Сибирский математический журнал
Июль—август, 2024. Том 65, № 4

УДК 512.5+510.6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАМЫКАНИЯ В ДЕЛИМЫХ ЖЕСТКИХ ГРУППАХ

Н. С. Романовский

Аннотация. Доказывается, что в делимой m-жесткой группе алгебраическое замыкание множества, порождающего подгруппу ступени разрешимости m, совпадает с элементарным замыканием этого множества.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.411

Ключевые слова: группа, разрешимая, элементарная теория, алгебраическое замыкание.

1. Введение

В статье речь идет о теоретико-модельном понятии алгебраического замыкания множества, которое мы напомним позже, а сначала дадим определения, связанные с рассматриваемыми группами.

Группа G называется *m-жесткой*, если в ней существует нормальный ряд (он называется жестким)

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \ldots > \rho_m(G) > \rho_{m+1}(G) = 1,$$

факторы которого $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ абелевы и рассматриваемые как (правые) $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$-модули не имеют модульного кручения. Кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$ являются правыми (и левыми) областями Оре, поэтому вкладываются в соответствующие тела частных $Q(G/\rho_i(G))$. Жесткий ряд, если существует, определяется однозначно группой, для его членов используется обозначение $\rho_i(G)$. Ступень разрешимости m-жесткой группы в точности равна m. Жесткая группа G (т. е. m-жесткая для некоторого m) называется *делимой*, если элементы каждого фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, тогда $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ может рассматриваться как векторное пространство над телом $Q(G/\rho_i(G))$. Пересечение любого множества делимых подгрупп в жесткой группе само является делимой подгруппой. Делимая m-жесткая группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма мощностями α_i баз соответствующих векторных пространств $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, она обозначается через $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Эта группа расщепляется в полупрямое произведение абелевых подгрупп $G_1G_2 \ldots G_m$ (G_i нормализует G_j при $i < j$), причем члены жесткого ряда имеют вид $\rho_i(G) = G_i \ldots G_m$. В работах автора и совместных работах с А. Г. Мясниковым изучалась алгебраическая геометрия над жесткими группами, а затем и теория моделей таких групп (см. обзор автора, содержащийся в

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00214, https://rscf.ru/project/24-21-00214/.

монографии [1]). Оказалось, что теория делимых m-жестких групп во многом похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей. В [2–5] доказано, что она полна, разрешима, ω-стабильна, описаны насыщенные модели, описаны определимые подгруппы, описаны элементарные подмодели и установлено, что пересечение произвольного множества элементарных подмоделей снова является элементарной подмоделью в том и только том случае, когда оно имеет ступень разрешимости m. Из последнего вытекает, что если подмножество делимой m-жесткой группы порождает подгруппу ступени разрешимости m, то можно говорить об элементарном замыкании этого подмножества, т. е. наименьшей элементарной подгруппе, содержащей его.

Приведем теоретико-модельные понятия, связанные с алгебраичностью (см. [6, 7]), для простоты речь будем вести о группах. Пусть A — непустое подмножество в группе G. Элемент $g \in G$ называется *определимым* (*алгебраическим*) над A, если найдется *определяющая* (*почти определяющая*) формула $\varphi(x)$ от одной несвязанной переменной x с параметрами из A, множество решений которой равно $\{g\}$ (конечно и содержит g). Множество всех определимых (алгебраических) над A элементов из G называется *определимым* (*алгебраическим*) *замыканием* A и обозначается через $\mathrm{dcl}(A)$ ($\mathrm{acl}(A)$). Выполняются обычные для замыканий свойства. Очевидно, что то и другое замыкания являются подгруппами в G. Удобно будет говорить также об алгебраичности наборов элементов. Назовем набор $(g_1, \ldots, g_n)$ элементов из G *алгебраическим над* A, если для него существует почти определяющая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с параметрами из A, т. е. имеющая конечное число решений, среди которых есть $(g_1, \ldots, g_n)$. Легко понять, что набор $(g_1, \ldots, g_n)$ будет алгебраическим над A тогда и только тогда, когда все g_i принадлежат $\mathrm{acl}(A)$. Назовем почти определяющую формулу для $(g_1, \ldots, g_n)$ *неприводимой*, если никакое непустое собственное подмножество решений не является множеством решений какой-то другой почти определяющей для $(g_1, \ldots, g_n)$ формулы. Несложно заметить, что неприводимая почти определяющая формула для любого алгебраического набора $(g_1, \ldots, g_n)$ существует. Если $(g_1', \ldots, g_n')$ — произвольное решение неприводимой почти определяющей для $(g_1, \ldots, g_n)$ формулы, то имеется совпадение типов $\mathrm{tp}_A(g_1, \ldots, g_n) = \mathrm{tp}_\mathrm{A}(g_1', \ldots, g_n')$, т. е. наборы решений неприводимой почти определяющей формулы удовлетворяют одним и тем же формулам с параметрами из A.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть A — подмножество делимой m-жесткой группы G такое, что подгруппа $\langle A\rangle$ имеет ступень разрешимости m. Тогда $\mathrm{dcl}(A)$ является делимой подгруппой (она может оказаться больше делимого замыкания A), а $\mathrm{acl}(A)$ совпадает с элементарным замыканием A в G.*

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Пусть G — группа, $u = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_n$ — нетривиальный элемент группового кольца $\mathbb{Z}G$, представленный в виде целочисленной линейной комбинации с ненулевыми коэффициентами α_i различных элементов g_i группы G. Множество $\{g_1, \ldots, g_n\}$ называется *носителем* u. *Длина* u определяется как число $|u| = \sum |\alpha_i|$. Пусть L — подмножество из G, пересекающееся с носителем u, тогда *ограничением u на* L назовем элемент $\sum\limits_{g_i \in L} \alpha_i g_i$. Если L не пересекается с носителем u, то считаем, что ограничение равно 0.

Предположим, что $\mathbb{Z}G$ является областью Оре и $Q(G)$ — соответствующее тело частных. Рассмотрим набор $(f_1, \ldots, f_s)$ нетривиальных элементов из $Q(G)$ и соответствующее (правое) представление $f_1 = u_1u^{-1}, \ldots, f_s = u_su^{-1}$ этих элементов в виде правых дробей над $\mathbb{Z}G$ с общим знаменателем u. *Носителем представления* назовем объединение носителей $u_1, \ldots, u_s, u$, а *длиной представления* сумму $|u_1| + \ldots + |u_s| + |u|$. Данное представление называется *минимальным*, если его длина минимальна среди всех правых представлений набора. Назовем представление *приведенным*, если носитель u содержит 1. Из любого минимального представления легко получается минимальное приведенное.

Лемма 1 (см. лемму 7 из [3]). *Пусть A, B — подгруппы из G и $C = A \cap B$. Тогда $Q(A) \cap Q(B) = Q(C)$. Более того, если $0 \neq f_1, \ldots, f_s \in Q(A) \cap Q(B)$ и $f_i = u_iu^{-1}$ $(1 \leq i \leq s)$ — представление выбранных элементов в виде правых дробей от элементов из $\mathbb{Z}B$ с общим знаменателем u, то существует другое представление f_i в виде аналогичных дробей от элементов из $\mathbb{Z}C$ такое, что каждая пара длин $(|u_i|, |u|)$ элементов старого представления покомпонентно $\geq$ соответствующей пары длин элементов нового представления, причем равенство возможно только в том случае, когда второе представление имеет вид $(u_ib)(ub)^{-1}$, где $b \in B$.*

Следствие. *Носители любых минимальных приведенных представлений данного набора $(f_1, \ldots, f_s)$ порождают одну и ту же подгруппу H в G, она является пересечением всех подгрупп $H_i \leq G$, для которых $f_1, \ldots, f_s \in Q(H_i)$.*

Следующая лемма играет принципиальную роль в доказательстве основной теоремы и несомненно будет использоваться в других исследованиях по жестким группам.

Лемма 2. *Пусть дополнительно группа G упорядочена. Тогда для данного набора $(f_1, \ldots, f_s)$ нетривиальных элементов из $Q(G)$ существует лишь конечное число правых (левых) минимальных приведенных представлений.*

Доказательство. Зафиксируем какое-то левое минимальное приведенное представление нашего набора $f_1 = w^{-1}w_1, \ldots, f_s = w^{-1}w_s$ через левые дроби с общим знаменателем w. Его носитель порождает ту же подгруппу H в G, что и носители правых минимальных приведенных представлений. Для нетривиальных элементов $u_1, \ldots, u_s, u \in \mathbb{Z}G$ имеем

$$f_1 = u_1u^{-1}, \ldots, f_s = u_su^{-1} \Leftrightarrow w_1u = wu_1, \ldots, w_su = wu_s.$$

Пусть $f_1 = u_1u^{-1}, \ldots, f_s = u_su^{-1}$ — правое минимальное приведенное представление нашего набора. Введем для носителей указанных ниже множеств соответствующие обозначения:

$$\{w_1, \ldots, w_s\} - A,\ \{w\} - B,\ \{u_1, \ldots, u_s\} - C,\ \{u\} - D.$$

Очевидно, носитель $\{w_1u, \ldots, w_su\}$ равняется носителю $\{wu_1, \ldots, wu_s\}$, пусть это будет E. Тогда $E \subseteq AD \cap BC$. По условию множества B и D содержат 1, можно предполагать, что 1 — минимальный элемент в B и D. Отметим, что множество $A \cap E$ содержит хотя бы один (например, минимальный) элемент каждого носителя $w_1, \ldots, w_s$.

Пусть M — подмножество из BC. Назовем *проекцией M на C* множество всех таких элементов $c \in C$, для которых найдется $b \in B$ с условием $bc \in$

M. Аналогично определяется проекция подмножества из AD на D. Заметим, что проекция одноэлементного множества может содержать больше, чем один элемент.

Для произвольного подмножества $L \subseteq C$ (аналогично $L \subseteq D$) определим его *проективное замыкание* $\overline{L}$. Если найдутся $b', b \in B$, $c' \in L$, $c \in C \setminus L$ (аналогично $a', a \in A$, $d' \in L$, $d \in D \setminus L$), для которых $b'c' = bc$ (аналогично $a'd' = ad$), то присоединяем c к L (аналогично d к L). Отметим, что присоединяемый элемент равен $b^{-1}b'c'$ (аналогично $a^{-1}a'd'$). Затем процедуру повторяем для множества $L \cup \{c\}$ ($L \cup \{d\}$) и так далее до получения замкнутого множества $\overline{L}$, т. е. когда присоединение нового элемента невозможно. Очевидно, выполняются свойства $\overline{\overline{L}} = \overline{L}$, $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow \overline{L}_1 \subseteq \overline{L}_2$. Построение замыкания $L \subseteq C$ можно истолковать по другому: заменяем L проекцией BL на C и так далее. Замкнутость L означает, что проекция BL на C равна L.

Обозначим через C_1 проекцию множества $A \cap BC$ на C и возьмем замыкание $\overline{C}_1$. Обозначим через D_1 проекцию множества $AD \cap B\overline{C}_1$ на D и возьмем замыкание $\overline{D}_1$. Множество D_1 содержит 1, так как пересечение $A \cap BC_1$ непусто. Обозначим через C_2 проекцию множества $A\overline{D}_1 \cap BC$ на C и возьмем замыкание $\overline{C}_2$. Из включения $1 \in \overline{D}_1$ выводится $C_1 \subseteq C_2$.

Пусть по индукции построены $C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_k \subseteq C$, $D_1 \subseteq \ldots \subseteq D_{k-1} \subseteq D$. Обозначим через D_k проекцию множества $AD \cap B\overline{C}_k$ на D и возьмем замыкание $\overline{D}_k$. Обозначим через C_{k+1} проекцию множества $A\overline{D}_k \cap BC$ на C и возьмем замыкание $\overline{C}_{k+1}$. Из включения $\overline{C}_{k-1} \subseteq \overline{C}_k$ выводится $D_{k-1} \subseteq D_k$, а из включения $\overline{D}_{k-1} \subseteq \overline{D}_k$ выводится $C_k \subseteq C_{k+1}$.

Пусть на $k+1$-м шаге происходит стабилизация (а она произойдет не некотором шаге, так как множества C и D конечны), полагаем тогда $C' = C_{k+1} = \overline{C}_k$, $D' = D_{k+1} = \overline{D}_k$. Имеем следующие свойства.

(1) Если какой-то элемент из AD' представляется в виде bc ($b \in B$, $c \in C$), то $c \in C'$. Если какой-то элемент из BC' представляется в виде ad ($a \in A$, $d \in D$), то $d \in D'$. В частности, $AD \cap BC' = AD' \cap BC = AD' \cap BC'$.

(2) Проекция BC' на C равна C', а проекция AD' на D равна D'.

Пусть $u'_1, \ldots, u'_s$ обозначают ограничения элементов $u_1, \ldots, u_s$ на C', а u' обозначает ограничение элемента u на D'. Так как 1 лежит в пересечении D' и носителя u, то $u' \neq 0$. Заметим, что каждое $u'_i \neq 0$. У нас есть равенство $w_i u = w u_i$. Так как 1 — минимальный элемент носителя w, то минимальный элемент носителя u_i является минимальным элементом носителя правой части равенства. А минимальный элемент носителя левой части совпадает с минимальным элементом носителя w_i. По построению последний лежит в C', следовательно, C' пересекается с носителем u_i и тогда $u'_i \neq 0$.

Докажем равенства $w_i u' = w u'_i$. Полагаем $D'' = D \setminus D'$. Представим u в виде $u' + u''$, где u'' — ограничение u на D''. Из условия (2) следует, что множество AD разбивается в объединение непересекающихся подмножеств AD' и AD''. Так как носитель $w_i u'$ содержится в AD', а носитель $w_i u''$ содержится в AD'', то $w_i u'$ является ограничением $w_i u$ на AD'. Вспомним, что носитель $w_i u$ содержится еще в BC. Тогда $w_i u'$ будет ограничением $w_i u$ на $AD' \cap BC = AD' \cap BC'$. Аналогично устанавливается, что $w u'_i$ будет ограничением $w u_i$ на $BC' \cap AD = AD' \cap BC'$. Тогда из равенства $w_i u = w u_i$ вытекает $w_i u' = w u'_i$.

На основании доказанного можно утверждать, что $f_1 = u'_1 u'^{-1}, \ldots, f_s = u'_s u'^{-1}$ также является правым приведенным представлением выбранного набора. Из условия минимальности представления $f_1 = u_1 u^{-1}, \ldots, f_s = u_s u^{-1}$

вытекает, что оба представления должны совпадать. Тогда $C = C'$ и $D = D'$. Вспомним теперь процесс построения множеств C' и D'. Мы, исходя из подмножества $A \cap BC$ множества A, на каждом шаге добавляли элементы, которые получались из построенных ранее умножением слева на элементы одного из множеств $A^{-1}A$, $B^{-1}B$, $A^{-1}B$, $B^{-1}A$. Число добавляемых элементов не выше $|C| + |D|$. Поэтому, если взять $l = 2(|C| + |D|) + 1$, то $C \cup D$ содержится в l-й степени множества $A \cup A^{-1} \cup B \cup B^{-1}$. Число элементов этой степени зависит только от $|A|, |B|, |C|, |D|$. Отсюда вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

2.2. Приведем некоторые известные факты о жестких группах, их можно найти в [2, 3].

Предложение 1. *Пусть G — жесткая группа. Тогда условие $x \in \rho_i(G)$ записывается как $\exists$-формулой (в сигнатуре теории групп), так и $\forall$-формулой.*

Предложение 2. *Пусть G — делимая m-жесткая группа и $G = G_1G_2 \dots G_m$ — ее расщепление.*

(1) *Всякая подгруппа G_i совпадает с централизатором любого своего нетривиального элемента.*

(2) *Любой элемент из $\rho_i(G) \setminus \rho_{i+1}(G)$ сопряжен с некоторым элементом из G_i.*

(3) *Любое другое расщепление группы G сопряжено с данным с помощью некоторого элемента из G.*

(4) *Если G — подгруппа делимой m-жесткой группы H и H_i обозначает централизатор в H нетривиального элемента $g_i \in G_i$, то $H = H_1H_2 \dots H_m$ — расщепление группы H, согласованное с данным расщеплением G, т. е. $G_i = G \cap H_i$.*

(5) *С помощью произвольного элемента $a \in G \setminus \rho_2(G)$ можно построить расщепление $G = G'_1G'_2 \dots G'_m$, если положить G'_1 равным централизатору элемента a, а далее при $i > 1$ множество $G'_i \setminus \{1\}$ полагается равным $\{x \in \rho_i(G) \setminus \rho_{i+1}(G) \mid [x, x^a] = 1\}$.*

Предложение 3. *Пусть G, G' — делимые m-жесткие группы и*

$$G = G_1G_2 \dots G_m, \quad G' = G'_1G'_2 \dots G'_m$$

— их расщепления. Выберем для каждого i какую-то базу E_i пространства G_i над телом $Q(G_1 \dots G_{i-1})$, затем базу E'_i пространства G'_i над телом $Q(G'_1 \dots G'_{i-1})$. Пусть $|E_i| = |E'_i|$ для всех i. Тогда любой набор биекций $E_i \to E'_i$ определяет изоморфизм $G \to G'$.

Пусть $G \leq H$ — делимые m-жесткие группы и

$$G = G_1G_2 \dots G_m, \quad H = H_1H_2 \dots H_m$$

— их согласованные расщепления. Говорят, что G — *независимая подгруппа* в H (или группа G *независимо вложена* в H), если для всякого i любая система элементов из G_i, линейно независимая над кольцом $\mathbb{Z}[G_1 \dots G_{i-1}]$ (равносильно телом $Q(G_1 \dots G_{i-1})$), остается линейно независимой над кольцом $\mathbb{Z}[H_1 \dots H_{i-1}]$ (телом $Q(H_1 \dots H_{i-1})$).

Предложение 4. *Элементарные подмодели делимой m-жесткой группы — это в точности независимые m-ступенно разрешимые делимые подгруппы.*

Следующий факт хорошо известен.

Предложение 5. *Жесткие группы упорядочиваемы.*

3. Доказательство теоремы

По условию найдется элемент $a \in A \setminus \rho_2(G)$. Согласно утверждению (5) из предложения 2 через этот элемент строим расщепление $G = G_1G_2 \dots G_m$. Подгруппы G_i с учетом предложения 1 определяются формулами с параметром a. Пусть $g = g_1 \dots g_m$ — соответствующее расщепление элемента $g \in G$. Можно утверждать, что

$$g \in \mathrm{dcl}(A) \Leftrightarrow g_1, \dots, g_m \in \mathrm{dcl}(A).$$

Аналогично

$$g \in \mathrm{acl}(A) \Leftrightarrow g_1, \dots, g_m \in \mathrm{acl}(A).$$

Поэтому имеется расщепление $D_1 \dots D_m$ подгруппы $D = \mathrm{dcl}(A)$, согласованное с выбранным расщеплением G. Докажем, что D — делимая подгруппа. Для этого достаточно установить: если $d \in D_k$, $0 \neq u \in \mathbb{Z}[D_1 \dots D_{k-1}]$, то на модульном языке $du^{-1} \in D_k$. Пусть $u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, где $0 \neq \alpha_i \in \mathbb{Z}$, b_i — различные элементы из $D_1 \dots D_{k-1}$. По условию имеются формулы $\varphi(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ с параметрами из A, множествами решений которых являются соответственно $\{d\}, \{b_1\}, \dots, \{b_n\}$. Тогда формула

$$\exists y \exists y_1 \dots \exists y_n (\varphi(y) \wedge \varphi_1(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi_n(y_n) \wedge (x \in G_k) \wedge (y = x(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n))$$

определяет элемент du^{-1}. Следовательно, D — делимая подгруппа и первое утверждение теоремы доказано.

Так как множество $\mathrm{acl}(A)$ алгебраически замкнуто, оно определимо замкнуто и тогда по предыдущему является делимой подгруппой, содержащей делимое замыкание A. Элементарное замыкание множества A также содержит его делимое замыкание. Поэтому для наших целей можно предполагать, что само множество A является делимой подгруппой. После этого второе утверждение теоремы, очевидно, будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $H \leq G$ — делимые m-жесткие группы. Тогда алгебраическая замкнутость подгруппы H в G равносильна элементарности.*

Доказательство. Выберем согласованные расщепления

$$H = H_1H_2 \dots H_m, \quad G = G_1G_2 \dots G_m.$$

Покажем, что из элементарности H следует алгебраическая замкнутость. Для этого в предположении элементарности H достаточно установить: если $g \in G_k \setminus H_k$, то $g \notin \mathrm{acl}(H)$. Покажем это. В каждом из векторных пространств $H_1, H_2, \dots, H_m$ над соответствующими телами $\mathbb{Q}, Q(H_1), \dots, Q(H_1 \dots H_{m-1})$ выберем базы $E_1, E_2, \dots, E_m$. Дополним их множествами $E_1', E_2', \dots, E_m'$ до баз пространств $G_1, G_2, \dots, G_m$ над телами $\mathbb{Q}, Q(G_1), \dots, Q(G_1 \dots G_{m-1})$ так, что $g \in E_k'$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение множества

$$E_1 \cup E_1' \cup E_2 \cup E_2' \cup \dots \cup E_m \cup E_m'$$

в G, которое тождественно на всех элементах кроме g и переводит g в g^n (на модульном языке в gn), в силу предложения 3 продолжается до автоморфизма группы G, который тождествен на H. Следовательно, $\mathrm{tp}_H(g) = \mathrm{tp}_{\mathrm{H}}(g^n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $g \notin \mathrm{acl}(H)$.

Пусть теперь H не является элементарной подгруппой, докажем, что она не алгебраически замкнута. По предложению 3 в каком-то пространстве H_k, оно рассматривается над телом $Q(H_1 \dots H_{k-1})$, найдется линейно независимый набор элементов $(e_1, \dots, e_n, e)$, который, однако, зависим на телом $Q(G_1 \dots G_{k-1})$.

Можно дополнительно предполагать, что любой собственный поднабор набора $(e_1, \dots, e_n, e)$ линейно независим над $Q(G_1 \dots G_{k-1})$. Пусть $e = e_1 f_1 + \dots + e_n f_n$, где $(f_1, \dots, f_n)$ — набор элементов из $Q(G_1 \dots G_{k-1})$, он состоит из ненулевых элементов и определяется однозначно. Зафиксируем правое минимальное приведенное представление

$$f_1 = u_1 u^{-1},\ \dots,\ f_n = u_n u^{-1}$$

рассматриваемого набора дробей. Пусть $\{b_1, \dots, b_s\}$ — носитель представления и

$$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_s b_s,\ u_1 = \alpha_{11} b_1 + \dots + \alpha_{1s} b_s, \dots, u_n = \alpha_{n1} b_1 + \dots + \alpha_{ns} b_s,$$

где $\alpha_i, \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. По условию $\{b_1, \dots, b_s\} \nsubseteq H$, для определенности $b_1 \notin H$. Выберем для набора $(e_1, \dots, e_n, e)$ неприводимую почти определяющую формулу $\varphi(x_1, \dots, x_n, x)$ с параметрами из H. Отметим, что любой набор, являющийся решением формулы φ, обязан содержаться в H_k. Далее рассмотрим формулу

$$\begin{aligned}&\psi(x_1, \dots, x_n, x, y_1, \dots, y_s)\\ &= \varphi(x_1, \dots, x_n, x) \wedge (y_1 \in G_1 \dots G_{k-1}) \wedge \dots \wedge (y_s \in G_1 \dots G_{k-1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (y_i \neq y_j)\\ \wedge\, &(x(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_s y_s) = x_1(\alpha_{11} y_1 + \dots + \alpha_{1s} y_s) + \dots + x_n(\alpha_{n1} y_1 + \dots + \alpha_{ns} y_s)).\end{aligned}$$

По построению набор $(e_1, \dots, e_n, e, b_1, \dots, b_s)$ является решением формулы ψ. Утверждается, что эта формула будет почти определяющей для указанного набора, а тогда $b_1 \in \operatorname{acl}(H) \Rightarrow \operatorname{acl}(H) > H$.

Итак, необходимо доказать конечность множества всех решений ψ. Пусть $(e'_1, \dots, e'_n, e', b'_1, \dots, b'_s)$ — произвольное решение формулы ψ. Так как набор $(e'_1, \dots, e'_n, e')$ является решением формулы φ, для него имеется лишь конечное число возможностей. Из условия $\operatorname{tp}_H(e_1, \dots, e_n, e) = \operatorname{tp}_{\mathrm{H}}(e'_1, \dots, e'_n, e')$ вытекают следующие факты: набор $(e'_1, \dots, e'_n)$ линейно независим над $Q(G_1 \dots G_{k-1})$; имеется однозначное разложение e' в виде линейной комбинации $e' = e'_1 f'_1 + \dots + e'_n f'_n$, где дроби $f'_i \in Q(G_1 \dots G_{k-1})$ могут быть представлены в виде

$$u'_i u'^{-1},\ u' = \alpha_1 b'_1 + \dots + \alpha_s b'_s,\ u'_i = \alpha_{i1} b'_1 + \dots + \alpha_{is} b'_s;$$

указанное представление набора дробей $(f'_1, \dots, f'_n)$ является минимальным приведенным. По лемме 2 число приведенных минимальных представлений набора дробей $(f'_1, \dots, f'_n)$ конечно, а тогда и число возможностей для набора элементов $(b'_1, \dots, b'_s)$ также конечно. Это и требовалось доказать. Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

Замечание. Покажем на примере, что $\operatorname{dcl}(A)$ может быть больше делимого замыкания множества A.

Пусть $G = M(2,1)$, $G_1 G_2$ — расщепление группы G, $\{a, b\}$ — база G_1 над $\mathbb{Q}$, $1 \neq c \in G_2$, $A = \{a, c, c^{1+b}\}$. Делимое замыкание множества A будет равно произведению группы $a^{\mathbb{Q}}$ и аддитивной группы векторного пространства над полем $Q(a^{\mathbb{Q}})$ с базой $\{c, c^{1+b}\}$. Оно изоморфно $M(1,2)$. В то время как определимое замыкание содержит элемент b, он определяется формулой $\varphi(x) = ([x, a] = 1) \wedge (c^{1+x} = c^{1+b})$ с параметрами из A, и тогда $\operatorname{dcl}(A) = G$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Groups and model theory. GAGTA book 2. Berlin; Boston: De Gruyter, 2021.
2. *Романовский Н. С.* Делимые жесткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 5. С. 593–612.
3. *Мясников А. Г., Романовский Н. С.* Делимые жесткие группы. II. Стабильность, насыщенность и элементарные подмодели // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 1. С. 43–56.
4. *Романовский Н. С.* Делимые жесткие группы. III. Однородность и элиминация кванторов // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 6. С. 733–748.
5. *Романовский Н. С.* Делимые жесткие группы. IV. Определимые подгруппы // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 3. С. 344–366.
6. *Marker D.* Model theory: An introduction. New York: Springer-Verl., 2002.
7. *Hodges W.* Model theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1993.

Поступила в редакцию 1 февраля 2024 г.
После доработки 1 февраля 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Романовский Николай Семенович (ORCID 0000-0002-0755-2057)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
rmnvski@math.nsc.ru