интегралам (24) является хорошо изученной задачей томографии, для решения которой существует большое число алгоритмов и программ. Впервые задача обращения интегрального преобразования типа (24) была решена австрийским математиком Иоганном Радоном (Johann Karl August Radon) в работе [17]. Он предложил явную формулу обращения, из которой следует и единственность решения уравнения (24) в классе непрерывных функций. Вычислительный алгоритм решения задачи рентгеновской томографии, отличный от алгоритма, следующего из формулы обращения Радона, был предложен Алланом Кормаком в статье [18] (см. также [19]). За разработку компьютерной томографии и создание первого компьютерного рентгеновского томографа А. Кормак и Г. Хаунсфилд (Godfrey Newbold Hounsfield) в 1979 г. были удостоены Нобелевской премии по физиологии и медицине. Различные алгоритмы и методы решения задач томографии изложены в книгах [20–22]. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.
2. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.
3. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Internat. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
4. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Internat. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987.
5. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Internat. Math. Res. Notices. 2022. V. 17. P. 13181–13211.
6. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pures Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
7. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
8. *Barreto A. S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105.
9. *Barreto A. S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.
10. *Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T.* Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation // J. Differ. Equ. 2022. V. 337. P. 395–435.
11. *Barreto A.S., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse scattering for critical semilinear wave equations // Pure Appl. Anal. 2022. V. 4, N 2. P. 191–223.
12. *Романов В. Г.* Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 635–652.
13. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 560–576.
14. *Романов В. Г.* Обратная задача для волнового уравнения с двумя нелинейными членами // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 4. С. 508–520.
15. *Romanov V. G., Bugueva T. V.* An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation // Eurasian J. Math. Comp. Appl. 2024. V. 12, N 2. P. 134–154.
16. *Романов В. Г.* Одномерная обратная задача для нелинейных уравнений электродинамики // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 10. С. 1397–1411.
17. *Radon J.* Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften. 1917. Bd 29. S. 262–277.
18. *Cormack A. M.* Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications // J. Appl. Physics. 1963. V. 34. P. 2722–2727.
19. *Cormack A. M.* Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it // Nobel lectures in physiology or medicine 1971–1980. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1992. P. 551–563.
20. *Deans S. R.* The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.
21. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
22. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию 29 июля 2024 г.
После доработки 30 июля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru