Сибирский математический журнал
Июль—август, 2024. Том 65, № 4

УДК 515.122.22

К ТЕОРИИ H–СОБРАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. И. Кудряшова, М. В. Швидефски

Аннотация. Предлагается систематическое изучение обобщенно собранных пространств.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.405

Ключевые слова: c-компактное пространство, собранное пространство, T_0-пространство.

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению общей теории собранных пространств. Свойство собранности играет центральную роль в изучении топологических T_0-пространств, в частности, в теории дуальности для дистрибутивных частично упорядоченных множеств (см. например [1]). Собранность является одним из характеристических свойств так называемых спектральных пространств и пространств, близких к ним (другими словами, дуальных объектов для дистрибутивных частично упорядоченных множеств). Более точно, T_0-пространство спектрально тогда и только тогда, когда оно является компактным собранным пространством, в котором все открытые компактные множества образуют мультипликативную базу топологии (см., например, [2, разд. 3], а также [3, разд. 13.2] и [1]).

В [4] Сю предложил определение обобщенно собранного пространства (или H-собранного пространства), см. определения 1 и 2 ниже. Это определение включает в себя (вместе с понятием собранности) много хорошо известных свойств T_0-пространств, в частности, свойство вполне фильтрованности, которое изучалось, к примеру, в работах китайских математиков [5–7], а также свойство направленной полноты (см. например работы Ю. Л. Ершова [3, 8–11] и Каймеля и Лосона [12]).

В работе Ю. Л. Ершова [13] было установлено, что для определенных категорий $\mathbf{K}$ T_0-пространств любое T_0-пространство обладает $\mathbf{K}$-пополнением. Этот результат обобщает результат, установленный Сю в [4], который говорит о том, что каждое T_0-пространство обладает H-собрификацией. Более того, оказалось, что многие результаты, установленные для пространств непрерывных функций, имеют естественное обобщение в рамках понятия H-собранности. Процитируем, например, такой результат.

Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда no. 24-21-00075, https://rscf.ru/project/24-21-00075/.

Теорема 1 [14, теорема 14]. *Пусть* H *является* I*-системой. Для* T_0*-пространства* $\mathbb{Y}$ *эквивалентны следующие условия.*

(i) *Пространство* $\mathbb{Y}$ H*-собранно.*

(ii) *Пространство* $\mathbb{C}_{\mathscr{I}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ H*-собранно для каждого с-компактного пространства* $\mathbb{X}$.

(iii) *Пространство* $\mathbb{C}_{\mathscr{I}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ H*-собранно для некоторого* [*с-компактного*] *пространства* $\mathbb{X}$.

(iv) *Пространство* $\mathbb{C}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ H*-собранно для каждого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$.

(v) *Пространство* $\mathbb{C}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ H*-собранно для некоторого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$.

(vi) *Пространство* $\mathbb{C}_{\mathscr{T}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ H*-собранно для некоторого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *и топологии* $\mathscr{T}$ *на* $C(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *такой, что* $\mathscr{P}\subseteq\mathscr{T}\subseteq\mathscr{T}_A(\subseteq)^\sharp$.

Ввиду следствия 2 теорема 1 может быть применена к любой из I-систем, перечисленных в начале разд. 2 ниже. Таким образом, теорема 1 обобщает, в частности, теоремы 9 и 12 из [15], а также некоторые результаты из [16]. Более того, из теоремы 1 и леммы 15(i) ниже вытекает, что категория $\mathbf{H}$ H-собранных пространств является декартово замкнутой полной подкатегорией категории $\mathbf{Top}_0$ топологических T_0-пространств.

Как следует из результатов настоящей статьи, многие свойства собранных пространств имеют свое естественное обобщение на H-собранные пространства. Нашими основными результатами являются теоремы 11 и 20, которые характеризуют H-собранные пространства в терминах расширений, и теорема 23, которая описывает H-собрификации T_0-пространств. Эта статья является первой в цикле статей об обобщенно собранных пространствах. Во второй части этого цикла бы обсудим H-собрификации аппроксимационных пространств.

Терминология, касающаяся T_0-пространств, соответствует монографиям [3, 17, 18].

2. H-собранные пространства

2.1. I**-системы и** H**-собранность** Для топологического T_0-пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующие подмножества его носителя X:

– $\mathsf{I}(\mathbb{X})$, множество всех непустых неприводимых подмножеств в X;

– $\mathsf{S}(\mathbb{X})$, множество всех одноэлементных подмножеств в X;

– $\mathsf{D}(\mathbb{X})$, множество всех непустых направленных вверх подмножеств в X;

– $\mathsf{WF}(\mathbb{X})$, множество всех непустых вполне фильтрованных подмножеств в X;

– $\mathsf{R}(\mathbb{X})$, множество всех непустых подмножеств Рудина в X;

– $\mathsf{I}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных неприводимых подмножеств в X;

– $\mathsf{D}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных направленных вверх подмножеств в X;

– $\mathsf{WF}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных вполне фильтрованных подмножеств в X;

– $\mathsf{R}^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных подмножеств Рудина в X.

Определение 1 [4]. *Системой подмножеств* называется ковариантный функтор $\mathsf{H}\colon \mathbf{Top}_0\to\mathbf{Set}$ такой, что $\mathsf{S}(\mathbb{X})\subseteq\mathsf{H}(\mathbb{X})\subseteq 2^X$, и для каждого $\mathbb{Y}\in\mathbf{Top}_0$ и любого непрерывного отображения $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ имеем $\mathsf{H}(f)(A)=f(A)\in\mathsf{H}(\mathbb{Y})$ для всех $A\in\mathsf{H}(\mathbb{X})$.

Система подмножеств H называется *неприводимой системой* или просто I*-системой*, если $\mathsf{H}(\mathbb{X})\subseteq\mathsf{I}(\mathbb{X})$ для всех $\mathbb{X}\in\mathbf{Top}_0$.

Следствие ниже вытекает непосредственно из определения 1.

Следствие 2. *Если* $\mathsf{X} \in \{\mathsf{D}, \mathsf{D}^b, \mathsf{WF}, \mathsf{WF}^b, \mathsf{R}, \mathsf{R}^b, \mathsf{I}, \mathsf{I}^b\}$, *то* X *является I-системой.*

Для системы подмножеств H полагаем $\mathsf{H}_c(\mathbb{X}) = \{\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A \mid A \in \mathsf{H}(\mathbb{X})\}$.

Определение 2 [4]. Пусть H — система подмножеств. T_0-пространство $\mathbb{X}$ называется H-*собранным*, если $\mathsf{H}_c(\mathbb{X}) = \mathsf{S}_c(\mathbb{X})$.

Очевидно, что класс всех S-собранных пространств совпадает с классом всех T_0-пространств, а класс всех I-собранных пространств — с классом всех собранных пространств.

2.2. H-собранно определенные множества.

Определение 3 [4, определение 4.17]. Пусть $\mathbb{X}$ — T_0-пространство, и пусть H — I-система. Подмножество $A \subseteq X$ называется H-*собранно определенным*, если для каждого H-собранного пространства $\mathbb{Y}$ и каждого непрерывного отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ существует [единственный] элемент $y_A \in Y$ такой, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(A) = \downarrow y_A$.

Через $\mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ обозначаем множество всех H-собранно определенных подмножеств в X.

Непосредственным образом можно установить следующее утверждение.

Лемма 3 [4, лемма 4.20]. *Пусть H — I-система, пусть $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ — T_0-пространства, пусть отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно, и пусть $A \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$. Тогда $f(A) \in \mathsf{H}^d(\mathbb{Y})$.*

Лемма 4 [4, лемма 4.19]. *Если H — I-система, то $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{H}^d \subseteq \mathsf{I}$. В частности, $\mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ является I-системой, а $\mathsf{I}^d = \mathsf{I}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{X}$ — T_0-пространство и $A \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$. Пусть также $\mathbb{Y}$ является H-собранным пространством, и пусть отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно. Тогда $f(A) \in \mathsf{H}(\mathbb{Y})$ по определению 1. Поскольку $\mathbb{Y}$ является H-собранным, найдется $y \in Y$ такой, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(A) = \downarrow y$, откуда следует, что $A \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ и $\mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$.

Пусть теперь $A \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ и $A \subseteq F_0 \cup F_1$ для некоторых замкнутых подмножеств $F_0, F_1 \subseteq X$. Если $A \nsubseteq F_i$ для всех $i < 2$, то для любого $i < 2$ найдется $a_i \in A \backslash F_i$, т. е. $a_i \in A \cap U_i$, где $U_i = X \backslash F_i \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ для всех $i < 2$. Отметим, что $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ является собранным пространством, поэтому оно H-собранно (см. лемму 15(i) ниже). Рассмотрим отображение

$$f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{S} \times \mathbb{S}; \quad f\colon x \mapsto \begin{cases} (0,0), & \text{если } x \notin U_0 \cup U_1, \\ (1,0), & \text{если } x \in U_0 \backslash U_1, \\ (0,1), & \text{если } x \in U_1 \backslash U_0, \\ (1,1), & \text{если } x \in U_0 \cap U_1. \end{cases}$$

Легко видеть, что f непрерывно. По предположению существует $b \in S^2$ такой, что $\mathrm{cl}\, f(A) = \downarrow b$. Так как $A \subseteq F_0 \cup F_1$, делаем вывод, что $f(a_0) = (1,0) \in \downarrow b$ и $f(a_1) = (0,1) \in \downarrow b$. Отсюда следует, что $b = (1,1) \in \mathrm{cl}\, f(A)$. Так как $(1,1) \in \{(1,1)\} \in \mathscr{T}(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$, получаем равенство $f(a) = (1,1)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда по определению f имеем $a \in U_0 \cap U_1 \cap (F_0 \cup F_1) = \varnothing$; противоречие. Это противоречие показывает, что $A \subseteq F_i$ для некоторого $i < 2$. Таким образом, $A \in \mathsf{I}(\mathbb{X})$ и $\mathsf{H}^d(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{I}(\mathbb{X})$.

Последнее утверждение вытекает непосредственно из леммы 3. $\square$

Лемма 5. *Пусть* H — I*-система, пусть* $\mathbb{X}$ — T_0*-пространство, и пусть* $A \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$. *Если* $B \subseteq X$ *таково, что* $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} B = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$, *то* $B \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$. *В частности, если* $A \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$, *то* $B \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{Y}$ — H-собранное пространство и отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно. Докажем сначала, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} C) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$ для всех $C \subseteq X$. Действительно, $f(C) \subseteq f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} C)$, откуда $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(C) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} C)$. Пусть $x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} C$ и $f(x) \in U \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$. Тогда $x \in f^{-1}(U) \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ и найдется $c \in C$ такой, что $c \in f^{-1}(U)$. Отсюда следует, что $f(c) \in U$ и поэтому $f(x) \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$. Таким образом, $f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} C) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$, откуда следует включение $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} C) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$, и получаем искомое равенство $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} C) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$.

Далее, равенство $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} B = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$ влечет, что

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} B) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(B).$$

Так как $A \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, существует $y \in Y$ такой, что $\downarrow y = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(A) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(B)$. Следовательно, $B \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$, что и требовалось.

Наконец, если $A \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$, то $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} B = \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} A$, а последнее утверждение леммы 5 вытекает из первого. □

3. H-базисы и H^*-базисы

Согласно работе Ю. Л. Ершова [10] (см. также [3, разд. 5.2]) расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ топологических пространств называется *u-расширением*, если для каждого топологического пространства $\mathbb{Z}$ и любых непрерывных отображений $f, g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ имеем $f = g$, как только $f|_{\mathbb{X}} = g|_{\mathbb{X}}$. Следующее определение является обобщением [3, определение 8.2.1] (см. также работу Ю. Л. Ершова [8]).

Определение 4. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0-пространств, и пусть H является I-системой. Тогда $\mathbb{X}$ называется H-*базисом* для $\mathbb{Y}$, если для любого $y \in Y$ существует $Z \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$ такой, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} Z = \downarrow y$. (Отсюда следует, что в этом случае $y \in \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} Z$ и $y = \sup_{\mathbb{Y}} Z$.)

Пространство $\mathbb{X}$ называется H^*-*базисом* для $\mathbb{Y}$, если для любого H-собранного пространства $\mathbb{Z}$ и любого непрерывного отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ существует единственное непрерывное отображение $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ такое, что $f = g|_{\mathbb{X}}$.

Замечание 1. Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, то тождественное отображение $\iota_{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является гомеоморфным вложением. Поэтому в определении H-базиса (см. определение 4) имеем включение $F \in \mathsf{H}(\mathbb{Y})$.

Следующее утверждение имеет довольно простое доказательство.

Лемма 6. *Пусть* $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ *является расширением топологических* T_0*-пространств и* $f\colon \mathbb{Y} \to f(\mathbb{Y})$ — *гомеоморфизм. Тогда* $\mathbb{X}$ *является* H^**-базисом для* $\mathbb{Y}$, *если и только если* $f(\mathbb{X})$ *является* H^**-базисом для* $f(\mathbb{Y})$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}$ — H-собранное пространство, и пусть отображение $g\colon f(\mathbb{X}) \to \mathbb{Z}$ непрерывно. Так как f — гомеоморфизм, отображение $h' = gf|_{\mathbb{X}}$ непрерывно. Следовательно, существует единственное непрерывное отображение $h\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ такое, что $h|_{\mathbb{X}} = h'$. Рассмотрим непрерывное отображение $g' = hf^{-1}$. Для всех $y \in f(X)$ имеем

$$g'(y) = hf^{-1}(y) = h'f^{-1}(y) = gff^{-1}(y) = g(y).$$

Таким образом, $f(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $f(\mathbb{Y})$. Обратное утверждение может быть доказано симметричным образом. □

В этом разделе обобщим некоторые результаты из [3, разд. 8.2] на H-собранные пространства. Следующее утверждение является обобщением [3, предложение 8.2.5].

Предложение 7. *Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0-пространств, и пусть H — I-система. Если $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$. В частности, если $\mathbb{X}$ является H-базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X}$ — H^*-базис для $\mathbb{Y}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}$ — H-собранное пространство, и пусть отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ непрерывно. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \mathbb{Y}$. Так как $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$, существует $F \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ такое, что $F \subseteq\downarrow y$ и $y \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} F$; следовательно, $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} F =\downarrow y$. По определению H^d существует $z \in \mathbb{Z}$ такой, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(F) =\downarrow z$ поскольку $\mathbb{Z}$ является H-собранным пространством. Рассмотрим отображение $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ такое, что $g(y) = z$. Покажем, что g является единственным непрерывным отображением из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{Z}$ с условием $f = g|_{\mathbb{X}}$.

Утверждение 1. *Отображение g определено корректно.*

Доказательство. Рассмотрим другое множество $G \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ такое, что $G \subseteq\downarrow_{\mathbb{Y}} y$ и $y \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} G$. Достаточно показать, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(F) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(G)$. Пусть $z_0 \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(G)$ и $U \in \mathscr{T}(z_0)$; тогда существует $x \in G$ такой, что $f(x) \in U$. Так как $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, существует $V \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$ такое, что $V \cap X = f^{-1}(U) \in \mathscr{T}(X)$. Поскольку $x \in G$ и $G \subseteq\downarrow_{\mathbb{Y}} y$, имеем $x \leq y$, следовательно, $y \in V$. Так как $y \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} F$, существует $x_0 \in V \cap F \subseteq f^{-1}(U) \cap F$. Отсюда получаем, что $f(x_0) \in U \cap f(F)$, поэтому $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(G) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(F)$. Обратное утверждение может быть доказано симметричным образом. $\square$

Так как $\{x\} \in \mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ и $\downarrow_{\mathbb{Z}} f(x) = \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}}\{f(x)\}$, заключаем в силу (доказательства) утверждения 1, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, т. е. $g|_{\mathbb{X}} = f$.

Утверждение 2. *Отображение g непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $U \in \mathscr{T}(\mathbb{Z})$. Докажем сначала, что $y \in Y$, $y \in g^{-1}(U)$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)\cap \downarrow_{\mathbb{Y}} y \neq \varnothing$.

Действительно, пусть $y \in g^{-1}(U)$; тогда $g(y) \in U$. По определению отображения g найдется подмножество $F \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ такое, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(F) =\downarrow_{\mathbb{Z}} g(y)$, в частности, $g(y) \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} f(F)$. Таким образом, существует $x \in F$ такой, что $f(x) \in U$; т. е. $f^{-1}(U)\cap \downarrow_{\mathbb{Y}} y \neq \varnothing$. Обратно, предположим, что $f^{-1}(U)\cap \downarrow_{\mathbb{Y}} y \neq \varnothing$. Тогда поскольку $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$, существует $G \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ такой, что $\downarrow_{\mathbb{Y}} y = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} G$. Следовательно, $f^{-1}(U) \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} G = f^{-1}(U)\cap \downarrow_{\mathbb{Y}} y \neq \varnothing$, откуда $f^{-1}(U) \cap G \neq \varnothing$. Таким образом, $f(x) \in U$ для некоторого $x \in G$. По определению g имеем $f(x) \leq g(y)$, поэтому $g(y) \in U$ и $y \in g^{-1}(U)$. Следовательно,

$$g^{-1}(U) = \{y \in Y \mid \ f^{-1}(U)\cap \downarrow_{\mathbb{Y}} y \neq \varnothing\} =\uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U).$$

Пусть $W \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$ таково, что $W \cap X = f^{-1}(U) \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$. Покажем, что $\uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U) = W$. Действительно, если $y \in W$, то поскольку $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$, существует $H \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ такое, что $\downarrow_{\mathbb{Y}} y = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} H$. Отсюда следует, что $x \in H \cap W \subseteq X \cap W = f^{-1}(U)$. Вспоминая, что $H \subseteq\downarrow_{\mathbb{Y}} y$, имеем $x \leq y$ и $y \in\uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U)$. Следовательно, $W \subseteq\uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U)$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $f^{-1}(U) = W \in \mathscr{T}(Y)$. $\square$

Утверждение 3. *Отображение g единственно.*

Доказательство. Пусть непрерывные отображения g_0 и g_1 из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{Z}$ таковы, что $g_0|_{\mathbb{X}} = f = g_1|_{\mathbb{X}}$. Достаточно установить, что $g_i(y) \leq g_{1-i}(y)$ для всех

$y \in Y$ и всех $i < 2$. Действительно, пусть $i < 2$ и пусть $g_i(y) \in U \in \mathscr{T}(\mathbb{Z})$ для некоторого $y \in Y$; тогда $y \in g_i^{-1}(U) \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$. Так как $\mathbb{X}$ — H^d-базис для $\mathbb{Y}$, существует $F \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ такое, что $\downarrow y = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} F$. Следовательно, найдется $x \in g_i^{-1}(U) \cap F$; поэтому $f(x) = g_i(x) \in U$. Так как g_{1-i} непрерывно и $x \le y$, имеем $f(x) = g_{1-i}(x) \le g_{1-i}(y)$, т. е. $g_{1-i}(y) \in U$, что и требовалось. $\square$

Первое утверждение предложения вытекает из утверждений 1–3. Последнее утверждение предложения вытекает из первого и включения $\mathsf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ (см. лемму 4). $\square$

Лемма 8. *Пусть $\mathbb{X} \le \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0-пространств и H — I-система. Если $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} \le \mathbb{Y}$ является u-расширением.*

Доказательство. Пусть множества $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ и $V_0, V_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$ таковы, что $V_0 \cap X = V_1 \cap X = U$. Рассмотрим отображения $f_i\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{S}$, $i < 2$, определенные по правилу:

$$f_i = \begin{cases} \top, & \text{если } y \in V_i, \\ \bot, & \text{если } y \notin V_i. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{S}$ обозначает, как обычно, пространство Серпинского. Очевидно, что отображения f_0 и f_1 непрерывны и $f_0|_{\mathbb{X}} = f_1|_{\mathbb{X}}$. Так как $\mathbb{S}$ является очевидным образом собранным, $\mathbb{S}$ является также H-собранным. Таким образом, $f_0 = f_1$ и $V_0 = V_1$. Требуемое утверждение вытекает из [3, теорема 5.2.2]. $\square$

Лемма 9. *Пусть $\mathbb{X} \le \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0-пространств и H — I-система. Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если $\mathbb{X}$ является H-базисом для $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ является H-базисом для $\mathbb{Y}$, а $\mathbb{Y}$ является H-базисом для $\mathbb{Z}$.*

(ii) *$\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ — H^*-базис для $\mathbb{Y}$, а $\mathbb{Y}$ — H^*-базис для $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. (i) Предположим, что $\mathbb{X}$ — H-базис для $\mathbb{Z}$. Это означает, что для произвольного $y \in Y \subseteq Z$ существует подмножество $F \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$ такое, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} F = \downarrow_{\mathbb{Z}} y$. Тогда $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} F = \mathrm{cl}_{\mathbb{Z}} F \cap Y = \downarrow_{\mathbb{Z}} y \cap Y \cap Y = \downarrow_{\mathbb{Y}} y$, т. е. $\mathbb{X}$ — H-базис для $\mathbb{Y}$.

Если $z \in Z$, то существует $G \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$ такое, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} G = \downarrow_{\mathbb{Z}} z$. Так как $G = g(G) \in \mathsf{H}(\mathbb{Y})$, где $g\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $g = \mathrm{id}_{\mathbb{X}}$, является гомеоморфным вложением, заключаем, что $\mathbb{Y}$ является H-базисом для $\mathbb{Z}$ по определению.

(ii) Предположим сначала, что $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$, а $\mathbb{Y}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{W}$ — произвольное H-собранное пространство и отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{W}$ непрерывно. Существует единственное непрерывное отображение $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{W}$ такое, что $f = g|_{\mathbb{X}}$. Поскольку g непрерывно, а $\mathbb{Y}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$, существует единственное непрерывное отображение $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{W}$ такое, что $g = h|_{\mathbb{Y}}$. Имеем $f = h|_{\mathbb{X}}$. Единственность f следует из леммы 8 и [3, следствие 5.2.3]. Таким образом, $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$.

Пусть теперь $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$. Вновь рассмотрим H-собранное пространство $\mathbb{W}$ и непрерывное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{W}$. Существует единственное непрерывное отображение $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{W}$ такое, что $f = h|_{\mathbb{X}}$. Рассмотрим отображение $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{W}$, определенное по правилу $g = h|_{\mathbb{Y}}$; очевидно, что $f = g|_{\mathbb{X}}$. Единственность g вытекает вновь из леммы 8 и [3, следствие 5.2.3]. Таким образом, $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$

Наконец, докажем, что $\mathbb{Y}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$. Для этого рассмотрим произвольное непрерывное отображение $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{W}$. Тогда $f = g|_{\mathbb{X}}$ является непрерывным отображением из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Z}$. Так как $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$, существует единственное непрерывное отображение $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{W}$ такое, что $h|_{\mathbb{X}} = f$. Снова в силу леммы 8 и [3, следствие 5.2.3] получаем, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением. Таким образом, $h|_{\mathbb{Y}} = g$, и h — единственное непрерывное отображением с этим свойством. $\square$

4. Характеризация H-собранных пространств

Лемма 10. *Пусть $\mathbb{X}$ — топологическое T_0-пространство и H — I-система. Пусть также $S \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$ таково, что множество $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} S$ не имеет наибольшего элемента. Тогда существует одноэлементное расширение $\mathbb{Y} \geq \mathbb{X}$ такое, что $\mathbb{X}$ является H-базисом для $\mathbb{Y}$.*

Доказательство. Полагаем $Y = X \cup \{y\}$, где $y \notin X$. Для открытого множества $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ пусть

$$U' = \begin{cases} U, & \text{если } U \cap S = \varnothing, \\ U \cup \{y\}, & \text{если } U \cap S \neq \varnothing. \end{cases}$$

Так как H является I-системой, множество S неприводимо. Поэтому множество $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} S$ также неприводимо. Согласно [3, лемма 5.1.5] имеем $Y = X \cup \{y\}$, $S = \downarrow y \cap X$ и $Y = \mathrm{sob}_{\mathbb{Y}} X$. Отсюда следует требуемое заключение. $\square$

Следующий результат обобщает [3, теорема 5.3.2] на произвольную I-систему H (см. также работу Ю. Л. Ершова [10]).

Теорема 11. *Пусть H — I-система. Для T_0-пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.*

(i) *$\mathbb{X}$ H-собранно.*

(ii) *Если $\mathbb{Y}_0$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$, то каждое непрерывное отображение $f_0\colon \mathbb{Y}_0 \to \mathbb{X}$ имеет [единственное] продолжение до непрерывного отображения $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$.*

(iii) *Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.*

(iv) *Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.*

(v) *Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и $\mathbb{X}$ является H-базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.*

(vi) *$\mathbb{X}$ H^d-собранно.*

Доказательство. Тот факт, что (i) влечет (ii), вытекает непосредственно из определения 4.

Предположим, что выполнено (ii); пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, а $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$. По предположению существует непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ такое, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Без ограничения общности можно считать, что f действует из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{Y}$. Так как $f|_{\mathbb{X}} = \mathrm{id}_{\mathbb{X}}$, заключаем по определению 4, что $f = \mathrm{id}_{\mathbb{Y}}$. Отсюда следует, что $Y = f(Y) = X$, поэтому выполнено (iii).

Далее, (iii) влечет (iv) по предложению 7, а (iv) влечет (v) по лемме 4. Предположим, что выполнено (v). Если $\mathbb{X}$ не H-собранное пространство, то существует множество $S \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$ такое, что множество $\mathrm{cl}_{\mathbb{X}} S$ не имеет наибольшего элемента. В этом случае по лемме 10 существует собственное расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ такое, что $\mathbb{X}$ является H-базисом для $\mathbb{Y}$, что противоречит (v). Это противоречие показывает, что $\mathbb{X}$ является H-собранным пространством, поэтому (v) влечет (i).

Таким образом, утверждения (i)–(v) эквивалентны для произвольной I-системы. По лемме 4 H^d является I-системой. Следовательно, утверждения (iv) и (vi) эквивалентны в силу только что установленного. Доказательство завершено. $\square$

Замечание 2. Эквивалентность условий (i) и (vi) теоремы 11 была установлена Сю в [4, предложение 4.23].

5. Основные свойства H-собранных пространств

Следующее утверждение имеет довольно простое доказательство (см. [4, предложение 4.26], а также [14, лемма 11]).

Лемма 12. *Пусть* H *является системой подмножеств* [I*-системой соответственно*]. *Если* $\mathbb{X}$ *является ретрактом* H*-собранного пространства* $\mathbb{Y}$, *то* X *также* H*-собранно.*

Лемма 13. *Пусть* $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ — *расширение топологических* T_0*-пространств и* H — I*-система. Если* $\mathbb{Y}$ *является* H*-собранным и* $\mathbb{X} = \operatorname{sob}_{\mathbb{Y}} X$, *то* $\mathbb{X}$ *также* H*-собранно.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}_0$ — H^*-базис для $\mathbb{Z}$ и отображение $f_0\colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{X}$ непрерывно. Можно предполагать, что f_0 действует из $\mathbb{Z}_0$ в $\mathbb{Y}$. Поскольку $\mathbb{Y}$ является H-собранным пространством, существует единственное непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}$ такое, что $f|_{\mathbb{Z}_0} = f_0$. В силу леммы 8 и [3, лемма 5.2.2(iii)] имеем $Z = \operatorname{sob}_{\mathbb{Z}} Z_0$, откуда получаем

$$f(Z) = f(\operatorname{sob}_{\mathbb{Z}} Z_0) \subseteq \operatorname{sob}_{\mathbb{Y}} f(Z_0) = \operatorname{sob}_{\mathbb{Y}} f_0(Z_0) \subseteq \operatorname{sob}_{\mathbb{Y}} X = X.$$

Требуемое утверждение следует из теоремы 11(ii). $\square$

Лемма 14. *Пусть* $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, *являются* T_0*-пространствами и* $\mathbb{X} = \prod\limits_{i\in I} \mathbb{X}_i$. *Зафиксируем* $i \in I$ *и* $a \in X$ *и рассмотрим отображение* $\rho_i\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, *определенное по правилу*

$$\pi_j \rho_i(x) = \begin{cases} \pi_i(x), & \text{если } j = i, \\ \pi_j(a), & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Тогда

(i) ρ_i *является ретракцией;*

(ii) $\mathbb{X}_i \cong \rho_i(\mathbb{X})$.

Доказательство. (i) Непосредственно видно, что $\rho_i^2 = \rho_i$. Более того, для каждого $j \in I$ и каждого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_j)$ имеем

$$\rho_i^{-1}(V_{U,j}) = \begin{cases} V_{U,j} \in \mathscr{T}(\mathbb{X}), & \text{если } j = i, \\ \varnothing \in \mathscr{T}(\mathbb{X}), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \notin U, \\ X \in \mathscr{T}(\mathbb{X}), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \in U, \end{cases}$$

где $V_{U,j} = \{y \in X \mid \pi_j(y) \in U\}$ является предбазисным открытым множеством топологии $\mathscr{T}(\mathbb{X})$, определенным по j и U. Следовательно, ρ_i непрерывно.

(ii) Рассмотрим отображение

$$g\colon \rho_i(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}_i; \quad g\colon \rho_i(x) \mapsto \pi_i(x).$$

Очевидно, что g взаимно однозначно и «на». Более того, для любого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_i)$ имеем $g^{-1}(U) = V_{U,i} \cap \rho_i(\mathbb{X})$, поэтому g непрерывно. Далее, для каждого $j \in I$ и каждого $W \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_j)$ имеем

$$g(V_{W,j} \cap \rho_i(\mathbb{X})) = \begin{cases} W \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_i), & \text{если } j = i, \\ \varnothing \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_i), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \notin W, \\ X_i \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_i), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \in W, \end{cases}$$

поэтому g открыто, т. е. является гомеоморфизмом. $\square$

Лемма 15. *Пусть* H *является* I*-системой, и пусть* $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, *являются* T_0*-пространствами. Справедливы следующие утверждения.*

(i) $\mathbb{X} = \prod\limits_{i \in I} \mathbb{X}_i$ H*-собранно тогда и только тогда, когда* $\mathbb{X}_i$ H*-собранно для всех* $i \in I$.

(ii) *Если* $\Lambda = \langle I, \mathbb{X}_i, f_{ij} \rangle$ *— обратный спектр* H*-собранных пространств и* $\mathbb{X} = \varprojlim \Lambda$, *то* $\mathbb{X}$ H*-собранно.*

Доказательство. (i) Предположим, что $\mathbb{X}$ является H-собранным пространством. Для каждого $i \in I$ пространство $\mathbb{X}_i$ гомеоморфно ретракту пространства $\mathbb{X}$ по лемме 14, поэтому $\mathbb{X}_i$ H-собранно по лемме 12. Предположим, что $\mathbb{X}_i$ является H-собранным пространством для всех $i \in I$. Пусть $\mathbb{Y}_0$ — H^*-базис для $\mathbb{Y}$, а отображение $f_0\colon \mathbb{Y}_0 \to \prod\limits_{i \in I} \mathbb{X}_i$ непрерывно. Тогда $\pi_i f_0\colon \mathbb{Y}_0 \to \mathbb{X}_i$ непрерывно для каждого $i \in I$, где π_i обозначает каноническую проекцию. Так как $\mathbb{X}_i$ H-собранно для каждого $i \in I$, для любого $i \in I$ существует единственное непрерывное отображение $f_i\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}_i$ такое, что $f_i|_{\mathbb{Y}_0} = \pi_i f_0$. Далее, согласно [3, лемма 1.6.1] существует непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Y} \to \prod\limits_{i \in I} \mathbb{X}_i$ такое, что $\pi_i f = f_i$. Очевидно, что $\pi_i f(y) = f_i(y) = \pi_i f_0(y)$ для каждого $y \in \mathbb{Y}_0$, $i \in I$, откуда $f|_{\mathbb{Y}_0} = f_0$. Таким образом, $\prod\limits_{i \in I} \mathbb{X}_i$ является H-собранным по теореме 11.

(ii) Пусть $\mathbb{Y}_0$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$ и отображение $g_0\colon \mathbb{Y}_0 \to \mathbb{X}$ непрерывно. Согласно [3, лемма 2.1.1(i)] получаем, что $\pi_i g_0\colon \mathbb{Y}_0 \to \mathbb{X}_i$ непрерывно для каждого $i \in I$. Более того, $\pi_i g_0 = \pi_{ij}\pi_j g_0$, как только $i \leqslant j$ в I. Поскольку $\mathbb{X}_i$ является H-собранным пространством для всех $i \in I$, заключаем, что для каждого $i \in I$ существует единственное непрерывное отображение $f_i\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}_i$ такое, что $f_i|_{\mathbb{Y}_0} = \pi_i g_0 = \pi_{ij}\pi_j g_0 = \pi_{ij} f_j|_{\mathbb{Y}_0}$. По лемме 8 $\mathbb{Y}_0 \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением. Таким образом, $f_i = \pi_{ij} f_j$, как только $i \leqslant j$ в I. Применяя [3, лемма 2.1.1(ii)], получаем, что существует (единственное) непрерывное отображение $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ такое, что $\pi_i g = f_i$ для всех $i \in I$. Тогда $\pi_i g(y) = f_i(y) = \pi_i g_0(y)$ для каждого $y \in Y_0$, поэтому $g|_{\mathbb{Y}_0} = g_0$ и $\mathbb{X}$ H-собранно по теореме 11. $\square$

6. H-собрификации и H-пополнения

Определение 5. T_0-пространство $\mathbb{Z}$ называется H-*собрификацией* T_0-пространства $\mathbb{X}$, если $\mathbb{Z}$ H-собранно и существует гомеоморфное вложение $\lambda_{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ такое, что $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$.

Непосредственно из определения 5 вытекает

Лемма 16. H*-собрификация топологического* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *единственна с точностью до гомеоморфизма.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{Y}_0$ и $\mathbb{Y}_1$ — две H-собрификации пространства $\mathbb{X}$, и пусть $\lambda_i\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}_i$, где $i < 2$, — два соответствующих гомеоморфных вложения, удовлетворяющих условиям определения 5. Так как $\lambda_i(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}_i$, а пространство $\mathbb{Y}_{i-1}$ H-собранно для каждого $i < 2$, существует единственное непрерывное отображение $f_i\colon \mathbb{Y}_i \to \mathbb{Y}_{i-1}$ такое, что $f_i|_{\lambda_i(\mathbb{X})} = \lambda_{i-1}\lambda_i^{-1}$. Таким образом, $\lambda_i = f_{i-1}\lambda_{i-1} = f_{i-1}f_i\lambda_i$, откуда $\mathrm{id}_{\mathbb{Y}_i}|_{\lambda_i(\mathbb{X})} = f_{1-i}f_i|_{\lambda_i(\mathbb{X})}$. Поскольку $\lambda_i(\mathbb{X}) \leq \mathbb{Y}_i$ является u-расширением по лемме 8, получаем, что $f_{i-1}f_i = \mathrm{id}_{\mathbb{Y}_i}$ для всех $i < 2$. Таким образом, f_i является гомеоморфизмом для каждого $i < 2$. $\square$

Для топологического пространства $\mathbb{X}$ обозначим через $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ его (единственную с точностью до гомеоморфизма) H-собрификацию. Как показывает следующая теорема, H-собрификации существуют для произвольных I-систем H.

Теорема 17. *Пусть* H *является I-системой. Для каждого T_0-пространства* $\mathbb{X}$ *существует его* H*-собрификация* $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$.

Доказательство. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathsf{H}(\mathbb{X})$ следующим образом. Полагаем для всех $F_0, F_1 \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$:

$F_0 \sim F_1$ тогда и только тогда, когда

$$F_0 \cap U \neq \varnothing \text{ равносильно } F_1 \cap U \neq \varnothing \text{ для всех } U \in \mathscr{T}(\mathbb{X}).$$

Полагаем также

$$[F] = \{F' \in \mathsf{H}(\mathbb{X}) \mid F' \sim F\}, \text{ где } F \in \mathsf{H}(\mathbb{X}); \quad H(\mathbb{X}) = \{[F] \mid F \in \mathsf{H}(\mathbb{X})\};$$
$$U^* = \{[F] \in H(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \varnothing\}, \text{ где } U \in \mathscr{T}(\mathbb{X}); \quad \mathscr{T}^*_{\mathbb{X}} = \{U^* \mid U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})\}.$$

В дальнейшем будем писать для краткости $\mathscr{T}^*$ вместо $\mathscr{T}^*_{\mathbb{X}}$, если это не вызывает недоразумений.

Утверждение 1. $\mathbb{H}(\mathbb{X}) = \langle H(\mathbb{X}), \mathscr{T}^*_{\mathbb{X}}\rangle$ *является топологическим T_0-пространством.*

Доказательство. Отметим, что

$$\varnothing = \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap \varnothing \neq \varnothing\} = \varnothing^* \in \mathscr{T}^*,$$
$$H(\mathbb{X}) = \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap X \neq \varnothing\} = X^* \in \mathscr{T}^*.$$

Пусть $U_0, U_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$; имеем

$$\begin{aligned} U_0^* \cap U_1^* &= \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap U_0 \neq \varnothing \text{ и } H \cap U_1 \neq \varnothing\} \\ &= \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap (U_0 \cap U_1) \neq \varnothing\} = (U_0 \cap U_1)^* \in \mathscr{T}^*, \end{aligned}$$

так как $H \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$, а H является I-системой. Далее, пусть $U_i \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ для всех $i \in I$; тогда

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in I} U_i^* &= \Big\{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap \bigcup_{i\in I} U_i \neq \varnothing\Big\} \\ &= \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap U_i \neq \varnothing \text{ для некоторого } i \in I\} \\ &= \bigcup_{i\in I}\{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap U_i \neq \varnothing\} = \Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big)^* \in \mathscr{T}^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathscr{T}^*$ является топологией на $H(\mathbb{X})$. Более того, $\mathscr{T}^*$ T_0-отделимо по определению, а также в силу того, что $\mathsf{S}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}(\mathbb{X})$. $\square$

Рассмотрим следующее отображение:

$$\lambda_{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{H}(\mathbb{X}), \quad \lambda\colon x \mapsto [\{x\}].$$

Поскольку $x \in \mathsf{S}(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}(\mathbb{X})$ для всех $x \in X$, отображение $\lambda_{\mathbb{X}}$ определено корректно. Пишем далее для краткости λ вместо $\lambda_{\mathbb{X}}$, когда не возникает путаницы.

Утверждение 2. *λ является гомеоморфным вложением.*

Доказательство. Так как $\mathbb{X}$ является T_0-пространством, равенство $[\{x_0\}] = [\{x_1\}]$ влечет равенство $x_0 = x_1$ для всех $x_0, x_1 \in X$. Таким образом, λ разнозначно. Более того, для произвольного $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ имеем

$$\lambda(U) = \{[\{x\}] \mid x \in U\} = U^* \cap \lambda(X) \in \mathscr{T}^*,$$

$$\lambda^{-1}(U^*) = \{x \in X \mid [\{x\}] \in U^*\} = U \in \mathscr{T},$$

откуда следует, что λ открыто и непрерывно. $\square$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda(\mathbb{X})$ является подпространством в $\mathbb{H}(\mathbb{X})$.

Утверждение 3. *$\lambda(\mathbb{X})$ является H-базисом для $\mathbb{H}(\mathbb{X})$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $F \in \mathsf{H}(\mathbb{X})$. По утверждению 2 $\lambda(F) = \{[\{x\}] \mid x \in F\} \in \mathsf{H}(\mathbb{H}(\mathbb{X}))$. Поэтому достаточно показать, что $\mathrm{cl}\,\lambda(F) = \downarrow [F]$. Если $[F] \in U^*$ для некоторого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$, то существует $x \in F \cap U$, откуда $[\{x\}] \in U^* \cap \lambda(F)$. Это означает, что $[F] \in \mathrm{cl}\,\lambda(F)$ и $\downarrow [F] \subseteq \mathrm{cl}\,\lambda(F)$. С другой стороны, если $[\{x\}] \in U^*$ для некоторых $x \in F$ и $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$, то $x \in F \cap U \neq \varnothing$. Таким образом, $[F] \in U^*$ и $[\{x\}] \leq [F]$, откуда следуют включения $\lambda(F) \subseteq \downarrow [F]$ и $\mathrm{cl}\,\lambda(F) \subseteq \downarrow [F]$. $\square$

Построим трансфинитную последовательность расширений $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\alpha$, где α пробегает все ординалы, следующим образом. Полагаем

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_0 &= \mathbb{X}, \\ \mathbb{X}_{\alpha+1} &= \mathbb{H}(\mathbb{X}_\alpha) \text{ для всех ординалов } \alpha, \\ \mathbb{X}_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{X}_\beta \ \alpha \text{ является предельным ординалом.} \end{aligned}$$

Для всех $\beta \leqslant \alpha$ пространство $\mathbb{X}_\beta$ является таким образом подпространством в $\mathbb{X}_\alpha$; пусть $e_{\beta\alpha}\colon \mathbb{X}_\beta \to \mathbb{X}_\alpha$ обозначает соответствующее вложение, которое является, конечно, гомеоморфным вложением.

Утверждение 4. *Для всех $\beta \leqslant \gamma$ пространство $\mathbb{X}_\beta$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\gamma$. В частности, $\mathbb{X}_\beta \leq \mathbb{X}_\gamma$ является u-расширением.*

Доказательство. Докажем сначала индукцией по γ, что $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0$ — H^*-базис для $\mathbb{X}_\gamma$. Действительно, если $\gamma = 0$, то требуемое утверждение тривиально. Предположим поэтому, что $\gamma > 0$ и $\mathbb{X}$ — H^*-базис для $\mathbb{X}_\alpha$ при всех $\alpha < \gamma$. По лемме 8 отсюда следует, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\alpha$ — u-расширение для всех $\alpha < \gamma$.

Если $\gamma = \alpha + 1$ для некоторого α, то $\mathbb{X}_\gamma = \mathbb{H}(\mathbb{X}_\alpha)$. По индукционному предположению получаем, что $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\alpha$. Из утверждения 3 и предложения 7 следует, что $\mathbb{X}_\alpha$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\gamma$. Таким образом, $\mathbb{X}$ — H^*-базис для $\mathbb{X}_\gamma$ по лемме 9(ii).

Предположим теперь, что γ является предельным ординалом; в этом случае $\mathbb{X}_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathbb{X}_\alpha$. Пусть $\mathbb{Y}$ — H-собранное пространство и отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно. Применяя индукционное предположение, получаем, что для любого $\alpha < \gamma$ существует непрерывное отображение $f_\alpha\colon \mathbb{X}_\alpha \to \mathbb{Y}$ такое, что $f_\alpha|_{\mathbb{X}} = f$. Так как $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\delta$ является u-расширением для всех $\delta < \gamma$, а $(f_\alpha|_{\mathbb{X}_\delta})|_{\mathbb{X}} = f_\alpha|_{\mathbb{X}} = f = f_\delta|_{\mathbb{X}}$ для всех $\delta \leqslant \alpha < \gamma$, заключаем, что $f_\alpha|_{\mathbb{X}_\delta} = f_\delta$ для всех

$\delta \leqslant \alpha < \gamma$. Таким образом, корректно определение следующего отображения. Для всех $x \in X_\gamma$ полагаем:

$$g(x) = f_\alpha(x), \quad \text{как только } x \in X_\alpha.$$

Для каждого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$ имеем $g^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} f_\alpha^{-1}(U) \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_\gamma)$, поскольку отображение $f_\alpha: \mathbb{X}_\alpha \to \mathbb{Y}$ непрерывно для всех $\alpha < \gamma$. Таким образом, отображение $g: \mathbb{X}_\gamma \to \mathbb{Y}$ также непрерывно. Более того, $g|_\mathbb{X} = f$. Пусть $h: \mathbb{X}_\gamma \to \mathbb{Y}$ — такое непрерывное отображение, что $h|_\mathbb{X} = f$. Для $\alpha < \gamma$ полагаем $h_\alpha = h|_{\mathbb{X}_\alpha}$. Тогда для любого $\alpha < \gamma$ отображение $h_\alpha: \mathbb{X}_\gamma \to \mathbb{Y}$ непрерывно и $h_\alpha|_\mathbb{X} = h|_\mathbb{X} = f$. Так как $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\alpha$, заключаем, что $h_\alpha = f_\alpha = g|_{\mathbb{X}_\alpha}$ для всех $\alpha < \gamma$. Поскольку $X_\gamma = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} X_\alpha$, получаем, что $h = g$, а $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\gamma$ в этом случае.

Таким образом, $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\gamma$ для всех ординалов γ. Применяя лемму 9(ii), получаем, что $\mathbb{X}_\beta$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\gamma$ для всех ординалов $\beta \leqslant \gamma$. Второе утверждение следует таким образом из леммы 8. □

Очевидно, что пространство Серпинского $\mathbb{S}$ собранно, поэтому $\mathbb{S}$ H-собранно. Таким образом, любая декартова степень пространства $\mathbb{S}$ H-собранна по лемме 15(i). Следовательно, ввиду [3, предложение 1.6.2] существует H-собранное пространство $\mathbb{Y}$ такое, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$. Согласно утверждению 4 для каждого ординала α существует непрерывное отображение $f_\alpha: \mathbb{X}_\alpha \to \mathbb{Y}$ такое, что $f_\alpha|_\mathbb{X} = \mathrm{id}_\mathbb{X}$. Согласно утверждению 4 $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\alpha$ является u-расширением, а потому и существенным расширением ввиду [3, следствие 10.2.7]. Поскольку $\mathrm{id}_\mathbb{X}$ является гомеоморфным вложением $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, делаем вывод, что f_α является гомеоморфным вложением для всех α. Отсюда, в частности, вытекает, что $|X_\alpha| \leq |Y|$ для всех α.

Выберем произвольный ординал $\kappa > |Y|$. Если $X_\alpha \subset X_{\alpha+1}$ для всех $\alpha < \kappa$, то для любого $\alpha < \kappa$ существует элемент $g(\alpha) \in X_{\alpha+1} \backslash X_\alpha$. Поэтому отображение $g: \kappa \to X_\kappa$ разнозначно, что противоречит неравенству $\kappa > |Y| \geqslant |X_\kappa|$. Это противоречие показывает, что существует ординал $\alpha < \kappa$ такой, что $X_{\alpha+1} = X_\alpha$. Согласно построению для любого $G \in \mathsf{H}(\mathbb{X}_\alpha)$ существует $x \in X_\alpha$ такой, что $[G] = [\{x\}]$.

Докажем, что $\mathrm{cl}\, G = \downarrow x$ в $\mathbb{X}_\alpha$. Действительно, поскольку $G \sim \{x\}$, делаем вывод, что $x \in \mathrm{cl}\, G$ и $\downarrow x \subseteq \mathrm{cl}\, G$. Предположим, что $y \in \mathrm{cl}\, G$ и $y \in U \in \mathscr{T}(\mathbb{X}_\alpha)$. Это означает, что $G \cap U \neq \varnothing$, поэтому $x \in U$ в силу того, что $G \sim \{x\}$. Следовательно, $y \leq x$ и $\mathrm{cl}\, G \subseteq \downarrow x$, откуда вытекает требуемое равенство $\mathrm{cl}\, G = \downarrow x$. Это равенство означает, что $\mathbb{X}_\alpha$ является H-собранным пространством. Поскольку $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{X}_\alpha$ по утверждению 4, из леммы 16 получаем, что $\mathbb{X}_\alpha \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, что и требовалось показать. □

Замечание 3. В доказательстве теоремы 17 была использована конструкция из работы Ю. Л. Ершова [8], которая позволила установить существование d-пополнений топологических T_0-пространств (см. также [3, теорема 8.2.6]). Позже похожая конструкция была использована Ю. Л. Ершовым в [13, теорема 4.3] при нахождении достаточных условий существования $\mathbf{K}$-пополнений T_0-пространств для широких категорий $\mathbf{K}$.

Альтернативным образом наша теорема 17 может быть получена из этого результата Ю. Л. Ершова (см. [13, теорема 4.3]). Не давая точных определений, отметим следующее. Пусть H является I-системой и $\mathbf{H}$ — полная подкатегория категории $\mathbf{Top}_0$ топологических T_0-пространств с непрерывными отображениями, объектами которой являются в точности все H-собранные пространства. Ясно, что $\mathbf{H}$ является широкой категорией. Тогда ковариантный функтор $\mathsf{F}\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Top}_0$ такой, что $\mathsf{F}(\mathbb{X}) = \mathbb{H}(\mathbb{X})$ для каждого T_0-пространства $\mathbb{X}$ и

$$\mathsf{F}(f)\colon \mathbb{H}(\mathbb{X}) \to \mathbb{H}(\mathbb{Y}); \quad \mathsf{F}(f)\colon [G] \to [f(G)]$$

для каждого непрерывного отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, где $\mathbb{H}(\mathbb{X})$ определено в доказательстве теоремы 17, вместе с естественным преобразованием λ образует обильное $\mathbf{H}$-предпополнение (F, λ) (см. следствие19 ниже). Доказательство этого факта вытекает из доказательства теоремы 17. По теореме 4.3 из [13] существуют $\mathbf{K}$-пополнения T_0-пространств, которые и являются их H-собрификациями.

Определение 6. Пусть H — I-система. Следуя Ю. Л. Ершову [11], H-*рангом* топологического пространства $\mathbb{X}$ будем называть наименьший ординал κ такой, что пространство $\mathbb{X}_\kappa$, построенное в доказательстве теоремы 17, H-собранно.

Из следствия 2 и теоремы 17 получаем

Следствие 18. *Пусть H является одной из I-систем из множества*

$$\{\mathsf{D}, \mathsf{D}^b, \mathsf{WF}, \mathsf{WF}^b, \mathsf{R}, \mathsf{R}^b, \mathsf{I}, \mathsf{I}^b\}.$$

Тогда каждое T_0-пространство обладает H-собрификацией.

Замечание 4. Для $\mathsf{H} = \mathsf{I}$ утверждение следствия 18 является классическим результатом (см. например [3, теорема 5.5.1]). Для $\mathsf{H} = \mathsf{D}$ утверждение следствия 18 установлено в [8] (см. также [3, теорема 8.2.6]). Для $\mathsf{H} = \mathsf{D}^b$ утверждение следствия 18 установлено в [12, теорема 8.4]. Для $\mathsf{H} = \mathsf{WF}$ утверждение следствия 18 установлено в [5, теорема 3.5].

Следующее утверждение обобщает [3, следствие 8.1.8].

Следствие 19. *Если $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ являются T_0-пространствами, а отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно, то существует единственное непрерывное отображение $\mathbb{H}(f)\colon \mathbb{H}(\mathbb{X}) \to \mathbb{H}(\mathbb{Y})$ такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Y} \\ {\scriptstyle\lambda_{\mathbb{X}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_{\mathbb{Y}}} \\ \mathbb{H}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\mathbb{H}(f)} & \mathbb{H}(\mathbb{Y}) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Как в доказательстве [3, следствие 8.1.8], полагаем

$$\mathbb{H}(f)\colon \mathbb{H}(\mathbb{X}) \to \mathbb{H}(\mathbb{Y}); \quad \mathbb{H}(f)\colon [S] \mapsto [f(S)].$$

Видно, что отображение $\mathbb{H}(f)$ определено корректно. Далее, для каждого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(f)^{-1}(U^*) &= \{[S] \in H(\mathbb{X}) \mid f(S) \cap U \neq \varnothing\} = \{[S] \in H(\mathbb{X}) \mid S \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing\} \\ &= f^{-1}(U) \in \mathscr{T}^*_{\mathbb{X}}, \end{aligned}$$

т. е. отображение $\mathbb{H}(f)$ непрерывно. Более того, для всех $x \in X$

$$\lambda_{\mathbb{Y}} f(x) = [\{f(x)\}] = \mathbb{H}(f)([x]) = \mathbb{H}(f)\lambda_{\mathbb{X}}(x),$$

т. е. диаграмма коммутативна. Наконец, пусть непрерывное отображение $f'\colon \mathbb{H}(\mathbb{X}) \to \mathbb{H}(\mathbb{Y})$ таково, что $f'\lambda_{\mathbb{X}}(x) = \lambda_{\mathbb{Y}} f(x) = \mathbb{H}(f)\lambda_{\mathbb{X}}(x)$ для всех $x \in X$. Тогда f' и $\mathbb{H}(f)$ совпадают на множестве $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$. По утверждению 3 из доказательства теоремы 17 $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является H-базисом для $\mathbb{H}(\mathbb{X})$. По предложению 7 и лемме 8 $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}(\mathbb{X})$ является u-расширением. Таким образом, $f' = \mathbb{H}(f)$, и доказательство завершено. □

Следующий результат обобщает [3, теорема 5.6.3] на произвольную I-систему H.

Теорема 20. *Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ — расширение топологических T_0-пространств и H — I-система. Тогда $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$ тогда и только тогда, когда существует гомеоморфное вложение $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ такое, что $f|_{\mathbb{X}} = \lambda_{\mathbb{X}}$.*

Доказательство. Предположим, что $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ является гомеоморфным вложением с условием $f|_{\mathbb{X}} = \lambda_{\mathbb{X}}$. Так как $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, по лемме 9 $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $f(\mathbb{Y})$. Тогда $\mathbb{X}$ — H^*-базис для $\mathbb{Y}$ по лемме 6.

Предположим теперь, что $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$. Так как $\lambda_{\mathbb{X}}$ вкладывает $\mathbb{X}$ в $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, существует непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ такое, что $f|_{\mathbb{X}} = \lambda_{\mathbb{X}}$. Поскольку $\lambda_{\mathbb{Y}}\colon \mathbb{Y} \to \lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})$ является гомеоморфизмом, отображение $f\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}\colon \lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y}) \to \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ непрерывно. Так как $\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})$ является H^*-базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$, существует непрерывное отображение $g\colon \mathbb{H}_S(\mathbb{Y}) \to \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ такое, что $g|_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})} = f\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}$.

Далее, поскольку $\lambda_{\mathbb{Y}}|_{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$ является гомеоморфным вложением, получаем, что отображение $\lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}\colon \lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$ непрерывно. Поскольку $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, существует непрерывное отображение $h\colon \mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \to \mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$ такое, что $h|_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})} = \lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}$.

Покажем, что g и h являются гомеоморфизмами. Достаточно установить, что они взаимно обратны. Для этого рассмотрим произвольный элемент $x \in X$. Тогда

$$gh\lambda_{\mathbb{X}}(x) = g\lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}\lambda_{\mathbb{X}}(x) = g\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = f\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = f(x) = \lambda_{\mathbb{X}}(x),$$

что означает, что $gh|_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})} = \mathrm{id}_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})} = \mathrm{id}_{\mathbb{H}_S(\mathbb{X})}|_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})}$. Поскольку $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, по лемме 8 получаем, что $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ является u-расширением, откуда следует равенство $gh = \mathrm{id}_{\mathbb{H}(\mathbb{X})}$. С другой стороны,

$$hg\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = hf\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = hf(x) = h\lambda_{\mathbb{X}}(x) = \lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}\lambda_{\mathbb{X}}(x) = \lambda_{\mathbb{Y}}(x),$$

откуда следуют равенства $hg|_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X})} = \mathrm{id}_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X})} = \mathrm{id}_{\mathbb{H}_S(\mathbb{Y})}|_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X})}$. Принимая во внимание, что $\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$, по лемме 8 получаем, что $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ является u-расширением и, таким образом, $hg = \mathrm{id}_{\mathbb{H}_S(\mathbb{Y})}$. Следовательно, f и g являются гомеоморфизмами, т. е. $f = g\lambda_{\mathbb{Y}}$ является гомеоморфным вложением. □

Из доказательства теоремы 20 вытекает

Следствие 21. *Если $\mathbb{X}$ — H^*-базис для $\mathbb{Y}$, то $\mathsf{H}(\mathbb{X}) \cong \mathsf{H}(\mathbb{Y})$.*

Для T_0-пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующую конструкцию из работы Сю [4].

$$S_H(\mathbb{X}) = \{F \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X}) \mid \mathrm{cl}_{\mathbb{X}} F = F \neq \varnothing\},$$
$$U^* = \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \varnothing\}, \quad \text{где } U \in \mathscr{T}(\mathbb{X}),$$
$$\mathscr{T}_H^*(\mathbb{X}) = \{U^* \mid U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})\}, \quad \mathbb{S}_H(\mathbb{X}) = \langle S_H(\mathbb{X}), \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X})\rangle.$$

Следующая теорема была установлена Сю [4]. Мы дадим здесь независимое доказательство этого утверждения, поскольку в дальнейшем будем делать ссылки на ту или иную часть нашего доказательства. Доказательство, представленное здесь, обобщает доказательство для [3, теорема 5.5.1] (см. также [17]).

Теорема 22 [4, теорема 7.14]. *Пусть* H *является* I*-системой. Для любого* T_0*-пространства* $\mathbb{X}$ *пространство* $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* H*-собрификацией для* $\mathbb{X}$*; другими словами,* $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$.

Доказательство. Требуемое утверждение будет следовать из утверждений, доказанных ниже.

Утверждение 1. $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* T_0*-пространством.*

Доказательство. Установим, что $\mathscr{T}_H^*(\mathbb{X})$ является T_0-отделимой топологией. Действительно,

$$\varnothing = \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap \varnothing \neq \varnothing\} = \varnothing^* \in \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X}),$$

$$S_H(\mathbb{X}) = \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap X \neq \varnothing\} = X^* \in \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X}).$$

Пусть теперь $U_0, U_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$; тогда

$$\begin{aligned} U_0^* \cap U_1^* &= \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap U_0 \neq \varnothing \text{ и } F \cap U_1 \neq \varnothing\} \\ &= \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap (U_0 \cap U_1) \neq \varnothing\} = (U_0 \cap U_1)^* \in \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X}), \end{aligned}$$

поскольку $F \in S_H(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{H}^d(\mathbb{X}) \subseteq \mathsf{I}(\mathbb{X})$ по лемме 4. Далее, пусть $U_i \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ для всех $i \in I$; тогда

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i^* &= \bigcup_{i \in I} \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap U_i \neq \varnothing\} \\ &= \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap U_i \neq \varnothing \text{ для некоторого } i \in I\} \\ &= \Big\{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap \bigcup_{i \in I} U_i \neq \varnothing\Big\} = \Big(\bigcup_{\nu} i \in IU_i\Big)^* \in \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathscr{T}_H^*(\mathbb{X})$ является топологией на $S_H(\mathbb{X})$. Если $F_0, F_1 \in S_H(\mathbb{X})$ таковы, что $F_0 \nsubseteq F_1$, то $F_0 \cap (X \backslash F_1) \neq \varnothing$. Поскольку множество F_1 замкнуто, заключаем, что $X \backslash F_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$, откуда $F_0 \in (X \backslash F_1)^* \in \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X})$. С другой стороны, поскольку $F_1 \cap (X \backslash F_1) = \varnothing$, получаем, что $F_1 \notin (X \backslash F_1)^*$. Таким образом, топология $\mathscr{T}_H(\mathbb{X})$ T_0-отделима. $\square$

Утверждение 2. *Для произвольных* $F_0, F_1 \in S_H(\mathbb{X})$ *имеем* $F_0 \leq_{\mathscr{T}_H^*(\mathbb{X})} F_1$ *в том и только том случае, когда* $F_0 \subseteq F_1$.

Доказательство. Действительно, предположим, что $F_0 \leq_{\mathscr{T}_H^*(\mathbb{X})} F_1$ и $x \in F_0$. Если $x \notin F_1$, то $x \in X \backslash F_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$, так как множество F замкнуто в $\mathbb{X}$. Отсюда следует, что $F_0 \cap (X \backslash F_1) \neq \varnothing$, поэтому $F_0 \in (X \backslash F_1)^* \in \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X})$. По определению порядка специализации получаем, что $F_1 \in (X \backslash F_1)^*$, поэтому $\varnothing \neq F_1 \cap (X \backslash F_1) = \varnothing$; противоречие. Это противоречие показывает, что $x \in F_1$ и, следовательно, $F_0 \subseteq F_1$. Обратная импликация очевидна. $\square$

Рассмотрим отображение

$$\iota_{\mathsf{H}} \colon \mathbb{X} \to \mathbb{S}_H(\mathbb{X}); \quad \iota_{\mathsf{H}} \colon x \mapsto \downarrow x.$$

Утверждение 3. ι_{H} *является гомеоморфным вложением.*

Доказательство. Покажем сначала, что ι_{H} определено корректно. Для этого нам требуется проверить, что $\downarrow x \in \mathsf{H}^d(\mathbb{X})$ для всех $x \in X$. Действительно, пусть $\mathbb{Y}$ является H-собранным пространством и отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно. Так как f сохраняет порядок специализации, имеем $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\downarrow x) \subseteq \downarrow f(x)$. С другой стороны, если $f(x) \in f(\downarrow x)$, то $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\downarrow x) = \downarrow f(x)$ и $\iota_{\mathsf{H}}(x) \in S_H(\mathbb{X})$.

Очевидно, что отображение ι_{H} разнозначно. Пусть $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$; тогда

$$\iota_{\mathsf{H}}(U) = \{\downarrow x \mid x \in U\} = \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \varnothing\} \cap \iota_{\mathsf{H}}(X) = U^* \cap \iota_{\mathsf{H}}(X),$$

$$\iota_{\mathsf{H}}^{-1}(U^*) = \{x \in X \mid \downarrow x \cap U \neq \varnothing\} = X \cap U = U \in \mathscr{T}(\mathbb{X}).$$

Это означает, что отображение ι_{H} открыто и непрерывно. $\square$

Утверждение 4. $\iota_{\mathsf{H}}(\mathbb{X})$ *является* H^d*-базисом для* $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $F \in S_H(\mathbb{X})$; тогда $\iota_{\mathsf{H}}(F) \in \mathsf{H}^d(\iota_{\mathsf{H}}(\mathbb{X}))$. Для всех $x \in F$ имеем $\iota_{\mathsf{H}}(x) = \downarrow x \subseteq F$, откуда $\iota_{\mathsf{H}}(x) \leq F$ в $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ по утверждению 2. Таким образом, $\iota_{\mathsf{H}}(x) \subseteq \downarrow_{\mathbb{S}_H(\mathbb{X})} F$. С другой стороны, если $F \in U^*$ для некоторого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$, то найдется элемент $x \in F \cap U$. Отсюда следует, что $\iota_{\mathsf{H}}(x) = \downarrow x \in U^*$. Поэтому $F \in \mathrm{cl}_{\mathbb{S}_H(\mathbb{X})} \iota_{\mathsf{H}}(F)$. $\square$

Утверждение 5. $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ *является* H^d*-собранным пространством.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество G в $\mathsf{H}^d(\mathbb{S}_H(\mathbb{X}))$. По лемме 5 $H = \mathrm{cl}_{\mathbb{S}_H(\mathbb{X})} G$ также принадлежит $\mathsf{H}^d(\mathbb{H}_S(\mathbb{X}))$. Так как множество H замкнуто в $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$, то $H = S_H(X)\backslash U^*$ для некоторого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$. Таким образом,

$$H = \mathrm{cl}_{\mathbb{S}_H(\mathbb{X})} G = \{A \in S_H(\mathbb{X}) \mid A \cap U = \varnothing\} = \{A \in S_H(\mathbb{X}) \mid A \subseteq X\backslash U = F\}.$$

Очевидно, множество F замкнуто в $\mathbb{X}$. Для доказательства включения $F \in S_H(\mathbb{X})$ остается установить, что $F \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$.

Действительно, пусть $\mathbb{Y}$ является H-собранным пространством и отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывно. Рассмотрим следующее отображение:

$$f^*\colon \mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \to \mathbb{Y}; \quad f^*(A) = y_A,$$

где $\downarrow y_A = \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(A)$. Отметим, что элемент y_A существует, поскольку $A \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$. Тот факт, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(\downarrow x) = \downarrow f(x)$, влечет равенство $f^*(\iota_{\mathsf{H}}(x)) = f^*(\downarrow x) = f(x)$. Более того, для произвольного открытого множества $U \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$ имеем

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}(U) &= \{A \in S_H(X) \mid f^*(A) \in U\}\\ &= \{A \in S_H(X) \mid y_A \in U\} = \{A \in S_H(X) \mid f(A) \cap U \neq \varnothing\}\\ &= \{A \in S_H(X) \mid A \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing\} = f^{-1}(U)^* \in \mathscr{T}_H^*(\mathbb{X}).\end{aligned}$$

Следовательно, отображение f^* непрерывно. Таким образом, $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f^*(G) = \downarrow y$ для некоторого $y \in Y$.

Покажем, что $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(F) = \downarrow y$. Пусть $a \in F$. Так как множество F замкнуто в $\mathbb{X}$, имеем $\downarrow a \subseteq F$, откуда $\downarrow a \in G$. Тогда

$$f(a) = f^*(\iota_{\mathsf{H}}(a)) = f^*(\downarrow a) \in f^*(G) \subseteq \downarrow y.$$

Следовательно, $f(F) \subseteq \downarrow y$ и $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(F) \subseteq \downarrow y$. Для доказательства обратного включения нужно доказать, что y является предельной точкой множества $f(F)$

в $\mathbb{Y}$. Действительно, пусть $V \in \mathscr{T}(\mathbb{Y})$ таково, что $y \in V$. Так как $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f^*(G) =\downarrow y$, то y является предельной точкой для множества $f^*(G)$. Поэтому существует $A \in G$ такое, что $f^*(A) \in V$. Отсюда следует, что $A \in (f^*)^{-1}(V) = U^*$ для некоторого $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$. Это означает, что $A \cap U \neq \varnothing$; пусть $a \in A \cap U$. Тогда $\downarrow a \cap U \neq \varnothing$, откуда вытекают равенства

$$\downarrow a \in U^* = (f^*)^{-1}(V), \quad f(a) = f^*(\downarrow a) \in V \cap f(F).$$

Таким образом, $y \in \mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(F)$, что и требовалось. Подводя итог, имеем $\mathrm{cl}_{\mathbb{Y}} f(F) =\downarrow y$, т. е. $F \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$ и $F \in S_H(\mathbb{X})$. $\square$

Из утверждения 4 и предложения 7 вытекает, что $\iota_{\mathsf{H}}(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Из утверждения 5 и теоремы 11 следует, что $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является H-собранным пространством. Это означает, что $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ является H-собрификацией для $\mathbb{X}$. $\square$

7. Характеризация H-собрификаций

Следующий результат обобщает [3, следствие 5.6.4] на произвольную I-систему H (см. также [10]).

Теорема 23. *Следующие утверждения равносильны для T_0-пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ и для I-системы H.*

(i) $\mathbb{Y}$ *является H-собрификацией для $\mathbb{X}$, т. е. $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$.*

(ii) $\mathbb{Y} \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$.

(iii) $\mathbb{Y}$ *является наибольшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$.*

(iv) $\mathbb{Y}$ *является наименьшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является H-собранным.*

(v) $\mathbb{Y}$ *является H^d-собрификацией для $\mathbb{X}$; т. е. $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}^d_S(\mathbb{X})$.*

(vi) $\mathbb{Y}$ *является наибольшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $(\mathsf{H}^d)^*$-базисом для $\mathbb{Y}$.*

(vii) $\mathbb{Y}$ *является наименьшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является H^d-собранным.*

(viii) $\mathbb{Y}$ *является наибольшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$.*

Доказательство. Равносильность утверждений (i) и (ii) следует из леммы 16 и теоремы 22. Утверждение (i) влечет утверждение (iii) по теореме 20.

Если $\mathbb{Y}$ является наибольшим расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{Y}$ является H-собранным пространством по лемме 9(ii) и теореме 11 (см. утверждения (i) и (iii) там). Следовательно, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ по определению 5 и лемме 16. Таким образом, утверждения (i) и (iii) также равносильны.

Предположим, что (i) выполняется, т. е. $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{X}$ является подпространством в $\mathbb{Y}$. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Z}$ такое расширение, что $\mathbb{Z}$ является H-собранным пространством. Так так $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$, существует непрерывное отображение $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ такое, что отображение $f_{\mathbb{X}}$ тождественно. В силу леммы 8 $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u-расширением. Следовательно, $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является существенным расширением ввиду [3, следствие 10.2.7]. Поскольку $f_{\mathbb{X}}$ — гомеоморфное вложение, f также гомеоморфное вложение. Поэтому $\mathbb{Y}$ гомеоморфно подпространству каждого H-собранного расширения пространства $\mathbb{X}$ и (iv) выполняется.

Предположим, что (iv) выполнено для $\mathbb{Y}$. Вновь без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{X}$ является подпространством в $\mathbb{Y}$. По теореме 17 (альтернативно, по теореме 22) $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ существует; без ограничения общности считаем, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Поскольку $\mathbb{Y}$ является наименьшим H-собранным расширением пространства $\mathbb{X}$, заключаем, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Так как $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, в силу леммы 9(ii) получаем, что $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$. Так как $\mathbb{Y}$ H-собранно, $\mathbb{Y}$ является H-собрификацией для $\mathbb{X}$ по определению 5. Таким образом, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ по лемме 16, и (iv) влечет (i). Поэтому утверждения (i)–(iv) равносильны.

Предположим, что выполнено (ii), другими словами, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Из утверждения 4 в доказательстве теоремы 22 и предложения 7 следует, что $\iota_{\mathsf{H}}(\mathbb{X})$ является $(\mathsf{H}^d)^*$-базисом для $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Следовательно, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является H^d-собрификацией для $\mathbb{X}$ по утверждению 5 из доказательства теоремы 22. Поэтому (ii) влечет (v). Обратно, если $\mathbb{Y}$ является H^d-собрификацией для $\mathbb{X}$, то пространство $\mathbb{Y}$ H^d-собранно и поэтому H-собранно по теореме 11. Более того, предполагая без ограничения общности, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, получаем, что $\mathbb{X}$ является $(\mathsf{H}^d)^*$-базисом для $\mathbb{Y}$, а потому и H^*-базисом для $\mathbb{Y}$ по определению 4 и теореме 11. Таким образом, $\mathbb{Y}$ является H-собрификацией для $\mathbb{X}$, и (v) влечет (i). Тем самым утверждения (i)–(v) равносильны.

По лемме 4 H^d является I-системой. Следовательно, равносильность утверждений (v)–(vii) следует из эквивалентности утверждений (i)–(iv) для I-системы H^d. Если $\mathbb{Y}$ является H-собрификацией для $\mathbb{X}$, то $\mathbb{Y} \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ в силу (ii), т. е. без ограничения общности $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$ по утверждению 4 из доказательства теоремы 22. Если $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для некоторого T_0-пространства $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Z}$ по предложению 7. По теореме 20 $\mathbb{Z}$ гомеоморфно некоторому подпространству в $\mathbb{Y}$, и (viii) выполнено. Таким образом, (i) влечет (viii). Предположим наконец, что (viii) выполняется; другими словами, $\mathbb{Y}$ является наибольшим расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{Y}$. По утверждению 4 из доказательства теоремы 22 $\mathbb{X}$ является H^d-базисом для $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$, поэтому можно предполагать, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \leq \mathbb{Y}$. Из предложения 7 получаем, что $\mathbb{X}$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$. Следовательно, $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является H^*-базисом для $\mathbb{Y}$ по лемме 9(ii). Пространство $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является H^d-собранным по утверждению 5 из доказательства теоремы 22. Таким образом, $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является H-собранным по теореме 11. Вновь применяя теорему 11, получаем, что $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$, и (ii) выполнено. Следовательно, (viii) влечет (ii).

Доказательство завершено. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Швидефски М. В.* Дуальность Стоуна для дистрибутивных ч.у. множеств // Алгебра и логика, принято к печати.
2. *Ершов Ю. Л., Швидефски М. В.* К спектральной теории частично упорядоченных множеств. II // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 572–586.
3. *Ершов Ю. Л.* Топология для дискретной математики. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2020.
4. *Xu X.* On H-sober spaces and H-sobrifications of T_0-spaces // Topol. Appl. 2021. V. 289. article no. 107548.
5. *Liu B., Li Q., Wu G.* Well-filterifications of topological spaces // Topol. Appl. 2020. V. 279. article no. 107245.
6. *Chen C., Xi X., Xu X., Zhao D.* On well-filtered reflections of T_0-spaces // Topol. Appl. 2019. V. 267. article no. 106869.

7. *Xu X., Chen C., Xi X., Zhao D.* On T_0-spaces determined by well-filtered spaces // Topol. Appl. 2020. V. 282. P. article no. 107323.

8. *Ershov Yu. L.* On d-spaces // Theoret. Comput. Sci. 1999. V. 224, N 1–2. P. 59–72.

9. *Ершов Ю. Л.* О d-ранге топологического пространства // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 2. С. 150–163.

10. *Ершов Ю. Л.* Сопредельные точки и u-расширения // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 4. С. 443–452.

11. *Ершов Ю. Л.* d-Ранг α-пространства не превосходит 1 // Алгебра и логика. 2020. Т. 58, № 6. С. 706–713.

12. *Keimel K., Lawson J. D.* D-completions and the d-topology // Ann. Pure Appl. Logic. 2009. V. 159, N 3. P. 292–306.

13. *Ершов Ю. Л.* K-пополнения T_0-пространств // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 3. С. 263–279.

14. *Ershov Yu. L., Schwidefsky M. V.* On function spaces. III // Lobachevskii J. Math. 2024. V. 45, N 4. P. 1493–1498.

15. *Ershov Yu. L., Schwidefsky M. V.* On function spaces. II // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 2. P. 815–834.

16. *Ershov Yu. L., Schwidefsky M. V.* On function spaces // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 999–1008.

17. *Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M. W., Scott D. S.* Continuous lattices and domains. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; V. 93).

18. *Goubault-Larrecq J.* Non-Hausdorff topology and domain theory: Selected topics in point-set topology. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. (New Math. Monogr.; V. 22).

Поступила в редакцию 15 апреля 2024 г.
После доработки 15 апреля 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Кудряшова Мария Игоревна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
m.kudryashova@g.nsu.ru

Швидефски Марина Владимировна (ORCID 0000-0003-4804-8073)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск 630090
m.schwidefsky@g.nsu.ru