Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2024. Том 65, № 3

УДК 512.57

ОБ ОБОБЩЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ МИЦУХАРЫ

А. П. Пожидаев

Аннотация. Дается описание идеалов в расширениях Мицухары. Находятся необходимые и достаточные условия простоты прямого расширения Мицухары. Исследуется конструкция Мицухары для матричной алгебры и алгебр Бурдэ. Строятся различные обобщения конструкции Мицухары и даются примеры простых прелиевых алгебр, полученных при помощи данной конструкции, в частности, строятся простые дубли Витта $\mathscr{A}_d$ и $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ ассоциативной коммутативной унитальной алгебры $\mathscr{A}$ с дифференцированием d.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.309

Ключевые слова: левосимметрическая алгебра, правосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра, конструкция Мицухары, эндоморф, алгебра Бурдэ, дубль Витта.

§ 1. Введение

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *левосимметрической* (*прелиевой*), если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathfrak{A}$ левосимметричен, т. е. симметричен относительно двух первых элементов: $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{A}$ (далее символ $:=$ означает равенство по определению). Как легко видеть, левосимметрические алгебры являются естественным обобщением ассоциативных алгебр и они также Ли-допустимы.

Левосимметрические алгебры естественно возникают в различных контекстах. По-видимому, эти алгебры впервые возникли в работе Кэли в 1857 г. [1]. В 1961 г. Кожуль применил их при изучении действий аффинных преобразований [2]. В 1963 г. Винберг использовал левосимметрические алгебры при классификации выпуклых однородных конусов [3], а Герстенхабер — при изучении деформаций алгебр [4]. Левосимметрические алгебры также возникают при изучении уравнения Янга — Бакстера [5], в дифференциальной геометрии плоских многообразий [6] и в теории представлений групп Ли [7]. Для многообразия алгебр $\mathscr{V}$ общее понятие пре-$\mathscr{V}$-многообразия было определено в [8]. Легко видеть, что понятие левосимметрической алгебры совпадает с понятием прелиевой алгебры. Таким образом, в настоящее время левосимметрические алгебры известны как *алгебры Кожуля — Винберга, алгебры Винберга, алгебры Кожуля, прелиевы алгебры* и *алгебры Герстенхабера.* Частными случаями левосимметрических алгебр являются так называемые ассосимметрические алгебры и алгебры Новикова, глубоко исследованные многими авторами (см., например, [9, 10]).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

В работе [11] была введена конструкция одномерного расширения левосимметрической алгебры и построены различные примеры простых левосимметрических алгебр, в основном исходя из «вырожденных» алгебр. Случай, когда исходная алгебра простая, остался в [11] неисследован. Изучению этого случая, в частности, посвящена данная работа; случай, когда исходная алгебра является эндоморфом, рассмотрен в [12], а в настоящей работе рассматривается конструкция Мицухары для матричных алгебр и алгебр Бурдэ. Отметим, что конструкция Мицухары играет важную роль при построении и изучении простых прелиевых алгебр.

Статья организована следующим образом. В § 2 дается описание идеалов в расширениях Мицухары, а также находятся необходимые и достаточные условия простоты прямого расширения Мицухары. В § 3 исследуется конструкция Мицухары для матричной алгебры, а в § 4 — для алгебр Бурдэ. В § 5 строятся различные обобщения конструкции Мицухары и даются примеры простых прелиевых алгебр, полученных при помощи данной конструкции, в частности, строятся простые дубли Витта $\mathscr{A}_d$ и $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ ассоциативной коммутативной унитальной алгебры $\mathscr{A}$ с дифференцированием d.

Зафиксируем произвольное основное поле F, характеристику поля F будем обозначать символом $\chi(F)$. В дальнейшем $\langle\Upsilon\rangle := \langle\Upsilon\rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F, где мы опускаем символ F, если поле ясно из контекста. Для данной алгебры $\mathfrak{A}$ через L_a и R_a обозначаются операторы левого и правого умножений на элемент $a \in \mathfrak{A}$, т. е. $L_a(b) = ab = R_b(a)$ для любого $b \in \mathfrak{A}$. Всюду далее через e_{ij} обозначаются обычные матричные единицы, $E := 1$ — единичная матрица (или тождественное преобразование); δ_{ij} — символ Кронекера; $(x, y, z)_{ls} := (x, y, z) - (y, x, z)$; $[x, y] := xy - yx$. Если V — векторное пространство над F, то через V^* обозначаем дуальное пространство к V, а через $\mathrm{End}(V)$ — алгебру всех F-линейных операторов на V; образ элемента $x \in V$ под действием $\phi \in \mathrm{End}(V)$ часто обозначается через $\phi_x := \phi(x)$.

§ 2. Конструкция Мицухары

Пусть $\mathfrak{A}$ — левосимметрическая алгебра над полем F. Следуя [13], симметрическую билинейную форму $H(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{A}$ со значениями в F будем называть *гессианом*, если

$$H(xy, z) - H(x, yz) = H(yx, z) - H(y, xz) \tag{1}$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{A}$.

Напомним конструкцию Мицухары [11] расширения левосимметрической алгебры $\mathfrak{A}$ при помощи нильпотента или идемпотента, т. е. такого элемента u, что $u^2 = \varepsilon u$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $u \notin \mathfrak{A}$ (элемент u будем называть *ε-потентом*). Гессиан H и дифференцирование D на $\mathfrak{A}$ назовем *ε-согласованными*, если

$$\varepsilon H(x, y) = H(D_x, y) + H(x, D_y)$$

для любых $x, y \in \mathfrak{A}$ (при этом согласованные пары $(H, 0)$ и $(0, D)$ назовем *тривиальными*). Рассмотрим одномерное расширение $\mathfrak{A}$ при помощи Fu и *ε-согласованной* пары (H, D), на котором произведение определяется правилами

$$u \cdot u = \varepsilon u, \quad u \cdot x = D_x, \quad x \cdot u = 0, \quad x \cdot y = xy + H(x, y)u$$

для всех $x, y \in \mathfrak{A}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathfrak{A}(H, D)$. Алгебру $\mathfrak{A}(H, D)$ будем называть *ε-расширением Мицухары* алгебры $\mathfrak{A}$. Как замечено в

[11], $\mathfrak{A}(H, D)$ является левосимметрической алгеброй. Заметим, что ε-потент u порождает одномерный левый идеал, и такой ε-потент u будем называть *главным.*

Обозначим через $M^\perp := \{x \in \mathfrak{A} : H(x, m) = 0$ для любого $m \in M\}$ *ортогональное дополнение* к множеству M в алгебре $\mathfrak{A}$ относительно гессиана H алгебры $\mathfrak{A}$.

Лемма 2.1 [11]. *Подпространство $I = Fu \oplus J$ является идеалом в $\mathfrak{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathfrak{A}$, что $D(\mathfrak{A}) \subseteq J$. Подпространство J из $\mathfrak{A}$ является идеалом в $\mathfrak{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathfrak{A}$, что $D(J) \subseteq J$ и $J \subseteq \mathfrak{A}^\perp$.*

Данная лемма не дает описания всех идеалов в $\mathfrak{A}(H, D)$ при $\varepsilon = 0$, что было отмечено в [11]. В этом случае возможны также «неоднородные» идеалы, описываемые леммой 2.2, для формулировки которой удобно ввести следующее техническое определение. Пусть (H, D) — ε-согласованная пара на алгебре $\mathfrak{A}$. Левый D-инвариантный идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ назовем (H, D)-*идеалом с компаньоном* $\alpha \in I^*$, если

$$ax + \alpha_a D_x \in I, \quad \alpha(xa) = \alpha(ax + \alpha_a D_x) = H(a, x), \quad \alpha(D_a) = 0$$

для всех $a \in I$, $x \in \mathfrak{A}$.

Лемма 2.2. *Пусть J — подпространство в $\mathfrak{A}(H, D)$ такое, что $J \not\subseteq \mathfrak{A}$, $u \notin J$. Тогда J является идеалом в $\mathfrak{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{A}$ существует (H, D)-идеал I с компаньоном α такой, что*

$$J = \langle a + \alpha_a : a \in I \rangle.$$

Доказательство. Пусть J — идеал в $\mathfrak{A}(H, D)$, $J \not\subseteq \mathfrak{A}$, $u \notin J$. Тогда $a + u \in J$ для некоторого ненулевого $a \in \mathfrak{A}$. Из условий на J следует, что $\varepsilon = 0$. Пусть $I = \{x \in \mathfrak{A} : x + \alpha_x u \in J$ для некоторого $\alpha_x \in F\}$. Заметим, что I — подпространство в $\mathfrak{A}$ и α_x определен единственным образом для любого $x \in \mathfrak{A}$. Таким образом, естественно определяется $\alpha \in I^*$. Если $a + \alpha_a u \in J$, то $u \cdot (a + \alpha_a u) = D_a \in J$, т. е. $D_I \subseteq I$, $\alpha(D_I) = 0$. Далее, пусть $(,) := H(,)$, тогда

$$(a + \alpha_a u) \cdot x = ax + (a, x)u + \alpha_a D_x \in J, \quad x \cdot (a + \alpha_a u) = xa + (a, x)u \in J,$$

откуда

$$xa \in I, \quad ax + \alpha_a D_x \in I, \quad \alpha(xa) = \alpha(ax + \alpha_a D_x) = (a, x)$$

для любых $a \in I$, $x \in \mathfrak{A}$.

Обратно, если I — (H, D)-идеал в $\mathfrak{A}$ с компаньоном α, то $J = \langle a + \alpha_a u : a \in I \rangle$ — идеал в $\mathfrak{A}(H, D)$. Действительно, $(a + \alpha_a u) \cdot u = 0$, $u \cdot (a + \alpha_a u) = D_a \in J$, $(a + \alpha_a u) \cdot x = ax + (a, x)u + \alpha_a D_x \in J$, $x \cdot (a + \alpha_a u) = xa + (a, x)u \in J$, что и требовалось. $\square$

Зафиксируем $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Пусть $\mathscr{A}_i(H_i, D_i)$ — ε-расширения Мицухары левосимметрических алгебр $\mathscr{A}_i, i = 1, 2$. Рассмотрим прямую сумму $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ (как идеалов). Обозначим через $\mathscr{D}$ (соответственно $\mathscr{H}$) дифференцирование (гессиан) алгебры $\mathscr{A}$, определенные правилами:

$$\mathscr{D}_{|\mathscr{A}_i} = D_i, \quad \mathscr{H}_{|\mathscr{A}_i} = H_i, \quad \mathscr{H}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Как следует из [11], $(\mathscr{H}, \mathscr{D})$ является согласованной парой на $\mathscr{A}$. Алгебра $\mathscr{A}(\mathscr{H}, \mathscr{D})$ называется прямым *расширением Мицухары* алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. (Отметим, что «старые» ε-потенты алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ никак не участвуют в определении прямого расширения Мицухары.) Левосимметрическая алгебра $\mathscr{A}$ называется *разложимой*, если существуют нетривиальные алгебры $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ такие, что $\mathscr{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. В противном случае $\mathscr{A}$ называется *неразложимой*. Назовем алгебру $\mathscr{A}$ *просто неразложимой*, если $\mathscr{A}$ не является прямым расширением Мицухары двух простых алгебр. Важность ε-расширения Мицухары объясняет следующее

Предложение 2.1 [11]. *Пусть $\mathscr{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$. Если $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ простые, то и $\mathscr{A}$ простая.*

Усилим данное предложение. Для этого введем следующее определение. Алгебру $\mathscr{A}(H,D)$ назовем *расширяемо простой*, если она либо проста, либо любой ее собственный идеал не совпадает с $\mathscr{A}$, имеет коразмерность 1 и не содержит главного ε-потента.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathscr{A} := \mathfrak{A}_1(H_1,D_1)$ и $\mathscr{B} := \mathfrak{A}_2(H_2,D_2)$. Алгебра $\mathfrak{A}$ проста тогда и только тогда, когда одна из алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ проста, а другая расширяемо проста.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ проста, а $\mathscr{B}$ расширяемо проста; $\mathscr{D},\mathscr{H}$ определены при помощи (2). Далее считаем $\varepsilon = 0$, так как при $\varepsilon = 1$ рассуждения становятся только проще. Пусть J — идеал в $\mathfrak{A}$ и $I = \{x \in \mathfrak{A}_1 : x + \alpha u \in J$ для некоторого $\alpha \in F\}$.

Рассмотрим сначала случай $I \neq 0$. Тогда $a + \alpha u \in J$ для некоторых одновременно ненулевых $a \in \mathfrak{A}_1$, $\alpha \in F$. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда $(a+\alpha u)\cdot\mathfrak{A}_2 = \mathscr{D}(\mathfrak{A}_2) \subseteq J$. Так как $\mathscr{B}$ расширяемо проста и $\mathscr{D}(\mathfrak{A}_2) \neq 0$, то $b + u \in J$ для некоторого $b \in \mathscr{B}$, откуда $0 \neq \mathscr{D}(\mathfrak{A}_1) \subseteq J$. Так как $\mathscr{A}$ проста, то $\mathscr{A} \subseteq J$, $u \in J$ и в итоге $J = \mathfrak{A}$. Если же $I \subseteq \mathfrak{A}_1$, то $\mathscr{H}(I,\mathfrak{A}_1) = 0$, откуда $I \trianglelefteq \mathscr{A}$; противоречие.

В случае $b + \alpha u \in J$ для некоторых одновременно ненулевых $b \in \mathfrak{A}_2$, $\alpha \in F$ имеем $(b+\alpha u)\cdot\mathfrak{A}_1 = \mathscr{D}(\mathfrak{A}_1) \subseteq J$. Так как $\mathscr{A}$ проста, то $\mathscr{A} \subseteq J$ и $u \in J$, откуда $J = \mathfrak{A}$. Если же $0 \neq \mathscr{B} \cap J \subseteq \mathfrak{A}_2$, то, так как $\mathscr{B}$ расширяемо проста, $b + u \in J$ для некоторого ненулевого $b \in \mathfrak{A}_2$, что противоречит предыдущему предположению.

Пусть $a + b \in J$ для некоторых ненулевых $a \in \mathfrak{A}_1, b \in \mathfrak{A}_2$. Пусть $I := \{x \in \mathfrak{A}_1 : x + y \in J$ для некоторого $b \in \mathfrak{A}_2\}$. Тогда $a\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1 a = 0$, $\mathscr{H}(I,\mathfrak{A}_1) = 0$, $\mathscr{D}(I) \subseteq I$, так как иначе приходим к случаю, рассмотренному выше. Но тогда $I \trianglelefteq \mathscr{A}$; противоречие.

Окончательно, пусть $v = a + b + u \in J$ для некоторых ненулевых $a \in \mathfrak{A}_1$, $b \in \mathfrak{A}_2$. Можно считать, что $uv = 0$, так как иначе приходим к предыдущим случаям. Так как $\mathscr{A}$ проста, то, домножая v на элементы из $\mathscr{A}$, получим $\mathscr{A} \subseteq J$, что рассмотрено выше.

Обратно, пусть $\mathfrak{A}$ проста, а I — собственный идеал в $\mathscr{A}$. Тогда $I + \mathscr{B}$ является идеалом в $\mathfrak{A}$ (отождествляя главные ε-потенты алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ с главным ε-потентом алгебры $\mathfrak{A}$). Значит, $\operatorname{codim}_{\mathscr{A}} I = 1$. Если $I = \mathfrak{A}_1$, то $I \trianglelefteq \mathfrak{A}$. Если $u \in I$, то $I + \mathfrak{A}_2$ — собственный идеал в $\mathfrak{A}$. Если J — аналогичный собственный идеал в $\mathscr{B}$, то $I + J$ — собственный идеал в $\mathfrak{A}$. Таким образом, одна из алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ должна быть простой, а другая — расширяемо простой. $\square$

§ 3. О конструкции Мицухары для матричной алгебры

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра, то $[\mathfrak{A},\mathfrak{A}] := \langle [x,y] : x,y \in \mathfrak{A}\rangle$.

Лемма 3.1. *Если $\mathfrak{A}$ — левосимметрическая алгебра с 1, а $H := (\,,)$ — гессиан на $\mathfrak{A}$, то H полностью определяется своими значениями на 1 и базисе*

$\mathscr{B}$ дополнения $[\mathfrak{A},\mathfrak{A}]$, т. е. элементами $(1,b)$, $b\in\mathscr{B}$, при этом $[\mathfrak{A},\mathfrak{A}]\subseteq F^{\perp}$ и $(x,y)=(1,xy)$ для любых $x,y\in\mathfrak{A}$.

Доказательство. Полагая $z=1$ в (1), получаем $(1,xy)=(1,yx)$ для любых $x,y\in\mathfrak{A}$. Полагая $y=1$ в (1), получаем $(xz,1)=(x,z)$ для любых $x,z\in\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}=[\mathfrak{A},\mathfrak{A}]\oplus\mathscr{B}$ и $\{b_i:i\in I\}$ — базис $\mathscr{B}$. Определим $(1,b_i)=\beta_i\in F$ для всех $i\in I$, $(1,a)=0$ при $a\in[\mathfrak{A},\mathfrak{A}]$ и $(x,y)=(1,xy)$ для любых $x,y\in\mathfrak{A}$. Тогда форма $(\ ,\ )$ симметрична на $\mathfrak{A}$ и

$$(xy,z)-(x,yz)=(1,xy\cdot z-x\cdot yz)=(1,yx\cdot z)-(1,y\cdot xz)=(yx,z)-(y,xz)$$

для любых $x,y,z\in\mathfrak{A}$, что следует из левосимметричности $\mathfrak{A}$. $\square$

Заметим, что если $\mathfrak{A}$ — алгебра с 1 и $\mathfrak{A}=F1\oplus B$, где B — подалгебра в $\mathfrak{A}$, то гессиан на $\mathfrak{A}$ индуцирует гессиан на B, но не всякий гессиан с B поднимается до гессиана на $\mathfrak{A}$. К примеру, рассмотрим кольцо строго треугольных матриц $\mathfrak{A}=ST_3(F)$ над полем F характеристики не 2. Легко видеть, что любой гессиан H на $\mathfrak{A}$ задается условием $\operatorname{Ker}H=\mathfrak{A}^2$, где $\mathfrak{A}^2$ — квадрат алгебры $\mathfrak{A}$. Рассматривая произвольный гессиан $H^\sharp$ на $\mathfrak{A}^\sharp$ (присоединяя 1 к $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A}^\sharp:=F1\oplus\mathfrak{A}$), получаем, что $H^\sharp=0$ на $\mathfrak{A}$.

Обозначим через Tr симметрическую билинейную форму на $M_n(F)$, определенную равенством $\mathrm{Tr}\,(A,B)=\mathrm{tr}(AB)$ для любых $A,B\in M_n(F)$, где tr — это функция следа на матрицах. Легко видеть, что Tr является гессианом.

Следствие 3.1. *Если H — гессиан на $M_n(F)$, то $H=\alpha\cdot\mathrm{Tr}$ для некоторого $\alpha\in F$.*

Доказательство. По лемме 3.1 $H(1,A)=0$, если $\mathrm{tr}(A)=0$. Так как любой элемент из $M_n(F)$ однозначно представим в виде $\alpha E+A$, где E — единичная матрица, а $\mathrm{tr}(A)=0$, то H полностью определяется значением $H(1,1)$. Поскольку $\mathrm{Tr}\,(A,B)$ является гессианом, то $H=\alpha\cdot\mathrm{Tr}$ для некоторого $\alpha\in F$. $\square$

Так как любое дифференцирование алгебры $M_n(F)$ является внутренним и $[AB,C]=[A,C]B+A[B,C]$ для любых $A,B,C\in M_n(F)$, то любая 1-согласованная пара на $M_n(F)$ тривиальна, т. е. с нулевым гессианом. Рассмотрим случай 0-согласованной пары (Tr,D) на $M_n(F)$. Далее предполагаем, что $n>1$, так как иначе все дифференцирования матричной алгебры тривиальны. Легко заметить, что сама (левосимметрическая) алгебра $M_n(F)$ неразложима, так как не содержит левых аннуляторов элемента размерности n^2-1.

Теорема 3.1. *Любое 0-расширение Мицухары алгебры $M_n(F)$, $n\geq 2$, является локальной расширяемо простой алгеброй для любых ненулевых дифференцирования D и гессиана $H=\alpha\,\mathrm{Tr}$. Ее единственным собственным идеалом является простая неассоциативная неразложимая левосимметрическая алгебра*

$$M_n(F)_u=\langle A+\mathrm{tr}(A)u:A\in M_n(F)\rangle.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha=1$. Пусть I — собственный идеал в $M_n(F)(\mathrm{Tr},D)$. Так как алгебра $M_n(F)$ проста, $D\neq 0$, $H=\mathrm{Tr}$, по лемме 2.1 можно считать, что $A+u\in I$ для некоторой ненулевой матрицы $A\in M_n(F)$, $u\notin I$. Заметим, что если некоторая матрица S лежит в I, то $\mathrm{tr}(S)=0$, так как иначе $S\cdot E=S+\mathrm{tr}(S)u\in I$ и $u\in I$. Если I одномерен, то из включения $B\cdot(A+u)=B\cdot A=BA+\mathrm{tr}(BA)u\in I$ следует, что $BA=\mathrm{tr}(BA)A$ для любой $B\in M_n(F)$, а это невозможно.

Далее считаем, что $\dim I \geq 2$, $A + u \in I$ и $\mathrm{tr}(A) = 1$, что можно получить из равенства выше, полагая $B = E$. Из соображений размерности также получаем, что I содержит ненулевую матрицу C со следом 0. Так как $C \cdot B = CB + \mathrm{tr}(CB)u \in I$, то $[B, C] \in I$ для всех $B \in M_n(F)$. Тогда лиев идеал, порожденный C, лежит в I, т. е. $sl_n(F) \subseteq I$. Стало быть, $I = M_n(F)_u$. Легко видеть, что $M_n(F)_u$ является собственным идеалом размерности $n^2 - 1$ в алгебре $M_n(F)(\mathrm{Tr}, D)$.

Докажем простоту $M_n(F)_u$. Пусть I — ненулевой идеал в $M_n(F)_u$. Предположим, что ненулевая матрица C лежит в I. Если $C \in \langle E \rangle$, то $E \cdot B = B + tr\,(B)u \in I$ для любой B со следом 0, т. е. $sl_n(F) \subseteq I$. Включение $E \cdot (A + u) = A + \mathrm{tr}(A)u \in I$ для любой $A \in M_n(F)$ дает $I = M_n(F)_u$. Если $C \notin \langle E \rangle$, то, как и ранее, лиев идеал, порожденный C, лежит в I, $C \cdot (A + u) \in I$ для любой $A \in M_n(F)$, откуда опять $I = M_n(F)_u$.

Таким образом, можно считать, что $A + u \in I$ для некоторой A такой, что $\mathrm{tr}\, A = 1$. Случай одномерности I невозможен, как и выше, и мы, как и ранее, получаем, что ненулевая матрица лежит в I, откуда $I = M_n(F)_u$.

Для доказательства неассоциативности алгебры $M_n(F)_u$ достаточно при $i \neq j$ рассмотреть $(e_{ij}, e_{ji}, e_{ji}) = (e_{ii} + u) \cdot e_{ji} = D(e_{ij})$.

Для доказательства неразложимости алгебры $M_n(F)_u$ достаточно заметить, что если $v \in M_n(F)_u$ и $v^2 = \varepsilon v$, то левый аннулятор элемента v не может иметь размерность $n^2 - 1$: если $v = A + \mathrm{tr}(A)u$, то $(B + \mathrm{tr}(B)u)v = 0$ влечет $\mathrm{tr}(BA) = 0$ для любой $B \in M_n(F)$ такой, что $B \notin \langle A \rangle$, а это невозможно. $\square$

Замечание. Как видно из теоремы, в данном случае по простой алгебре строится простая левосимметрическая алгебра той же размерности, что и исходная, но не изоморфная ей. Вопросы изоморфизма всех получаемых в данной статье простых левосимметрических алгебр будут рассмотрены в отдельной работе.

§ 4. О конструкции Мицухары для алгебр Бурдэ

Пусть $T_n(F)$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц. Определим отображение $\tau : M_n(F) \mapsto T_n(F)$ правилом

$$\tau(e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{при } i > j, \\ e_{ii}/2, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Тогда $T_n(F)$ становится левосимметрической алгеброй относительно нового произведения $x \circ y = xy + \tau(xy^\top + yx^\top)$, где $^\top$ означает транспонирование [14]. Алгебра $(T_n(F); \circ)$ не является простой, однако ее идеал $I_n = \langle e_{1i},\ i = 1, \ldots, n \rangle$ прост. Положим $e_k = e_{1n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда ненулевые произведения в данном базисе алгебры I_n задаются формулами

$$e_n \cdot e_n = 2e_n,\ e_n \cdot e_j = e_j,\ e_j \cdot e_j = e_n,\ j = 1, \ldots, n - 1.$$

В [15] было отмечено, что все дифференцирования I_2 нулевые, а в [16] были описаны дифференцирования I_n при $n > 2$. Как следует из [16], $\mathrm{Der}(I_n)$ — это алгебра Ли кососимметрических отображений пространства $J_n = \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$, аннулирующих $\langle e_n \rangle$; далее матрицы отображений из $\mathrm{End}(I_n)$ рассматриваются в стандартном базисе $\{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ пространства I_n и предполагается, что $\chi(F) \neq 2$.

Лемма 4.1. *Любой гессиан на I_n индуцируется гессианом алгебры $I_n^\sharp$.*

Доказательство. Пусть $H(x, y) := (x, y)$ — гессиан на I_n. Обозначим через $H(x, y, z)$ разность между левой и правой частью (1). При различных $i, j \neq n$

$$H(e_n, e_i, e_j) = 0 \Rightarrow (e_i, e_j) = 0;$$

$$H(e_i, e_j, e_i) = 0 \Rightarrow 0 = -(e_j, e_n);$$

$$H(e_n, e_i, e_i) = 0 \Rightarrow (e_i, e_i) - (e_n, e_n) = -(e_i, e_i);$$

а если $(\,,)$ — гессиан на $I_n^\sharp$, то $(e_i, e_j) = (1, e_i e_j) = 0$, $(e_j, e_n) = (1, e_j e_n) = 0$, $2(e_i, e_i) = 2(1, e_i e_i) = 2(1, e_n) = (e_n, e_n)$, что и доказывает лемму. □

Лемма 4.2. *(H, D) — нетривиальная ε-согласованная пара на $I_n \Leftrightarrow \varepsilon = 0$.*

Доказательство. Пусть $H = (\,,)$, $D = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Der}(I_n)$ — нетривиальная ε-согласованная пара на I_n. Для любых $1 \le s, k \le n$, $1 \le p, q \le n-1$ имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon(e_s, e_k) &= \Big(e_s \sum_{p<q} \alpha_{pq}(e_{pq} - e_{qp}), e_k\Big) + \Big(e_s, e_k \sum_{p<q} \alpha_{pq}(e_{pq} - e_{qp})\Big) \\ &= \Big(\sum_{q>s} \alpha_{sq} e_q - \sum_{p<s} \alpha_{ps} e_p, e_k\Big) + \Big(e_s, \sum_{k<q} \alpha_{kq} e_q - \sum_{p<k} \alpha_{pk} e_p\Big).\end{aligned}$$

Если $\varepsilon = 1$, то при $k = s = n$ получаем $(e_n, e_n) = 0$; противоречие. Итак $\varepsilon = 0$. Если $k = n$ или $s = n$, то $0 = 0$. Если $k = s < n$, то

$$0 = 2\Big(\sum_{q>s} \alpha_{sq} e_q - \sum_{p<s} \alpha_{ps} e_p, e_s\Big),$$

что верно. Если $k < s < n$, то

$$0 = -\alpha_{ks}(e_k, e_k) + \alpha_{ks}(e_s, e_s),$$

что также верно. □

Заметим, что любая алгебра I_n при $n > 1$ разложима, однако она просто неразложима.

Лемма 4.3. *Пусть A — алгебра с нулевым умножением над полем F, $\dim_F(A) = n-1$, $n \ge 2$. Тогда I_n является 1-расширением Мицухары алгебры A. Более того, I_n является прямым 1-расширением Мицухары любых двух алгебр A_1 и A_2 с нулевым умножением и условием $\dim(A_1) + \dim(A_2) = n - 1$. Любое прямое расширение Мицухары, дающее алгебру I_n, является расширением двух алгебр с нулевым умножением. В частности, I_n просто неразложима.*

Доказательство. Выберем в A базис $\mathscr{E} := \{e_i : i = 1, \dots, n-1\}$ и определим ненулевые значения гессиана H и дифференцирования D на $\mathscr{E}$ правилом

$$H(e_i, e_i) = 2, \quad D(e_i) = \frac{1}{2} e_i$$

для всех $i = 1, \dots, n-1$. Легко видеть, что пара (H, D) 1-согласованная. Полагая $e_n := 2u$ в $A(H, D)$, замечаем, что умножение в базисе $\mathscr{E} \cup e_n$ алгебры $A(H, D)$ совпадает с умножением в I_n. Заметим, что данная часть леммы также отмечена в [11]. Вторая часть леммы, про прямое 1-расширение Мицухары алгебр A_1 и A_2 с нулевым умножением, доказывается аналогично.

Далее, предположим, что I_n является прямым расширением Мицухары алгебр A_1 и A_2 посредством нильпотента u. Тогда $x \cdot u = 0$ для любого $x \in I_n$, откуда $u = 0$. Если же u является идемпотентом, то $x \cdot u \in \langle u \rangle$ для любого $x \in I_n$, откуда $2u = e_n$. Пусть $a + e_n \in A_i$ для некоторого ненулевого $a \in J_n$. Тогда, с одной стороны, $2u \cdot (a + e_n) = a + 2e_n$, а с другой стороны, $2u \cdot (a + e_n) = D(a + e_n) \in A_i$ для некоторого $D \in \mathrm{Der}(A_i)$, так как u является главным идемпотентом. Таким образом, $e_n \in A_i$, что невозможно. Значит, $A_i \subseteq J_n,\ i = 1, 2$, а потому A_i — алгебра с нулевым умножением. $\square$

Теорема 4.1. *Любое* 0*-расширение Мицухары алгебры* I_n *является локальной алгеброй для любого ненулевого дифференцирования* D *с условием* $-1 \notin \operatorname{Spec} D$ *и для любого гессиана* H *на* I_n*. При данном условии на* D *ее единственный собственный идеал — это простая неассоциативная левосимметрическая алгебра*

$$I_u = \langle e_n + u \rangle \oplus J_n.$$

Любое прямое расширение Мицухары, дающее алгебру I_u*, является расширением двух алгебр с нулевым умножением. В частности,* I_u *является просто неразложимой.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $H(e_i, e_i) = 1,\ i < n,\ H(e_n, e_n) = 2$. Также предполагаем, что $n > 2$, так как иначе все дифференцирования алгебры I_n тривиальны. Легко видеть, что I_u является собственным идеалом в $I_n(H, D)$. Пусть I — произвольный собственный идеал в $I_n(H, D)$. Покажем, что $I \subseteq I_u$. По лемме 2.1 можно считать, что $a + u \in I$ для некоторого $a \in I_n,\ u \notin I$. Тогда из $e_i \cdot a \in I,\ i = 1, \dots, n$, получаем $e_n + u \in I$. Значит, $(e_n + u) \cdot e_j = e_j + D(e_j) \in I$ для любого $j < n$, откуда $\langle e_n + u \rangle \oplus \langle a + D(a) : a \in J_n \rangle \subseteq I$. Осталось заметить, что $\langle a + D(a) : a \in J_n \rangle = J_n$. Действительно, если $a + D(a) = 0$, то $-1 \in \operatorname{Spec} D$, что противоречит условию на D.

Для доказательства простоты I_u сначала покажем, что если ненулевой $a \in J_n$ лежит в собственном идеале J алгебры I_u, то $J = I_u$. Можно считать, что $e_i a = e_n$ для некоторого $i < n$. Тогда $e_i \cdot a = e_n + u \in J$, $(e_n + u) \cdot e_j = e_j + D(e_j) \in J$ для любого $j < n$, откуда $a + D(a) \in J$ для любого $a \in J_n$, т. е. $J_n \subseteq J$ и $J = I_u$. Если $e_n + u \in J$, то, как и выше, $J_n \subseteq J$ и $J = I_u$. Теперь если $x = a + \alpha(e_n + u) \in J$ для некоторых ненулевых $\alpha \in F$ и $a \in J_n$, то можно считать, что $e_i a = e_n$ для некоторого $i < n$, откуда $e_i \cdot x = e_n + u \in J$ и $J = I_u$.

Предположим, что I_u является прямым расширением Мицухары алгебр A_1 и A_2 посредством элемента $v := a + \alpha u_n$, где $a \in J_n$, $\alpha \in F$, $u_n := e_n + u$. Тогда $x \cdot v \in \langle v \rangle$ для любого $x \in I_u$. В алгебре I_u при $a = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in F$, имеем

$$e_i \cdot u_n = 0, \quad e_i \cdot a = \alpha_i u_n, \quad u_n \cdot u_n = 2u_n,$$

откуда $a = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2} u_n$ и I_u является 1-расширением A_1 и A_2. Если $b + \beta u_n \in A_i$ для некоторых $i \in \{1, 2\}$, $b \in J_n$, $\beta \in F$, то из условия $(b + \beta u_n) \cdot v = 0$ следует $\beta = 0$, т. е. умножение в алгебрах A_1 и A_2 может быть только нулевым. В частности, получаем, что I_u является просто неразложимой. $\square$

§ 5. Обобщенная конструкция Мицухары, дубли Витта

Как отмечено в § 1, если B — левосимметрическая алгебра, то ее *коммутаторная алгебра* $B^{(-)}$, получаемая заменой умножения на B коммутатором $[x, y]$, является алгеброй Ли. Напомним также, что алгебра дифференцирований $\mathrm{Der}(A)$ произвольной алгебры A также является алгеброй Ли относительно коммутатора.

Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены билинейное симметрическое отображение $\circ : A \times A \mapsto B$ $(x \circ y = y \circ x)$ и гомоморфизм алгебр Ли $D : B^{(-)} \mapsto \mathrm{Der}(A)$ такие, что

$$D_b(x) \circ y + x \circ D_b(y) = b(x \circ y), \tag{3}$$

$$(xy) \circ z - x \circ (yz) = (yx) \circ z - y \circ (xz) \tag{4}$$

для любых $x, y, z \in A,\ b \in B$. Рассмотрим прямую сумму $A \oplus B$, где B является подалгеброй, а оставшиеся произведения определены правилами

$$b \cdot x = D_b(x), \quad x \cdot b = 0, \quad x \cdot y = xy + x \circ y \tag{5}$$

для всех $x, y \in A,\ b \in B$. Обозначим полученную алгебру через $A \circ_D B$. Справедлива следующая

Теорема 5.1. *Алгебра $A \circ_D B$ левосимметрическая.*

Доказательство. Для любых $x, y \in A,\ b \in B$ имеем

$$\begin{aligned}(b, x, y)_{ls} &= D_b(x) \cdot y - b \cdot (xy + x \circ y) + x \cdot D_b(y) \\ &= D_b(x)y + D_b(x) \circ y - D_b(xy) - b(x \circ y) + xD_b(y) + x \circ D_b(y) \\ &= D_b(x) \circ y - b(x \circ y) + x \circ D_b(y) = 0,\end{aligned}$$

что следует из (3). Далее,

$$(x, y, b)_{ls} = (xy + x \circ y) \cdot b - (yx + y \circ x) \cdot b = (x \circ y - y \circ x)b = 0,$$

что следует из симметричности отображения $\circ$. Для любых $x \in A,\ b, c \in B$ выполняется

$$\begin{aligned}(b, c, x)_{ls} &= (bc) \cdot x - b \cdot D_c(x) - (cb) \cdot x + c \cdot D_b(x) \\ &= D_{bc}(x) - D_b(D_c(x)) - D_{cb}(x) + D_c(D_b(x)) \\ &= D_{[b,c]}(x) - [D_b, D_c](x) = 0,\end{aligned}$$

так как D — гомоморфизм алгебр Ли. С другой стороны,

$$(x, b, c)_{ls} = -D_b(x) \cdot c = 0.$$

Осталось проверить тождество для элементов $x, y, z \in A$:

$$\begin{aligned}(x, y, z)_{ls} &= (xy + x \circ y) \cdot z - x \cdot (yz + y \circ z) - (yx + y \circ x) \cdot z + y \cdot (xz + x \circ z) \\ &= (xy)z + (xy) \circ z + D_{x \circ y}(z) - x(yz) - x \circ (yz) \\ &\quad - (yx)z - (yx) \circ z - D_{y \circ x}(z) + y(xz) + y \circ (xz) \\ &= (xy) \circ z - x \circ (yz) - (yx) \circ z + y \circ (xz) = 0\end{aligned}$$

по тождеству левосимметричности алгебры A, по симметричности отображения $\circ$ и (4). $\square$

Примером данной конструкции является следующая конструкция. Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены линейное отображение $\phi : A \mapsto B$ с условием $\phi([A, A]) = 0$ и гомоморфизм алгебр Ли $D : B^{(-)} \mapsto \mathrm{Der}(A)$ такие, что

$$\phi(b \cdot x) = b\phi(x)$$

для любых $x \in A,\ b \in B$ и $b \cdot x := D_b(x)$. Положим

$$x \circ y := \phi(xy). \tag{6}$$

Легко видеть, что отображение $\circ$ удовлетворяет условиям (3) и (4). Таким образом, $A \circ_D B$ является левосимметрической алгеброй. Данную конструкцию можно проиллюстрировать следующим примером.

Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d. Далее используем следующие обозначения: $d(x) := x'$ для любого $x \in \mathscr{A}$, $J' := d(J)$ для любого подпространства J в $\mathscr{A}$. Пусть $\mathscr{B} := \overline{\mathscr{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathscr{A}$ (как векторного пространства) с классическим левосимметрическим умножением $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{xd(y)}$. Пусть ϕ — естественное вложение $\mathscr{A}$ в $\overline{\mathscr{A}}$: $\phi(a) = \overline{a}$. Определим отображение $D : \mathscr{B}^{(-)} \mapsto \mathrm{Der}(\mathscr{A})$ правилом $D(\overline{a}) = ad$, где $ad(x) = ax'$ для любого $x \in \mathscr{A}$. Легко проверить, что D — это гомоморфизм алгебр Ли и $\phi(b \cdot x) = b\phi(x)$ для любых $x \in A,\ b \in \mathscr{B}$, где $b \cdot x := D_b(x)$. Обозначим полученную алгебру $\mathscr{A} \oplus \overline{\mathscr{A}}$ с умножением (5), (6) через $\mathscr{A}_d$ и назовем *дублем Витта* алгебры $\mathscr{A}$. По теореме 5.1 A_d является левосимметрической алгеброй. Более того, данная алгебра оказывается простой, если исходная алгебра $\mathscr{A}$ была унитальной d-простой алгеброй при $d \neq 0$.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathscr{A}$ — унитальная ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d. Алгебра $\mathscr{A}_d$ является простой тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ является d-простой.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}_d$ простая, J — собственный d-идеал в $\mathscr{A}$. Легко видеть, что $I := J \oplus \overline{J}$ — собственный идеал в $\mathscr{A}_d$. Действительно, справедливы следующие включения:

$$\overline{c} \cdot (a + \overline{b}) = ca' + \overline{cb'} \in I, \quad (a + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{bc'} \in I,$$

$$c \cdot (a + \overline{b}) = ca + \overline{ca} \in I, \quad (a + \overline{b}) \cdot c = ac + \overline{ac} + bc' \in I$$

для любых $a, b \in J$, $c \in \mathscr{A}$, так как $a', b' \in J$. Таким образом, I — собственный идеал в $\mathscr{A}_d$, что противоречиво.

Обратно, пусть $\mathscr{A}$ является d-простой, а I — ненулевой идеал в $\mathscr{A}_d$. Покажем, что случай $J := \mathscr{A} \cap I \neq 0$ влечет $I = \mathscr{A}_d$. Пусть $a \in J$. Тогда для любого $x \in \mathscr{A}$ имеем $\overline{x} \cdot a = xa' \in J$, т. е. $\mathscr{A}J' \subseteq J$, $J' \subseteq J$. Далее, $a \cdot x = ax + \overline{ax} \in I$, откуда, полагая $x = 1$, получаем $a + \overline{a} \in I$, т. е. $\overline{a} \in I$ для любого $a \in J$.

Заметим, что

$$(J\mathscr{A})' \subseteq J'\mathscr{A} + J\mathscr{A}' \subseteq J\mathscr{A},$$

т. е. $J\mathscr{A}$ — d-идеал в $\mathscr{A}$ и $J\mathscr{A} = \mathscr{A}$. Как известно, $\mathscr{A}\mathscr{A}'$ — это d-идеал в $\mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A}\mathscr{A}' = \mathscr{A}$. Включение $(ax + \overline{ax}) \cdot \overline{y} = \overline{axy'} \in I$ дает $\overline{J\mathscr{A}\mathscr{A}'} \subseteq I$, откуда $\overline{\mathscr{A}} \subseteq I$. Теперь $a \cdot x \in I$ влечет $J\mathscr{A} \subseteq I$, т. е. $\mathscr{A} \subseteq I$ и $I = \mathscr{A}_d$.

Покажем, что случай $\overline{\mathscr{A}} \cap I \neq 0$ приводит к предыдущему. Пусть $\overline{a} \in I$ для некоторого ненулевого $a \in \mathscr{A}$. Тогда для любого $x \in \mathscr{A}$ имеем $\overline{a} \cdot x = ax' \in I$, откуда либо приходим к первому случаю, либо $a\mathscr{A}' = 0$. Пусть $K := \{a \in \mathscr{A} : a\mathscr{A}' = 0\}$. Так как $a\mathscr{A}' = 0$ влечет $a'\mathscr{A}' + a(\mathscr{A}')' = 0$, то $a'\mathscr{A}' = 0$. Значит, K — это d-идеал в $\mathscr{A}$, т. е. $K = \mathscr{A}$, что невозможно.

Окончательно, если $a + \overline{b} \in I$ для некоторых ненулевых $a, b \in \mathscr{A}$, то $xa + \overline{xa} \in I$ для любого $x \in \mathscr{A}$, откуда $I = \{a + \overline{a} : a \in L\}$ для некоторого идеала L в $\mathscr{A}$, если I собственный. Тогда $(a + \overline{a}) \cdot x = ax + \overline{ax} + ax' \in I$ влечет $L\mathscr{A}' = 0$. Включение $\overline{x} \cdot (a + \overline{a}) = xa' + \overline{xa'} \in I$ для любого $x \in \mathscr{A}$ дает $\mathscr{A}L' \subseteq L, L' \subseteq L$. Значит, L — это d-идеал в $\mathscr{A}$, т. е. $L = \mathscr{A}$ и $\mathscr{A}\mathscr{A}' = 0$; противоречие. $\square$

Рассмотрим еще одно обобщение. Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены билинейное отображение $\circ : A \times A \mapsto B$ и бимодульное действие алгебры B на A ($b \cdot x \in A, x \cdot b \in A$) такие, что прямая сумма $A \oplus B$ становится левосимметрической алгеброй относительно операции, индуцированной указанными действиями и новой операцией на A: $x \cdot y = xy + x \circ y$. Легко видеть (см. теорему 5.3 ниже), что на языке тождеств это эквивалентно выполнению следующих соотношений в $A \oplus B$:

$$b \cdot (xy) = (b \cdot x - x \cdot b)y + x(b \cdot y), \tag{7}$$

$$(b \cdot x) \circ y + x \circ (b \cdot y) = b(x \circ y) + (x \cdot b) \circ y, \tag{8}$$

$$(xy - yx) \cdot b = x(y \cdot b) - y(x \cdot b), \tag{9}$$

$$(x \circ y - y \circ x)b = x \circ (y \cdot b) - y \circ (x \cdot b), \tag{10}$$

$$(bc - cb) \cdot x = b \cdot (c \cdot x) - c \cdot (b \cdot x), \tag{11}$$

$$(x \cdot b - b \cdot x) \cdot c = x \cdot (bc) - b \cdot (x \cdot c), \tag{12}$$

$$(xy) \circ z - x \circ (yz) = (yx) \circ z - y \circ (xz), \tag{13}$$

$$(x \circ y - y \circ x) \cdot z = x \cdot (y \circ z) - y \cdot (x \circ z) \tag{14}$$

для любых $x, y, z \in A$, $b, c \in B$. Алгебру $A \oplus B$, где B является подалгеброй, B бимодульно действует на A как выше, а новое произведение на A определено правилом

$$x \cdot y = xy + x \circ y$$

для всех $x, y \in A$, будем называть *бимодульным расширением* алгебры A с помощью B. Обозначим полученную алгебру через $A \circ B$. Покажем, что $A \circ B$ с соотношениями (7)–(14) действительно является левосимметрической алгеброй. Мы опускаем символ операции для старого умножения в A и B (в B оно не изменяется).

Теорема 5.3. *Алгебра $A \circ B$ левосимметрическая.*

Доказательство. Для любых $x, y \in A$, $b \in B$ имеем

$$\begin{aligned}(b, x, y)_{ls} &= (b \cdot x) \cdot y - b \cdot (xy + x \circ y) - (x \cdot b) \cdot y + x \cdot (b \cdot y) \\ &= (b \cdot x)y + (b \cdot x) \circ y - b \cdot (xy) - b(x \circ y) \\ &\quad - (x \cdot b)y - (x \cdot b) \circ y + x(b \cdot y) + x \circ (b \cdot y) = 0,\end{aligned}$$

что следует из (7) и (8). Далее,

$$\begin{aligned}&(x, y, b)_{ls} = (xy + x \circ y) \cdot b - x \cdot (y \cdot b) - (yx + y \circ x) \cdot b + y \cdot (x \cdot b) \\ &= (xy - yx) \cdot b - x(y \cdot b) + y(x \cdot b) + (x \circ y - y \circ x)b - x \circ (y \cdot b) + y \circ (x \cdot b) = 0,\end{aligned}$$

что следует из (9) и (10). Для любых $x \in A$, $b, c \in B$ выполняется

$$(b, c, x)_{ls} = (bc) \cdot x - b \cdot (c \cdot x) - (cb) \cdot x + c \cdot (b \cdot x) = 0$$

по (11). С другой стороны,

$$(x, b, c)_{ls} = (x \cdot b) \cdot c - x \cdot (bc) - (b \cdot x) \cdot c + b \cdot (x \cdot c) = 0$$

по (12). Осталось проверить тождество для элементов $x, y, z \in A$:

$$(x, y, z)_{ls} = (xy + x \circ y) \cdot z - x \cdot (yz + y \circ z) - (yx + y \circ x) \cdot z + y \cdot (xz + x \circ z)$$

$$\begin{aligned} &= (xy)z + (xy)\circ z + (x\circ y)\cdot z - x(yz) - x\circ(yz) - x\cdot(y\circ z)\\ &- (yx)z - (yx)\circ z - (y\circ x)\cdot z + y(xz) + y\circ(xz) + y\cdot(x\circ z)\\ &= (xy)\circ z - x\circ(yz) - (yx)\circ z + y\circ(xz)\\ &+ (x\circ y)\cdot z - x\cdot(y\circ z) - (y\circ x)\cdot z + y\cdot(x\circ z) = 0 \end{aligned}$$

по левосимметричности алгебры A и (13), (14). $\square$

В качестве примера алгебры данного типа можно рассмотреть, например, алгебру $(F\oplus F)\circ D_2(F)$, где $A = Fe_1\oplus Fe_2$ — прямая сумма полей, а $D_2(F)$ — подалгебра диагональных матриц в $M_2(F)$. Определим коммутативное действие $D_2(F)$ на A правилом $e_i e_{jj} = \delta_{ij}e_j$. Положим $1\circ e_i = \alpha_i e_{ii}$ для некоторых фиксированных $\alpha_i \in F$, $i = 1, 2$, и определим $x\circ y := 1\circ xy$ для произвольных $x, y \in A$. Справедливость равенств (7)–(14) легко проверяется (а также следует из предложения 5.1, если положить $\phi(e_i) := 1\circ e_i$; заметим, что при этом A является также ассоциативным бимодулем над $D_2(F)$). Таким образом, по теореме 5.3 $(F\oplus F)\circ D_2(F)$ является левосимметрической алгеброй. Данный пример обобщается следующим утверждением.

Предложение 5.1. *Пусть A — произвольная ассоциативная коммутативная алгебра с 1, а B — произвольная левосимметрическая алгебра. Предположим, что A является коммутативным левосимметрическим бимодулем над B с условием $(xy)\cdot b = x(y\cdot b)$ и определено отображение $\phi : A \mapsto B$ такое, что $b\phi(x) = \phi(b\cdot x)$ и $x\cdot\phi(yz) = y\cdot\phi(xz)$ для любых $x, y, z \in A$, $b \in B$. Положим $x\circ y = \phi(xy)$ для любых $x, y \in A$. Тогда $A\circ B$ является левосимметрической алгеброй.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке (7)–(14). Тождества (7)–(13) следуют из условий на алгебру, бимодульное действие и свойств отображения ϕ. Проверим (14). Имеем $x\circ y = y\circ x$, что следует из определения $\circ$ и коммутативности A. Далее,

$$x\cdot(y\circ z) - y\cdot(x\circ z) = x\cdot\phi(yz) - y\cdot\phi(xz) = 0,$$

что получается из свойств отображений $\circ$ и ϕ. $\square$

Ранее автором отмечалось в [17], что конструкция эндоморфа является частным случаем общей конструкции (*обобщенного эндоморфа*) расширения алгебры при помощи другой алгебры со взаимными действиями алгебр. Так как явно в [17] эта конструкция не приводилась, а в данной работе замечено, что все конструкции эндоморфов, а также обобщенная конструкция Мицухары, являются обобщенными эндоморфами, то дадим ее в явном виде. Пусть A, B — алгебры над полем F и определены двусторонние действия алгебр друг на друга, т. е. заданы билинейные отображения

$$\triangleright : A\times B \to B; \qquad \triangleright : B\times A \to A;$$

$$\triangleleft : A\times B \to A; \quad \triangleleft : B\times A \to B;$$

$$a\triangleright b \in B,\ b\triangleright a \in A, \quad a\triangleleft b \in A, \quad b\triangleleft a \in B$$

для всех $a \in A$, $b \in B$. Также пусть заданы два билинейных произведения $\circ_i$, $i = 1, 2$, из A в B и из B в A соответственно, т. е. $A\circ_1 A \subseteq B$ и $B\circ_2 B \subseteq A$. Определим на прямой сумме $A\oplus B$ новое произведение $\cdot$ правилом:

$$b\cdot a = b\triangleright a + b\triangleleft a,$$

$$a \cdot b = a \triangleright b + a \triangleleft b,$$

$$a_1 \cdot a_2 = a_1 a_2 + a_1 \circ_1 a_2,$$

$$b_1 \cdot b_2 = b_1 b_2 + b_1 \circ_2 b_2$$

для всех $a, a_i \in A$, $b, b_i \in B$. Назовем полученную алгебру $E(A,B)$ *обобщенным эндоморфом* алгебр A и B. Легко видеть, что все конструкции эндоморфов из [17–20], а также обобщенная конструкция Мицухары являются обобщенными эндоморфами левосимметрических алгебр. Как заметил рецензент, данная конструкция в несколько иных обозначения и терминах также приведена в работе [21, определение 3.1]. Как доказано в [21, теорема 3.9], любая левосимметрическая алгебра, содержащая подалгебру A, является расширением алгебры A (обобщенным эндоморфом). Таким образом, понятие обобщенного эндоморфа является слишком общим, а потому представляют особый интерес частные случаи данной конструкции, приводящие к простым алгебрам, которые приводятся в данном параграфе.

В качестве примера обобщенного эндоморфа рассмотрим следующий *обобщенный дубль Витта.* Пусть, как и ранее, $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d; $d(x) := x'$. Пусть $\mathscr{B} := \overline{\mathscr{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathscr{A}$ с умножением $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{xd(y)}$. Определим взаимные действия алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ друг на друга:

$$a \triangleright \overline{b} = \overline{ab}, \quad \overline{b} \triangleright a = ba', \quad a \triangleleft \overline{b} = 0, \quad \overline{b} \triangleleft a = \overline{ab}$$

для всех $a \in \mathscr{A}$, $\overline{b} \in \mathscr{B}$. Полагаем

$$\overline{b} \cdot a = ba' + \overline{ba}, \quad a \cdot \overline{b} = \overline{ab},$$

$$a_1 \cdot a_2 = a_1 a_2, \quad \overline{b}_1 \cdot \overline{b}_2 = \overline{b}_1 \star \overline{b}_2$$

для всех $a, a_i \in A$, $\overline{b}, \overline{b}_i \in B$, т. е. $\circ_1 = 0 = \circ_2$. Так как алгебра $E(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ в действительности зависит только от $\mathscr{A}$ и дифференцирования d, будем обозначать ее через $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$. Заметим, что в отличие от алгебры $\mathscr{A}_d$ в алгебре $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ изоморфная копия действует справа на $\mathscr{A}$ ненулевым образом и $\mathscr{A}$ является подалгеброй в $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$.

Теорема 5.4. *Алгебра $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ левосимметрическая.*

Доказательство. Так как $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ по условию являются подалгебрами, достаточно рассмотреть только взаимные ассоциаторы алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, которые, как легко видеть, все равны нулю за исключением одного случая:

$$\begin{aligned}(\overline{b}, \overline{c}, a) &= \overline{bc'} \cdot a - \overline{b} \cdot (ca' + \overline{ca}) \\ &= bc'a' + \overline{bc'a} - b(ca')' - \overline{bca'} - \overline{b(ca)'} = -bca'' - 2\overline{bca'} = (\overline{c}, \overline{b}, a),\end{aligned}$$

что и доказывает данную теорему. □

Теорема 5.5. *Пусть $\mathscr{A}$ — унитальная ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d. Алгебра $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ является простой тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ является d-простой.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ простая, а J — собственный d-идеал в $\mathscr{A}$. Легко видеть, что $I := J \oplus \overline{J}$ — собственный идеал в $\mathscr{A}_d$. Действительно, справедливы следующие включения:

$$c \cdot (a + \overline{b}) = ca + \overline{cb} \in I, \quad (a + \overline{b}) \cdot c = ac + bc' + \overline{bc} \in I,$$

$$\overline{c}\cdot(a+\overline{b}) = ca' + \overline{ca} + \overline{cb'} \in I, \quad (a+\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{ac} + \overline{bc'} \in I$$

для любых $a, b \in J$, $c \in \mathscr{A}$, так как $a', b' \in J$. Таким образом, I — собственный идеал в $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$, что противоречиво.

Обратно, пусть $\mathscr{A}$ является d-простой, а I — ненулевой идеал в $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$. Покажем, что случай $J := \mathscr{A} \cap I \neq 0$ влечет $I = \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$. Пусть $a \in J$. Тогда для любого $x \in \mathscr{A}$ имеем $a \cdot \overline{1} = \overline{a} \in I$. Далее, $\overline{1}\cdot a = a' + \overline{a}$, откуда $a' \in I$. Значит, J — это d-идеал в A, $J = A$, и $I = \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$.

Теперь покажем, что случай $\overline{\mathscr{A}} \cap I \neq 0$ приводит к предыдущему. Пусть $\overline{a} \in I$ для некоторого ненулевого $a \in \mathscr{A}$. Тогда для любого $x \in \mathscr{A}$ имеем $\overline{a}\cdot x = ax' + \overline{ax} \in I$, $x \cdot \overline{a} = \overline{ax} \in I$, откуда либо приходим к первому случаю, либо $a\mathscr{A}' = 0$, что невозможно, как и в теореме 5.2.

Окончательно, если $a + \overline{b} \in I$ для некоторых ненулевых $a, b \in \mathscr{A}$, то

$$x\cdot(a+\overline{b}) = xa + \overline{xb} \in I,$$

$$(a+\overline{b})\cdot x = ax + bx' + \overline{xb} \in I$$

для любого $x \in \mathscr{A}$, откуда $bx' \in I$ и опять, как и в теореме 5.2, приходим к первому случаю. $\square$

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить изложение данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cayley A.* A memoir on the symmetric functions of the roots of an equation // Philos. Trans. Royal Soc. London. 1857. V. 147. P. 489–496.
2. *Koszul J.-L.* Domaines bornes homogenes et orbites de groupes de transformations affines // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. P. 515–533.
3. *Винберг Э. Б.* Теория однородных выпуклых конусов // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 303–358.
4. *Gerstenhaber M.* On the deformation of rings and algebras // Ann. Math. (2). 1964. V. 79, N 1. P. 59–103.
5. *Golubchik I. Z., Sokolov V. V.* Generalized operator Yang–Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras // J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7, N 2. P. 184–197.
6. *Milnor J.* On fundamental groups of complete affinely flat manifolds // Adv. Math. 1977. V. 25. P. 178–187.
7. *Segal D.* The structure of complete left-symmetric algebras // Math. Ann. 1992. V. 293. P. 569–578.
8. *Gubarev V. Y., Kolesnikov P. S.* Operads of decorated trees and their duals // Comment. Math. Univ. Carolinae. 2014. V. 55, N 4. P. 421–445.
9. *Kleinfeld E.* Assosymmetric rings // Proc. Am. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 983–986.
10. *Зельманов Е. И.* Об одном классе локальных трансляционно инвариантных алгебр Ли // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 6. С. 1294–1297.
11. *Mizuhara A.* On simple left symmetric algebras over a solvable Lie algebra // Sci. Math. Jpn. 2003. V. 57, N 2. P. 325–337.
12. *Пожидаев А. П.* О конструкции Мицухары для эндоморфов // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 41–54.
13. *Shima H.* Homogenous Hessian manifolds // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1980. V. 30. P. 91–128.
14. *Burde D.* Simple left-symmetric algebras with solvable Lie algebra // Manuscr. Math. 1998. V. 95. P. 397–411.
15. *Bai C. M., Meng D. J.* Left-symmetric algebras and complete Lie algebras // Commun. Algebra. 2002. V. 30, N 2. P. 1001–1015.
16. *Gubarev V.* Burde's series of simple pre-Lie algebras // Sao Paulo J. Math. Sci. 2024. P. 1–11.
17. *Пожидаев А. П.* Об эндоморфах правосимметрических алгебр // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1077–1086.

18. *Пожидаев А. П., Шестаков И. П.* О правосимметрических алгебрах с унитальной матричной подалгеброй // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 173–184.
19. *Пожидаев А. П., Шестаков И. П.* О простых правосимметрических $(1, 1)$-супералгебрах // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 2. С. 166–175.
20. *Пожидаев А. П.* О неконстантных прелиевых бимодулях над $M_2(F)$ // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 392–403.
21. *Hong Y.* Extending structures and classifying complements for left-symmetric algebras // Results Math. 2019. V. 74:32. P. 1–24.

Поступила в редакцию 9 ноября 2023 г.
После доработки 5 марта 2024 г.
Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru