Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2024. Том 65, № 3

УДК 515.162.8+515.145.2+515.148

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АРТИНА ОБ ИЗОТОПНОСТИ ЗАМКНУТЫХ КОС. I

А. В. Малютин

Аннотация. Восходящая к работам Артина классическая теорема теории кос гласит, что замкнутые косы в полнотории объемлемо изотопны, если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос. Эта теорема допускает переформулировку в рамках теории узлов и зацеплений без обращения к групповой структуре. В трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью, зацепление назовем трансверсальным, если сужение расслоения на это зацепление является накрытием базы. В таком ракурсе теорема Артина утверждает, что в полнотории, тривиально расслоенном над окружностью, трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных зацеплений. В статье обобщается этот результат и доказывается (в кусочно-линейной категории), что в произвольном компактном ориентируемом трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью со слоем компактная поверхность, трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных зацеплений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.307

Ключевые слова: узел, зацепление, коса, поверхность, трехмерное многообразие, несжимаемая поверхность, гиперболический, расслоение, расслоенное пространство, локально тривиальное расслоение, послойный автогомеоморфизм, группа классов отображений, изотопия, гомотопия, гомотопическая эквивалентность.

§ 1. Введение

Восходящая к работам Артина классическая теорема теории кос гласит, что замкнутые косы в полнотории объемлемо изотопны (т. е. эквивалентны как зацепления в полнотории), если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос (см. [1; 2, теорема 1; 3, предложение 10.16; 4, теорема 2.1 и замечание на с. 91]; см. также недавнюю работу [5] с результатами по обобщению теоремы Артина). Эта теорема допускает переформулировку в рамках теории узлов и зацеплений без обращения к групповой структуре. Напомним, что *зацеплениями* называются одномерные компактные подмногообразия, лежащие во внутренности трехмерного многообразия. В трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью, зацепление называется *трансверсальным*, если сужение расслоения на это зацепление является накрытием базы. В этих терминах вышесформулированная теорема Артина принимает следующий вид: в полнотории, тривиально расслоенном над окружностью, трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных зацеплений. В настоящей работе в рамках кусочно-линейной категории доказывается следующая теорема.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00299, https://rscf.ru/project/22-11-00299/.

Теорема 1. *В компактном ориентируемом трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью со слоем компактная поверхность (не обязательно связная и, возможно, с непустым краем) трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных.*

Для удобства структурирования доказательства трансформируем теорему 1 до чуть более общего и чуть более детализированного предложения 1, включив в формулировку зацепления в топологической категории.

Предложение 1. *Пусть M — компактное ориентируемое трехмерное кусочно-линейное многообразие, локально тривиально кусочно-линейно расслоенное над окружностью со слоем компактная поверхность F. Пусть L_1 и L_2 — трансверсальные кусочно-линейные зацепления в M. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(a) *L_1 и L_2 кусочно-линейно объемлемо изотопны,*
(b) *L_1 и L_2 кусочно-линейно объемлемо изотопны в классе трансверсальных,*
(c) *L_1 и L_2 кусочно-линейно изотопны в классе трансверсальных,*
(d) *L_1 и L_2 изотопны в топологической категории в классе трансверсальных топологических зацеплений.*

Теорема 1 есть сужение предложения 1 до утверждения об эквивалентности $(a) \Leftrightarrow (c)$ и тем самым прямо следует из предложения 1. Импликации (b)⇒(a) и (b)⇒(c)⇒(d) выполняются по определению. Таким образом, для доказательства предложения 1 и теоремы 1 достаточно проверить справедливость импликаций (a)⇒(d) и (d)⇒(b). В § 2 работы доказывается импликация (d)⇒(b), в § 4 доказывается импликация (a)⇒(d).

Теорема 1 допускает серию дальнейших обобщений как на случай других классов расслоенных пространств, так и на случай более широких классов зацеплений. Частично эти обобщения будут представлены в готовящихся следующих работах цикла.

Ключевым моментом работы является новый подход, дающий доказательство импликации (a)⇒(d). Этот подход использует конструкции с несжимаемыми поверхностями из [6, 7] в композиции с результатами о расслоенных пространствах из [8, 9] (подробности изложены в § 4 ниже).

§ 2. Доказательство импликации (d)⇒(b)

Импликация (d)⇒(b) утверждает, что кусочно-линейные трансверсальные зацепления L_1 и L_2 в расслоенном многообразии M, изотопные в топологической категории в классе трансверсальных, кусочно-линейно объемлемо изотопны. Для доказательства этой импликации зафиксируем на M какую-нибудь совместимую с топологией метрику и введем в рассмотрение отвечающую ей хаусдорфову метрику d_H на множестве топологических зацеплений в M. *Индексом* трансверсального зацепления в M назовем число точек пересечения этого зацепления со слоем заданного расслоения $p : M \to S^1$. Поскольку изотопия в классе трансверсальных зацеплений не меняет индекс, он одинаков у заданных зацеплений L_1 и L_2. Пусть k — индекс зацеплений L_1 и L_2. Снабженное метрикой d_H множество всех трансверсальных топологических зацеплений в M, имеющих индекс k, обозначим через $\mathscr{V}_k$.

Утверждение 1. *Подмножество кусочно-линейных зацеплений плотно в $\mathscr{V}_k$.*

Доказательство. В силу классической теоремы о равномерной непрерывности на компактах выполняются следующие свойства.

(A) Для произвольного заданного трансверсального топологического зацепления L в M и для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если дуга J в L при проекции p в базовую окружность дает дугу, длина которой не превышает δ, то диаметр дуги J как подмножества в M не превышает ϵ.

(B) Для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если расстояние между двумя лежащими в разных слоях точками в M не превышает δ, то найдется соединяющая эти точки трансверсальная кусочно-линейная дуга, диаметр которой не превышает ϵ.

Из (A) и (B) легко следует требуемое. $\square$

В следующем утверждении под ϵ-окрестностью $B_\epsilon(L)$ зацепления L из $\mathscr{V}_k$ имеется в виду ϵ-окрестность зацепления как точки в пространстве $\mathscr{V}_k$ с метрикой d_H.

Утверждение 2. *Для произвольного зацепления L из $\mathscr{V}_k$ найдется такое вещественное $\epsilon > 0$, что любые два зацепления из $\mathscr{V}_k$, лежащие в (скажем, замкнутой) ϵ-окрестности $B_\epsilon(L)$ зацепления L, объемлемо изотопны, а любые два кусочно-линейных зацепления из $\mathscr{V}_k$, лежащие в $B_\epsilon(L)$, кусочно-линейно объемлемо изотопны.*

Для доказательства утверждения 2 введем ряд вспомогательных понятий. Трехмерное кусочно-линейное подмногообразие N в M будем называть *толстым трансверсальным зацеплением*, если исходное расслоение $p : M \to S^1$ индуцирует на N структуру локально тривиального расслоения, слой которого гомеоморфен набору замкнутых дисков. (Поскольку M ориентируемо, каждое толстое трансверсальное зацепление гомеоморфно набору полноториев.) Если трансверсальное топологическое зацепление L в M является топологическим деформационным ретрактом толстого трансверсального зацепления N и содержится во внутренности у N, будем говорить, что N является *замкнутой трансверсальной трубчатой окрестностью* (*ЗТТО*) для L.

Утверждение 3. *У каждого топологического трансверсального зацепления L в M имеется ЗТТО.*

Доказательство. Пусть λ — замкнутая дуга в S^1. Замкнутое кусочно-линейное подмногообразие P, содержащееся в подмножестве $p^{-1}(\lambda)$ пространства M, будем называть *локальной ЗТТО для L над λ*, если исходное расслоение $p : M \to S^1$ индуцирует на P структуру локально тривиального расслоения и для каждой точки $s \in \lambda$ в слое $F_s = p^{-1}(s)$ множество $F_s \cap P$ является трубчатой окрестностью для набора точек $F_s \cap L$. Поскольку у каждого конечного набора точек на поверхности имеется трубчатая окрестность, опираясь на локальную тривиальность расслоения p и непрерывность, заключаем, что для каждой точки $s \in S^1$ найдется содержащая точку s во внутренности замкнутая дуга $\lambda \subset S^1$ такая, что для L над λ имеется локальная ЗТТО. Отсюда в силу соображений компактности следует, что найдется разбиение окружности на конечное число полуоткрытых дуг, над замыканием каждой из которых имеется локальная ЗТТО для L. Для получения «полной» ЗТТО из таких локальных ЗТТО над покрывающими окружность дугами достаточно «подправить края» этих локальных ЗТТО над концами дуг, чтобы они «согласовывались на стыках», и взять объединение таких «подправленных» локальных ЗТТО. Вопрос о существовании подходящей трансформации «на стыках» сводится к рутинному вопросу о наличии кусочно-линейной изотопии (неподвижной на некоторой малой окрестности набора точек) между двумя наборами попарно не пересекающихся дисков на поверхности. Мы опускаем легко восстанавливаемые технические подробности. $\square$

Доказательство утверждения 2. Возвращаясь к доказательству утверждения 2, заметим, что в полнотории (тривиально расслоенном над окружностью) любые два трансверсальных узла единичного индекса объемлемо изотопны и — кусочно-линейно объемлемо изотопны, если расслоение и зацепления рассматривается в кусочно-линейной категории. (Это проверяется элементарными построениями: заданный полноторий можно считать прямым произведением евклидова треугольника на окружность; тогда узлы связаны изотопией, путь которой в каждом слое есть равномерное движение по отрезку; эту изотопию объемлет изотопия, неподвижная на крае и в каждый момент в каждом слое линейно переводящая каждый отрезок, соединяющий точку края с точкой узла, в такой же отрезок.) Отсюда вытекает, что если у двух трансверсальных топологических зацеплений L и L' в M имеются совпадающие ЗТТО, то L и L' топологически объемлемо изотопны, а если L и L' при этом кусочно-линейны, то они еще и кусочно-линейно объемлемо изотопны. Далее, заметим, что если L — трансверсальное зацепление из $\mathscr{V}_k$, а N — ЗТТО для L, то найдется такое вещественное $\epsilon > 0$, что N является ЗТТО для каждого зацепления из $\mathscr{V}_k$, лежащего в ϵ-окрестности $B_\epsilon(L)$ зацепления L. В композиции с утверждением 3 это доказывает утверждение 2. $\square$

Утверждение 2 интерпретируется как утверждение о «локальной» эквивалентности рассматриваемых типов изотопности в классе трансверсальных зацеплений. Покажем, что «локальная» эквивалентность влечет и «глобальную». Для этого заметим, что (в силу неравенства треугольника) функция, сопоставляющая зацеплению L из $\mathscr{V}_k$ супремум множества таких вещественных $\epsilon > 0$, что для пары (L, ϵ) выполняется свойство из утверждения 2, непрерывна (более того, 1-липшицева), а исходное условие об изотопности (в топологической категории в классе трансверсальных) для зацеплений L_1 и L_2 интерпретируется как наличие пути $\tau : [0,1] \to \mathscr{V}_k$ из L_1 в L_2. Следовательно, поскольку указанная функция положительна и непрерывна, а путь $\tau([0,1])$ компактен, найдется $\epsilon' > 0$ такое, что для любой точки L на пути $\tau([0,1])$ для метрического шара $B_{\epsilon'}(L)$ выполняется свойство из утверждения 2. Кроме того, в силу компактности пути $\tau([0,1])$, в $\tau([0,1])$ найдется конечная последовательность

$$\{L_1 = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_z = L_2\}$$

такая, что $d_H(\ell_i, \ell_{i+1}) < \epsilon'/3$ для каждого $i \in \{1, \dots, z-1\}$. Воспользовавшись утверждением 1, подберем в $\mathscr{V}_k$ последовательность кусочно-линейных зацеплений

$$\{L_1 = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_z = L_2\}$$

с $d_H(\mu_i, \ell_i) < \epsilon'/3$ для каждого $i \in \{1, \dots, z-1\}$. Тогда по построению получаем, что для каждого $i \in \{1, \dots, z-1\}$ зацепления μ_i и μ_{i+1} лежат в $B_{\epsilon'}(\ell_i)$ и, следовательно, кусочно-линейно объемлемо изотопны, так что L_1 и L_2 кусочно-линейно объемлемо изотопны. Тем самым доказательство импликации (d)$\Rightarrow$(b) завершено.

§ 3. Вспомогательные леммы о «выравнивании»

Доказательство импликации (a)⇒(d) (§ 4) использует конструкции из [6] и [7] (см. также [10, лемма 2]), связанные с «выравниванием»[1)] поверхностей в расслоенных пространствах, и, предваряя это доказательство, мы формулируем и доказываем ряд вариаций (леммы 1 и 2 и следствия 1 и 2) леммы 3.5 из [7].

В дальнейшем изложении гомеоморфизм между расслоенными пространствами называется *послойным*, если он отправляет каждый слой в некоторый слой. Автогомеоморфизм, отправляющий каждый слой в тот же слой, называется *внутрислойным*. Изотопия расслоенного пространства называется *послойной* (соответственно *внутрислойной*), если она состоит из послойных (соответственно внутрислойных) автогомеоморфизмов. В нижеследующих леммах 1 и 2 и их доказательствах под «слоями» в рассматриваемых прямых произведениях $Y \times [0,1]$ поверхности на отрезок понимаются поверхности $Y \times \{t\}$. Соответствующим образом трактуются понятия «послойности» и «внутрислойности». Леммы 1 и 2 и следствия 1 и 2 относятся к кусочно-линейной категории (упоминание которой для краткости опускается).

Лемма 1. *Пусть Y — компактная связная ориентируемая поверхность, отличная от сферы, пусть $W = Y \times [0,1]$, и пусть $h : W \to W$ — гомеоморфизм с $h(Y \times \{0,1\}) = Y \times \{0,1\}$. Тогда найдется изотопия θ пространства W, неподвижная на $Y \times \{0,1\}$ и связывающая h с послойным гомеоморфизмом* (*т. е. с гомеоморфизмом, переводящим каждый слой $Y \times \{t\}$ в некоторый слой*).

Лемма 2. *Если в предположениях леммы* 1 *гомеоморфизм h переводит край $(\partial Y) \times \{t\}$ каждого слоя в край некоторого слоя* (*включая случай $\partial Y = \varnothing$*), *то изотопия θ может быть выбрана неподвижной на ∂W.*

Доказательство леммы 1. Пусть $g : W \to W$ — какой-нибудь послойный гомеоморфизм такой, что композиция $g \circ h$ тождественна на $Y \times \{0\}$ (в качестве g можно взять, к примеру, произведение гомеоморфизмов $g_Y : Y \to Y$ и $g_I : [0,1] \to [0,1]$, где g_Y есть обратный гомеоморфизм к проекции на Y сужения на $Y \times \{0\}$ отображения h, а g_I есть тождественное отображение, если h переводит $Y \times \{0\}$ в $Y \times \{0\}$, и — нетождественная изометрия, если h переводит $Y \times \{0\}$ в $Y \times \{1\}$).

Подпространство $\partial Y \times [0,1]$ либо пусто, либо является набором колец, а всякий автогомеоморфизм кольца $S^1 \times [0,1]$, тождественный на одной из компонент края, связан с тождественным отображением изотопией, неподвижной на этой компоненте (см. [7, лемма 1.4.2; 11]). Отсюда следует (см. [7, доказательство леммы 3.5]), что найдется изотопия $\nu_t : W \to W$, $t \in [0,1]$, $\nu_0 = \mathrm{id}_W$, неподвижная на $Y \times \{0\}$, в каждый момент переводящая $Y \times \{1\}$ в $Y \times \{1\}$ и такая, что композиция

$$h' = \nu_1 \circ g \circ h$$

тождественна на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0,1])$.

При этом сужение изотопии ν на слой $Y \times \{1\}$, как всякая изотопия слоя $Y \times \{1\}$, продолжима до некоторой внутрислойной изотопии $\sigma_t : W \to W$, $t \in [0,1]$, $\sigma_0 = \mathrm{id}_W$, неподвижной на $Y \times \{0\}$. Определим изотопию $\phi_t : W \to W$, $t \in [0,1]$, полагая

$$\phi_t = \nu_t \circ \sigma_t^{-1}.$$

[1)]Здесь и далее под «выравниванием» и «выпрямлением» поверхности в расслоенном пространстве, как и под «выравнивающими» и «выпрямляющими» изотопиями, имеются в виду изотопии, переводящие поверхность в слой расслоения.

Тогда ϕ_t неподвижна на $Y \times \{0,1\}$ и

$$h' = \phi_1 \circ \sigma_1 \circ g \circ h,$$

т. е. мы получили переход от $g \circ h$ к h' посредством внутрислойной изотопии σ и неподвижной на $Y \times \{0,1\}$ изотопии ϕ.

Поскольку гомеоморфизм $h' = \nu_1 \circ g \circ h$ тождествен на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0,1])$, в силу [7, лемма 3.5] для h' найдется изотопия $\psi_t : W \to W$, $t \in [0,1]$, $\psi_0 = \mathrm{id}_W$, неподвижная на ∂W и «выпрямляющая» образы слоев, т. е. связывающая h' с некоторым внутрислойным гомеоморфизмом

$$h'' = \psi_1 \circ \phi_1 \circ \sigma_1 \circ g \circ h.$$

Таким образом,

$$h'' = \sigma_1 \circ g \circ \big(g^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ [\psi_1 \circ \phi_1] \circ \sigma_1 \circ g\big) \circ h.$$

Поскольку h'', σ_1 и g послойны, а ϕ_t и ψ_t неподвижны на $Y \times \{0,1\}$, отсюда следует, что изотопия

$$\theta_t = g^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ [\psi_t \circ \phi_t] \circ \sigma_1 \circ g \qquad (1)$$

обладает желаемыми свойствами: она неподвижна на $Y \times \{0,1\}$ и связывает гомеоморфизм h с послойным гомеоморфизмом $g^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ h''$. $\square$

Доказательство леммы 2. Если край ∂Y непуст, а гомеоморфизм h переводит край каждого слоя в край некоторого слоя, то проекция на отрезок $[0,1]$ сужения гомеоморфизма h на набор колец $\partial Y \times [0,1]$ дает гомеоморфизм отрезка $[0,1]$. Обозначим через g'_I обратный гомеоморфизм отрезка, через $g'_Y : Y \to Y$ — обратный гомеоморфизм к проекции на Y сужения на $Y \times \{0\}$ отображения h (по аналогии с первым этапом доказательства леммы 1), а через $g' : W \to W$ — произведение гомеоморфизмов g'_I и g'_Y. Тогда композиция $g' \circ h$ тождественна на $Y \times \{0\}$ и переводит край $\partial Y \times \{t\}$ каждого слоя $Y \times \{t\}$ в край того же слоя. Следовательно, найдется внутрислойный гомеоморфизм $g'' : W \to W$, тождественный на $Y \times \{0\}$ и такой, что композиция $g'' \circ g' \circ h$ тождественна на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0,1])$. Таким образом, $g = g'' \circ g'$ есть послойный гомеоморфизм, у которого композиция $g \circ h$ тождественна на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0,1])$. В таком случае в рамках конструкции доказательства леммы 1 мы можем взять изотопии ν_t, σ_t и ϕ_t неподвижными. Тогда изотопия θ_t (1) принимает вид $g^{-1} \circ \psi_t \circ g$ и, следовательно, неподвижна на ∂W.

Если край ∂Y пуст, то изотопия θ_t (1) из леммы 1 автоматически удовлетворяет условию леммы 2, поскольку при $\partial Y = \varnothing$ имеем $\partial W = Y \times \{0,1\}$. $\square$

Следствие 1. *Пусть Y — компактная связная ориентируемая поверхность, отличная от сферы, W_1 и W_2 — трехмерные многообразия, локально тривиально расслоенные над окружностью с одним и тем же слоем Y. Пусть $h : W_1 \to W_2$ — гомеоморфизм, переводящий один из слоев в W_1 в некоторый слой Y'' в W_2. Тогда найдется изотопия θ пространства W_2, неподвижная на Y'' и связывающая h с послойным гомеоморфизмом.*

Следствие 2. *Если в предположениях следствия* 1 *гомеоморфизм h переводит край каждого слоя в край некоторого слоя (включая случай $\partial Y = \varnothing$), то изотопия θ может быть выбрана неподвижной на ∂W_2.*

Доказательство следствия 1. Пусть $q_1 : Y \times [0,1] \to W_1$ и $q_2 : Y \times [0,1] \to W_2$ — какие-нибудь послойные представления пространств W_1 и W_2

в виде торов (кусочно-линейных) отображений с $q_1(Y \times \{0,1\}) = h^{-1}(Y'')$ и $q_2(Y \times \{0,1\}) = Y''$. Тогда многозначное отображение $q_2^{-1} \circ h \circ q_1$ содержит единственный автогомеоморфизм $\tilde{h}$, и этот гомеоморфизм удовлетворяет условиям леммы 1. Отправив с помощью q_2 какую-нибудь изотопию для $\tilde{h}$, существование которой гарантировано леммой 1, в изотопию на W_2, получаем искомое. $\square$

Доказательство следствия 2 проводится по аналогии с доказательством следствия 1 с добавлением условий и выводов леммы 2. $\square$

Замечание. Утверждения настоящего раздела выполняются и для случая, когда Y — сфера. Случай сферы сводится к случаю диска с помощью теоремы о лампочке. Однако в дальнейшем случай сферы нам не потребуется, и для краткости мы исключаем его из формулировок, следуя [7].

§ 4. Доказательство импликации (a)⇒(d)

Импликация (a)⇒(d) утверждает, что кусочно-линейно объемлемо изотопные трансверсальные кусочно-линейные зацепления L_1 и L_2 в M изотопны в топологической категории в классе трансверсальных. Докажем это с помощью следующего предложения.

Предложение 2. *Если в предположениях предложения* 1 *трансверсальные кусочно-линейные зацепления L_1 и L_2 в M кусочно-линейно объемлемо изотопны, то среди кусочно-линейных объемлющих изотопий, переводящих L_1 в L_2, найдется изотопия, финальный гомеоморфизм которой послоен* (*т. е. переводит каждый слой заданного расслоения на M в некоторый слой того же расслоения*).

Доказательство. Пусть $\tau_t : M \to M$, $t \in [0,1]$, $\tau_0 = \mathrm{id}_M$, — кусочно-линейная изотопия, переводящая L_1 в L_2. Для доказательства предложения достаточно построить изотопию $\rho_t : M \to M$, $t \in [0,1]$, $\rho_0 = \mathrm{id}_M$, дополняющую изотопию τ до изотопии с искомыми свойствами, т. е. такую, что автогомеоморфизм-композиция $\rho_1 \circ \tau_1$ послоен и переводит L_1 в L_2 (последнее эквивалентно условию $\rho_1(L_2) = L_2$).

Мы построим ρ_t в пять ступеней, — как композицию пяти изотопий:

(I) Выберем и зафиксируем произвольные ЗТТО N_1 и N_2 для L_1 и L_2 соответственно (см. утверждение 3 выше). В силу теоремы о единственности трубчатой окрестности для кусочно-линейных подмногообразий коразмерности 2 (см. [12, теорема 3]) найдется неподвижная на L_2 кусочно-линейная изотопия ρ_t^a многообразия M, переводящая $\tau_1(N_1)$ в N_2, причем такая, что каждый слоевой[2)] диск подмногообразия N_1 гомеоморфизмом $\rho_1^a \circ \tau_1$ переводится в слоевой диск подмногообразия N_2.

(II) Обозначим через M_i, где $i \in \{1,2\}$, подмногообразие $M \setminus \mathrm{int}(N_i)$. Исходное расслоение $p : M \to S^1$ индуцирует на M_i локально тривиальное расслоение $p_i : M_i \to S^1$. (Слои расслоения p_i гомеоморфны поверхности G, получающейся из слоя F расслоения p вырезанием дыр.) Поскольку каждый слой G' расслоения p_1 является в M_1 несжимаемой поверхностью (см. [6]), образ $G'' = \rho_1^a(\tau_1(G'))$ несжимаем в M_2. Теорема о накрывающей изотопии [13, теорема 2, следствие 2.3] позволяет не умаляя общности считать изотопии τ и ρ^a неподвижными на крае ∂M. В совокупности с тем свойством, что каждый

[2)] Под слоевым диском ЗТТО понимаются компоненты связности пересечений ЗТТО со слоями исходного расслоения на M.

слоевой диск из N_1 гомеоморфизмом $\rho_1^a \circ \tau_1$ переводится в слоевой диск подмногообразия N_2, это обеспечивает то, что каждая компонента края $\partial G''$ лежит в слое расслоения p_2. В этих условиях применима теорема 4 из [6], в силу которой для правильно вложенной несжимаемой поверхности G'' в расслоенном многообразии M_2, если каждая компонента края поверхности G'' лежит в одном из слоев расслоения, найдется изотопия, переводящая поверхность G'' либо в слой расслоения, либо в положение, когда все особенности индуцированного расслоения с особенностями являются седлами. Поскольку проекция слоя G' в базу-окружность стягиваема в базе и это обстоятельство сохраняется при изотопиях, у изотопных образов этого слоя имеются точки «максимума» и «минимума», что исключает вторую опцию используемой теоремы. Следовательно, некоторая изотопия многообразия M_2 переводит поверхность G'' в слой расслоения p_2. Продолжим эту изотопию до изотопии ρ^b всего M, тождественной на малой окрестности зацепления L_2 (продолжимость гарантируется теоремой о накрывающей изотопии [13, теорема 2, следствие 2.3]). Полученная изотопия ρ^b — вторая часть строимой изотопии ρ.

(III) В силу следствия 1 найдется изотопия пространства M_2, неподвижная на слое $\rho_1^b(\rho_1^a(\tau_1(G')))$ и для каждого из слоев G_x расслоения p_1 переводящая образ $\rho_1^b(\rho_1^a(\tau_1(G_x)))$ в слой расслоения p_2. (С исключительным случаем слоя — сферы мы не сталкиваемся, поскольку поверхность F'_x имеет в результате удаления внутренности трубчатой окрестности зацепления непустой край и сферой не является.) Продолжим такую изотопию до изотопии всего M, тождественной на малой окрестности зацепления L_2 (продолжимость гарантируется теоремой о накрывающей изотопии [13, теорема 2, следствие 2.3]). Полученная изотопия ρ^c — третья часть строимой изотопии ρ.

(IV) Дополним композицию изотопий ρ^c, ρ^b, ρ^a изотопией ρ^d с носителем в N_2, «выпрямляющей» в N_2 образы дисков-слоев из индуцированного исходным расслоением расслоения полноториев из N_1. Для этого сначала в каждом из полноториев многообразия N_2 изотопией, тождественной на M_2, мы «выпрямляем» по одному диску (существование «выпрямляющей» изотопии для диска доказывается стандартным рассуждением теории несжимаемых поверхностей, изложенным, например, в [7, лемма 3.4]; край каждого диска лежит в слое расслоения p, поскольку $\rho_1^c \circ \rho_1^b \circ \rho_1^a \circ \tau_1$ переводит слои расслоения p_1 в слои расслоения p). Остальные слоевые диски в N_2 «выравниваются» в силу следствия 2.

(V) Образ $\rho_1^d(L_2)$ (может не совпадать с L_2, однако), как и L_2, содержится во внутренности у N_2 и пересекает каждый слоевой диск в N_2 ровно в одной точке, откуда следует, что $\rho_1^d(L_2)$ переводится в L_2 внутрислойной изотопией, которую мы обозначаем через ρ^e.

Композиция описанных изотопий ρ^e, ρ^d, ρ^c, ρ^b и ρ^a по построению дает изотопию ρ с требуемыми свойствами.

Импликация (a)$\Rightarrow$(d) вытекает из предложения 2 в силу теоремы 1 из [9], утверждающей, что все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью трехмерные многообразия (включая неориентируемые и с непустым краем) являются *расслоениями Бирман — Хильдена*, т. е. в каждой паре изотопных и послойных (переводящих каждый слой в некоторый слой) автогомеоморфизмов такого расслоенного пространства автогомеоморфизмы связаны еще и послойной изотопией. Действительно, доказательство импликации (a) $\Rightarrow$ (d) очевидным образом сводится к случаю связного M. В случае связного M, если трансверсальные кусочно-линейные зацепления L_1 и L_2 в M кусочно-линейно объемлемо изотопны, то в силу предложения 2 найдется послойный гомеоморфизм $r : M \to M$, переводящий L_1 в L_2 и изотопный тождественному отображению, а в силу теоремы 1 из [9] гомеоморфизм r связан с тождественным отображением послойной изотопией, т. е. L_1 и L_2 связаны объемлющей послойной изотопией, и остается лишь заметить, что такая изотопия сохраняет зацепление в классе трансверсальных.

Благодарности. Автор признателен Ю. С. Белоусову, И. А. Дынникову, С. С. Подкорытову и Е. А. Фоминых за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за предложенные поправки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artin E.* Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
2. *Morton H. R.* Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial // Topology. 1978. V. 17. P. 101–104.
3. *Burde G., Zieschang H.* Knots. Berlin: Walter de Gruyter, 1985. (de Gruyter Studies in Math.; V. 5).
4. *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. New York: Springer, 2008. (Grad. Texts Math.; V. 247).
5. *Grant M., Sienicka A.* Isotopy and homeomorphism of closed surface braids // Glasgow Math. J. 2021. V. 63, N 4. P. 297–306.
6. *Thurston W. P.* A norm for the homology of 3-manifolds // Mem. Am. Math. Soc. 1986. V. 339. P. 99–130.
7. *Waldhausen F.* On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // Ann. Math. (2). 1968. V. 87. P. 56–88.
8. *Малютин А. В.* Расслоения Бирман — Хильдена I // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 125–139.
9. *Малютин А. В.* Расслоения Бирман — Хильдена II // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 2. С. 360–375.
10. *Hatcher A.* Homeomorphisms of sufficiently large P^2-irreducible 3-manifolds // Topology. 1976. V. 15, N 4. P. 343–347.
11. *Epstein D. B. A.* Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. 1966. V. 115. P. 83–107.
12. *Wall C. T. C.* Locally flat PL submanifolds with codimension two // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 5–8.
13. *Hudson J. F. P., Zeeman E. C.* On combinatorial isotopy // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 69–94.

Поступила в редакцию 3 августа 2023 г.
После доработки 27 ноября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Малютин Андрей Валерьевич (ORCID 0000-0002-4512-0124)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
ул. Губкина, 8, Москва 119991;
Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
malyutin@pdmi.ras.ru