Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2024. Том 65, № 3

УДК 512.542

О РЕГУЛЯРНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ $\mathrm{Lim}(N)$

Н. М. Сучков, А. А. Шлепкин

Аннотация. Пусть G — группа всех ограниченных подстановок множества натуральных чисел N. Доказано, что каждая счетная локально конечная группа изоморфна некоторой регулярной подгруппе группы G, а если регулярная подгруппа H группы G содержит элемент бесконечного порядка, то H содержит нормальную бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.312

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, локально конечная группа, регулярная группа подстановок.

1. Введение

Пусть N — множество всех натуральных чисел.

Определение 1. Подстановка g множества N называется *ограниченной*, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Множество $G = \mathrm{Lim}(N)$ всех ограниченных подстановок множества N образует подгруппу группы $S(N)$ всех подстановок множества N.

Подстановки группы $S(N)$ с конечными носителями образуют локально конечную группу $\mathrm{Fin}(N)$. В монографии Д. А. Супруненко [1] поставлена общая задача изучения подгрупп этой группы. В [2] доказано, что $\mathrm{Fin}(N)$ не содержит квазициклических p — подгрупп при любом простом p.

Определение 2. Произвольная группа называется *ограниченной*, если она изоморфна подгруппе группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.

Известно (см. [3]), что ограниченными являются, например, счетная свободная группа, 2-группа Алешина, счетная свободная абелева группа.

Определение 3. Группа H подстановок множества Ω называется *регулярной*, если она транзитивна на Ω и

$$\mathrm{supp}(x) = \{\alpha \mid \alpha \in \Omega,\ \alpha^x \neq \alpha\} = \Omega$$

для любой неединичной подстановки $x \in H$.

Согласно теореме Кэли произвольная группа X изоморфна регулярной группе подстановок множества $\Omega = X$. Этот изоморфизм Кэли элемент $x \in X$ отображает в подстановку $\pi(x)$ множества X, для которой

$$y^{\pi(x)} = yx \quad (y \in X).$$

Работа авторов выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 19-71-10017-П.

Если X — счетная группа, то элементы X можно занумеровать натуральными числами. Тогда изоморфизм Кэли индуцирует подстановку на индексах, т. е. подстановку множества натуральных чисел N. Поэтому любая счетная группа изоморфна регулярной группе подстановок множества N.

Возникает вопрос: какие счетные группы допускают такую нумерацию их элементов натуральными числами, что образы соответствующих изоморфизмов Кэли содержатся в группе $G = \mathrm{Lim}(N)$?

В настоящей статье изучаются регулярные подгруппы группы G. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть регулярная подгруппа H группы $G = \mathrm{Lim}(N)$ содержит элемент бесконечного порядка. Тогда H является конечным расширением бесконечной циклической группы. Если при этом H — группа без кручения, то H — бесконечная циклическая группа.*

Теорема 2. *Любая счетная локально конечная группа изоморфна регулярной подгруппе группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.*

Представляет интерес следующая

Гипотеза. *Периодическая регулярная подгруппа группы $G = \mathrm{Lim}(N)$ локально конечна.*

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны (см. [4]).

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Если x — подстановка группы $G = \mathrm{Lim}(N)$, то число бесконечных орбит группы $X = \langle x\rangle$ не превосходит $m = \omega(x)$.*

Доказательство. Пусть, напротив, существуют бесконечные орбиты $T_1, T_2, \dots, T_k$ группы X и $k > m$.

Считаем, что если α_i — наименьшее число орбиты T_i $(1 \le i \le k)$, то $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$. Фиксируем любое натуральное $s > \alpha_k$. Ясно, что для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ найдется такой элемент β_i орбиты T_i, что $\beta_i \le s < \beta_i^x$. Поскольку $\omega(x) = m$, все элементы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ принадлежат множеству

$$\{\gamma \mid \gamma \in M,\ s - m + 1 \le \gamma \le s\}$$

из m натуральных чисел. С другой стороны, так как $T_i \cap T_j = \varnothing$ при $1 \le i < j \le k$, то $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ — различные элементы этого множества. Получили противоречие с неравенством $k > m$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть R — регулярная группа подстановок множества N и $R < G = \mathrm{Lim}(N)$. Предположим, что R содержит бесконечную циклическую подгруппу $S = \langle d\rangle$. Тогда для индекса S в R выполняется неравенство*

$$|R : S| \le \omega(d).$$

Доказательство. В силу регулярности R все орбиты подгруппы S бесконечны, а значит, согласно лемме 1 множество N разбивается на t орбит $U_1, \dots, U_t$ группы S, где $t \le \omega(d)$. Фиксируем любые элементы $\alpha_1 \in U_1, \dots, \alpha_t \in U_t$ Из транзитивности R на N следует, что для каждого $i = 1, \dots, t$ найдется такая подстановка $x_i \in R$, что $\alpha_1^{x_i} = \alpha_i$. Отсюда выводим, что

$$U_i = \alpha_i^S = \alpha_1^{x_i S}, \quad 1 \le i \le t.$$

Пусть y — произвольный элемент группы R и $\alpha_1^y = \beta_j \in U_j$ для некоторого индекса j. Из вышеизложенного следует, что $\beta_j = \alpha_1^{x_j z_j}$ для некоторого $z_j \in S$. Таким образом, $\alpha_1^y = \alpha_1^{x_j z_j}$.

Поскольку $y, x_j z_j$ содержатся в регулярной группе R, отсюда заключаем, что $y = x_j z_j \in x_j S$. Итак, объединение различных смежных классов $x_1 S, \dots, x_t S$ совпадает с R, а потому $|R : S| = t$ — число орбит группы S. По лемме 1 $t \leq \omega(d)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа без кручения H является регулярной подгруппой группы $G = \mathrm{Lim}(N)$. Тогда H — бесконечная циклическая группа.*

Доказательство. Пусть d — любой неединичный элемент группы H. В силу условия $|d| = \infty$, а значит, в силу леммы 2 $S = \langle d \rangle$ — подгруппа конечного индекса в H. Отсюда легко следует, что и любая неединичная подгруппа из H имеет в ней конечный индекс. По известной теореме Федорова H — бесконечная циклическая группа. Лемма доказана.

Пусть группа H удовлетворяет условию теоремы 1. В силу леммы 2 H содержит бесконечную циклическую подгруппу S конечного индекса. По теореме Пуанкаре S содержит нормальную в H подгруппу T конечного индекса. Но тогда T — бесконечная циклическая подгруппа. Итак, H — конечное расширение бесконечной циклической группы T. Лемма 3 завершает доказательство теоремы 1.

Пример 1. Рассмотрим бесконечный цикл

$$x = (\dots,\ 2k \dots 4\ 2\ 1\ 3\ \dots\ 2k+1\ \dots).$$

Очевидно, что $w(x) = 2$, т. е. $x \in G = \mathrm{Lim}(N)$. При этом $X = \langle x \rangle$ — регулярная группа подстановок множества натуральных чисел N.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 4. *Пусть X, Y — изоморфные регулярные группы подстановок множества Ω. Тогда $X^h = Y$ для некоторой подстановки h множества Ω.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_j \mid j \in I\}$. Фиксируем $\alpha \in \Omega$. В силу условия $\Omega = \{\alpha^{x_j} \mid j \in I\}$. Если Θ — изоморфизм X на Y и $x_j^\Theta = y_j$ $(j \in I)$, то из регулярности Y на Ω следует, что $\Omega = \{\alpha^{y_j} \mid j \in I\}$.

Заметим, что если $x_i \in X$, $y_i \in Y$; α^{x_j}, $\alpha^{y_j} \in \Omega$, то

$$(\alpha^{x_j})^{x_i} = \alpha^{(x_j x_i)}, \quad (\alpha^{y_j})^{y_i} = \alpha^{(y_j y_i)}$$

при любых $i, j \in I$. Покажем, что искомой является подстановка h множества Ω, для которой $(\alpha^{x_j})^h = \alpha^{y_i}$ при каждом $j \in I$. Действительно,

$$(\alpha^{y_j})^{h^{-1} x_i h} = \alpha^{(x_j x_i) h}.$$

Если $x_j x_i = x_s$, то, действуя автоморфизмом Θ, получим $y_j y_i = y_s$. Следовательно,

$$\alpha^{(x_i x_j) h} = (\alpha^{s_s})^h = \alpha^{y_s} = (\alpha^{y_j})^{y_i}.$$

Таким образом,

$$(\alpha^{y_j})^{h^{-1} x_i h} = (\alpha^{y_j})^{y_i}.$$

Отсюда выводим, что $h^{-1} x_i h = y_i$, а значит, $X^h = Y$. Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть X — группа подстановок множества Ω. Если $\mathrm{supp}(x) = \Omega$ для любой неединичной подстановки $x \in X$, то группа X индуцирует на каждой своей орбите изоморфную X регулярную группу.

Лемма 5. *Пусть A, B — изоморфные подгруппы регулярной группы подстановок X конечного множества Ω. Тогда $A^g = B$ для некоторой подстановки g множества Ω.*

Доказательство. В силу условия $|X| = |\Omega|$. Если $k = |A| = |B|$, то по теореме Лагранжа $|X| = n = km$. Так как $\operatorname{supp}(d) = \Omega$ для любой неединичной подстановки $d \in A$, то Ω разбивается на A-орбиты $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, каждая из которых содержит точно k элементов. При этом A индуцирует на орбите Ω_i изоморфную A регулярную группу подстановок A_i по замечанию 1 ($1 \leq i \leq m$).

Аналогично множество Ω разбивается на B-орбиты $\Omega'_1, \ldots, \Omega'_m$ и B индуцирует на Ω'_i изоморфную B регулярную группу подстановок B_i ($1 \leq i \leq m$).

Пусть h — такая подстановка множества Ω, что $\Omega_i^h = \Omega'_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда каждое множество Ω'_i является орбитой групп A^h и B, которые индуцируют на Ω'_i регулярные изоморфные группы A_i^h и B_i По лемме 4 $A_i^{ht_i} = B_i$ для некоторой подстановки t_i множества Ω'_i, $i = 1, \ldots, m$. Считаем, что t_i действует тождественно на элементах разности $\Omega \setminus \Omega_i$. Тогда t_i — подстановка множества Ω, и если $g = ht_1 \ldots t_m$, то непосредственно проверяется, что $A^g = B$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Определение 4. Для натуральных $\alpha < \beta$ множество

$$\Delta(\alpha, \beta) = \{\gamma \mid \gamma \in N,\ \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$$

будем называть *отрезком натуральных чисел.*

Пусть H — группа порядка m. Определим изоморфизм Θ группы H на подгруппу $\overline{H}$ группы $G = \operatorname{Lim}(N)$. Для этого разобьем N на последовательные отрезки:

$$\Delta_0^m = \Delta(1, m),\ \Delta_1^m = \Delta(m+1, 2m), \ldots, \Delta_k^m = \Delta(km+1, (k+1)m), \ldots. \tag{1}$$

По теореме Кэли существует изоморфизм ψ группы H на регулярную группу подстановок H_0 отрезка Δ_0^m. Для каждой подстановки $h_0 \in H_0$ и любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ определим подстановку h_k отрезка Δ_k^m, полагая

$$(km + \alpha)^{h_k} = km + \alpha^{h_0} \quad (1 \leq \alpha \leq m).$$

Ясно, что отображение $\phi_k : h_0 \to h_k$ ($h_0 \in H_0$) задает изоморфизм групп подстановок H_0 и $H_k = H_0^{\phi_k}$ отрезков Δ_0^m и Δ_k^m. Определим подстановку $\overline{h}$ множества N, исходя из элемента $h \in H$. Если $\beta \in N$, то β принадлежит точно одному отрезку Δ_k^m множества (1). Если $h^\psi = h_0$, то полагаем $\beta^{\overline{h}} = \beta^{h_k}$.

Ясно, что $\omega(\overline{h}) < m$; отображение $\Theta : h \to \overline{h}$ есть изоморфизм H на $\overline{H}$; $\operatorname{supp}(\overline{h}) = N$ для любой неединичной подстановки $\overline{h} \in \overline{H}$. Итак, изоморфизм Θ, который будем называть *m-вложением* группы H, однозначно определяется изоморфизмом Кэли ψ группы H на регулярную группу подстановок отрезка $\Delta(1, m)$.

Пусть B — произвольная счетная локально-конечная группа. Тогда B является объединением строго возрастающего ряда $B_1 < \cdots < B_n < B_{n+1} < \ldots$ конечных подгрупп. Для доказательства теоремы 2 построим изоморфную B регулярную подгруппу L группы $G = \operatorname{Lim}(N)$.

Полагаем $L_1 = B_1^{\Theta_1} = \overline{B_1}$, где Θ_1 является $|B_1|$-вложением группы B_1. Предположим, что уже построены группы $L_1 < L_2 < \dots < L_n$ такие, что $L_i = B_i^{\Theta_i} = \overline{B_i}$, где Θ_i — $|B_i|$-вложение группы B_i, при этом

$$B_i^{\Theta_n} = B_i^{\Theta_i}, \quad 1 \le i \le n.$$

Определим группу L_{n+1}. Пусть $|L_n| = |B_n| = k$. По теореме Лагранжа $|B_{n+1}| = s = kt$. Рассмотрим разбиение отрезка $\Delta(1,s)$ на t последовательных отрезков по k элементов в каждом:

$$\Delta_1 = \Delta(1,k),\ \Delta_2 = \Delta(k+1,2k), \dots, \Delta_t = \Delta((t-1)k,tk). \tag{2}$$

Пусть ψ — изоморфизм Кэли группы B_{n+1} на регулярную группу подстановок отрезка $\Delta(1,s)$. Без ограничения общности можно предположить, что отрезки разбиения (2) составляют орбиты подгруппы B_n^{ψ} группы B_{n+1}^{ψ} (см. доказательство леммы 5).

Далее, так как $B_n^{\Theta_n}$ индуцирует на каждом из этих отрезков регулярную группу изоморфную B_n, в силу леммы 4 найдется такая подстановка h отрезка $\Delta(1,s)$, что $\Delta_i^h = \Delta_i$ $(1 \le i \le t)$ и $B_n^{\psi_h}$ совпадает с ограничением группы L_n на $\Delta(1,s)$. Рассматривая вместо изоморфизма Кэли ψ аналогичный изоморфизм ψh, получаем, что если Θ_{n+1} является s-вложением группы B_{n+1} и $L_{n+1} = B_{n+1}^{\Theta_{n+1}}$, то $B_n^{\Theta_{n+1}} = B_n^{\Theta_n}$, а значит, $B_i^{\Theta_i} = B_i^{\Theta_{n+1}}$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, индуктивно построен строго возрастающий ряд

$$L_1 < L_2 < \dots < L_{n+1} < \dots \tag{3}$$

конечных подгрупп группы $G = \mathrm{Lim}(N)$. Обозначим $L = \bigcup\limits_{n \in N} L_n$ и определим отображение $\Theta : B \to L$ следующим образом. Если $b \in B$, то $b \in B_n$ для некоторого натурального n. Полагаем $b^{\theta} = b^{\Theta_n}$. Из вышеизложенных свойств изоморфизмов Θ_i, $i = 1, 2, \dots$, следует, что Θ изоморфно отображает B на L.

Из построения ряда подгрупп (3) вытекает, что $\mathrm{supp}(x) = N$ для любой неединичной подстановки $x \in L$. Если $\alpha, \beta \in N$, то найдется такое натуральное n, что $\alpha, \beta < |L_n| = k$. Поскольку L_n действует транзитивно на отрезке $\Delta(1,k)$, то $\alpha^z = \beta$ для некоторой подстановки $z \in L_n < L$. Значит, L — транзитивная группа подстановок множества N. Итак, доказано, что L изоморфна B и является регулярной подгруппой группы $G = \mathrm{Lim}(N)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1.. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.

2. *Адо И. Д.* О подгруппах счетных симметрических групп // Докл. АН УССР. 1945. Т. 50, № 3. С. 15–17.

3. *Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* О подгруппах группы $\mathrm{Lim}(N)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 208–217.

4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 16 декабря 2023 г.
После доработки 16 декабря 2023 г.
Принята к публикации 25 января 2024 г.

Сучков Николай Михайлович (ORCID 0009-0004-4019-4700),
Шлепкин Алексей Анатольевич (ORCID 0000-0003-2241-2842)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
shlyopkin@mail.ru