Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2024. Том 65, № 3

УДК 515.12

О РАЗМЕРНОСТИ КВАНТОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ

А. А. Иванов

Аннотация. Доказано, что для метрического компакта X и для любого неотрицательного числа b, не превосходящего нижней емкостной размерности X, существует максимальная сцепленная система из λX с нижней размерностью квантования, равной b, и с носителем X. Также существует максимальная сцепленная система из λX с носителем X, нижняя и верхняя размерности квантования которой совпадают с нижней и верхней емкостной размерностями X соответственно.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.306

Ключевые слова: емкостная размерность, размерность квантования, суперрасширение.

Пусть $\mathscr{F}$ — полунормальный сохраняющий вес метризуемый функтор в категории $Comp$ компактов и их непрерывных отображений, (X,ρ) — метрический компакт. Тогда для любой точки $\xi \in \mathscr{F}(X)$ определены верхняя $\overline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi$ и нижняя $\underline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi$ размерности квантования (см. [1]). Известно, что для функтора экспоненты $\exp$ размерности квантования совпадают с емкостными размерностями $\dim_B$ замкнутых подмножеств X. Для функтора суперрасширения λ размерности квантования исследованы в работе [2], где в частности, были установлены неравенства

$$\underline{\dim}_\lambda \xi \le \underline{\dim}_B \operatorname{supp}(\xi), \quad \overline{\dim}_\lambda \xi \le \overline{\dim}_B \operatorname{supp}(\xi)$$

для любой максимальной сцепленной системы (мсс) $\xi \in \lambda X$ и доказана следующая теорема о промежуточных значениях верхней размерности квантования:

Теорема 1 [2]. *Пусть (X,ρ) — метрический компакт и $\overline{\dim}_B X = a$. Тогда для любого числа b такого, что $0 \le b \le a$, существует мсс $\xi_b \in \lambda X$, для которой $\overline{\dim}_\lambda \xi_b = b$ и $\operatorname{supp}(\xi_b) = X$.*

Доказательство этой теоремы существенно опирается на доказанную в той же работе теорему о промежуточных значениях для верхней емкостной размерности.

Теорема 2 [2]. *Пусть (X,ρ) — метрический компакт и $\overline{\dim}_B X = a$. Тогда для любого числа b такого, что $0 \le b < a$, существует замкнутое подмножество $F_b \subset X$, для которого $\overline{\dim}_B F_b = b$.*

Для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение в общем случае неверно: в работе [3] построен пример метрического компакта X такого,

Статья подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

что $\underline{\dim}_B X = 1$ и $\underline{\dim}_B F = 0$ для любого непустого собственного замкнутого $F \subset X$. Таким образом, использованная в работе [2] схема доказательства теоремы 1 не может быть реализована для нижней размерности квантования. Тем не менее утверждение о промежуточных значениях для нижней размерности квантования максимальных сцепленных систем имеет место, и в этом состоит основной результат настоящей статьи (теорема 3): для любого метрического компакта (X, ρ) и любого неотрицательного числа $b \leq \underline{\dim}_B X = a$ существует мсс $\xi \in \lambda X$, для которой $\underline{\dim}_\lambda \xi = b$ и $\operatorname{supp}(\xi) = X$. Данная теорема показывает, что даже в тех случаях, когда в множестве значений нижней емкостной размерности замкнутых подмножеств метрического компакта X имеются лакуны, нижняя размерность квантования максимальных сцепленных систем заполняет весь диапазон значений от нуля до $\underline{\dim}_B X$.

В работе доказано также, что для любого метрического компакта (X, ρ) существует мсс ξ, для которой

$$\underline{\dim}_\lambda \xi = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_\lambda \xi = \overline{\dim}_B X, \quad \operatorname{supp}(\xi) = X.$$

Напомним необходимые определения. Ковариантный функтор $\mathscr{F}$ в категории Comp компактов и их непрерывных отображений называется *полунормальным*, если он мономорфен, непрерывен, сохраняет пересечения, точку и пустое множество (см. [4]). Для каждого полунормального функтора $\mathscr{F}$, компакта X и точки $\xi \in \mathscr{F}(X)$ определено понятия носителя $\operatorname{supp}(\xi)$ — это наименьшее по включению замкнутое $A \subset X$ такое, что $\xi \in \mathscr{F}(A)$. Для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{F}_n(X) = \{\xi \in \mathscr{F}(X) : \operatorname{supp}(\xi) \leq n\}.$$

При этом $\mathscr{F}_1(X)$ гомеоморфно X и можно считать, что $X \subset \mathscr{F}(X)$. Для любого полунормального функтора $\mathscr{F}$ и любого компакта X множество $\bigcup\limits_{n \in N} \mathscr{F}_n X$ всюду плотно в $\mathscr{F}(X)$ (см. [4]).

Функтор $\mathscr{F}$ имеет бесконечную степень, если $\mathscr{F}_n(X) \neq \mathscr{F}(X)$ для любого бесконечного X и любого $n \in \mathbb{N}$.

Функтор $\mathscr{F}$ называется *метризуемым* (по В. В. Федорчуку, см. [5]), если для всякой метрики ρ на метризуемом компакте X можно указать совместимую с топологией метрику $\rho_{\mathscr{F}}$ на $\mathscr{F}(X)$ так, что

1) для любого изометрического вложения i метризуемых компактов $\mathscr{F}(i)$ также изометрическое вложение;

2) $\rho_{\mathscr{F}}|_X = \rho$;

3) $\operatorname{diam}(\mathscr{F}(X)) = \operatorname{diam}(X)$.

При этом по определению семейство метрик $\{\rho_{\mathscr{F}}\}$ задает метризацию функтора $\mathscr{F}$.

Далее всюду X — метрический компакт с метрикой ρ.

Если $\mathscr{F}$ — полунормальный сохраняющий вес метризуемый семейством метрик $\{\rho_{\mathscr{F}}\}$ функтор бесконечной степени, то для любой точки $\xi \in \mathscr{F}(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно определить число

$$N(\xi, \varepsilon, \mathscr{F}(X)) = \min\{n : \rho_{\mathscr{F}}(\xi, \mathscr{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

Верхней и *нижней размерностью квантования* ξ называются числа

$$\overline{\dim}_{\mathscr{F}} \xi = \inf\{\alpha : \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathscr{F}(X)) = 0\},$$

$$\underline{\dim}_{\mathscr{F}} \xi = \inf\{\alpha : \varliminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathscr{F}(X)) = 0\}.$$

В работах [2, 6] размерность квантования исследовалась под названиями «порядок метрической аппроксимации» и «размерность финитной аппроксимации»; квантование, по сути, это сокращение слов «финитная аппроксимация».

Имеют места следующие равенства (см. [1]):

$$\overline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\log N(\xi,\varepsilon,\mathscr{F}(X))}{-\log\varepsilon}, \quad \underline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\xi,\varepsilon,\mathscr{F}(X))}{-\log\varepsilon}.$$

Очевидно, что $\overline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi \geq \underline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi$ для любой точки $\xi \in \mathscr{F}(X)$.

Также верно следующее

Предложение 1 [1]. *Если последовательность $\varepsilon_n > 0 : n \in \mathbb{N}$ сходится к нулю монотонно и существует $c > 0$ такое, что $\varepsilon_{n+1} \geq c\varepsilon_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то*

$$\overline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log N(\xi,\varepsilon_n,\mathscr{F}(X))}{-\log\varepsilon_n}, \quad \underline{\dim}_{\mathscr{F}}\xi = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\log N(\xi,\varepsilon_n,\mathscr{F}(X))}{-\log\varepsilon_n}.$$

В дальнейшем, если из контекста ясно, о каком функторе идет речь, будем писать $N(\xi,\varepsilon)$ вместо $N(\xi,\varepsilon,\mathscr{F}(X))$. Также будем использовать стандартные обозначения:

$$B(F,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,F) \leq \varepsilon\}, \quad O(F,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,F) < \varepsilon\},$$

где F — подмножество X.

Функтор экспоненты exp, ставящий в соответствие компакту X пространство его непустых замкнутых подмножеств (см. [7]), полунормален, сохраняет вес, обладает бесконечной степенью и метризуем при помощи метрики Хаусдорфа

$$\rho_H(F,G) = \inf\{\varepsilon : F \subset B(G,\varepsilon), G \subset B(F,\varepsilon)\},$$

где F, G — непустые замкнутые подмножества X. Как было отмечено, размерности квантования точек $F \in \exp X$ (т. е. непустых замкнутых подмножеств X) совпадают с верхней и нижней емкостными размерностями $\overline{\dim}_B F$ и $\underline{\dim}_B F$ множества F (см. [1]).

Функтор суперрасширения λ, ставящий в соответствие компакту X пространство максимальных сцепленных систем λX, также полунормален, сохраняет вес, имеет бесконечную степень и метризуем (см. [5]) при помощи метрики

$$\rho_\lambda(\xi,\eta) = \inf\{\varepsilon : \forall F \in \xi\ B(F,\varepsilon) \in \eta\}.$$

Таким образом, для мсс $\xi \in \lambda X$ определены верхняя и нижняя размерности квантования $\overline{\dim}_\lambda\xi$ и $\underline{\dim}_\lambda\xi$.

Нам потребуются также следующая конструкция, предложенная в [8]. Пусть $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающихся последовательности, состоящие из попарно различных точек X, причем $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $A_i = \{x_1,\ldots,x_i,y_i\}$, $B_i = \{y_1,\ldots,y_i,x_{i+1}\}$ и рассмотрим сцепленную систему

$$\xi' = \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{B_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Система ξ' единственным образом дополняется до мсс в X, которую обозначают через $\xi(A,B)$. Для всех $i \in \mathbb{N}$ множества A_i и B_i являются минимальными по включению элементами $\xi(A,B)$ и $\mathrm{supp}(\xi(A,B)) = \overline{A \cup B}$.

Ниже рассматриваются только последовательности, состоящие из попарно различных точек.

Напомним, что множество $F \subset X$ называется *ε-разделенным* для некоторого $\varepsilon > 0$, если $\rho(x,y) > \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in F$. Любое ε-разделенное подмножество компакта конечно. Подмножество $F \subset X$ называется *ε-сетью* в X, если $B(F,\varepsilon) = X$.

Лемма 1. *Если $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающихся последовательности точек X такие, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$, и для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ множество $D = \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ ε-разделенное, то $N(\xi(A,B), \varepsilon/2) \geq 2k$.*

Доказательство. Пусть η — мсс с конечным носителем, для которой выполняется неравенство $\rho_\lambda(\xi(A,B), \eta) \leq \varepsilon/2$.

Для каждой точки $z \in D \setminus \{x_{k+1}\}$ существуют $F_1, F_2 \in \xi(A,B)$ такие, что $F_1 \cap F_2 = \{z\}$ и $F_1, F_2 \subset D$. Множество D ε-разделенное, стало быть, $B(F_1, \varepsilon/2) \cap B(F_2, \varepsilon/2) = B(z, \varepsilon/2)$. При этом $B(F_1, \varepsilon/2), B(F_2, \varepsilon/2) \in \eta$. Значит, $B(F_1, \varepsilon/2) \cap B(F_2, \varepsilon/2) \cap \operatorname{supp}(\eta) \neq \varnothing$.

Итак, для любой точки $z \in D \setminus \{x_{k+1}\}$ пересечение $\operatorname{supp}(\eta) \cap B(z, \varepsilon/2)$ непусто. Следовательно, $|\operatorname{supp}(\eta)| \geq 2k$. $\square$

Лемма 2. *Если $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающиеся последовательности точек X такие, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$, и для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\rho(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \varepsilon$, то $N(\xi(A,B), \varepsilon) \leq 2k + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим $D = \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ и сцепленную систему $\eta' = \{A_i : i \leq k\} \cup \{B_i : i \leq k\} \cup \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$. Существует единственная мсс $\eta \in \lambda(X)$, содержащая η'. Очевидно, что $\operatorname{supp}(\eta) = D$. Следовательно, $|\operatorname{supp}(\eta)| = 2k + 1$.

Все элементы η' кроме множества $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ содержатся в $\xi(A,B)$. При этом $y_{k+1} \in B(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}, \varepsilon)$, а значит, $A_{k+1} \subset B(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}, \varepsilon)$. Следовательно, $B(F, \varepsilon) \in \xi(A,B)$ для любого $F \in \eta$. Поэтому $\rho_\lambda(\xi(A,B), \eta) \leq \varepsilon$ и $N(\xi(A,B), \varepsilon) \leq 2k + 1$. $\square$

Предложение 2. *Для любого метрического компакта (X, ρ) существует мсс ξ, для которой*

$$\underline{\dim}_\lambda \xi = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_\lambda \xi = \overline{\dim}_B X, \quad \operatorname{supp}(\xi) = X.$$

Доказательство. Положим $\varepsilon_k = 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Построим по индукции возрастающую (по включению) последовательность $G_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, состоящую из ε_k-разделенных ε_k-сетей в X. В качестве G_1 возьмем максимальное ε_1-разделенное подмножество X. Предположим, что G_{k-1} уже построено. В множестве $X \setminus B(G_{k-1}, \varepsilon_k)$ выберем максимальное ε_k-разделенное подмножество C_k и положим $G_k = G_{k-1} \cup C_k$.

Продолжая индукцию, получим искомую последовательность $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$. Положим $G = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} G_k$. Легко проверить, что G всюду плотно в X. Выделим в G фундаментальную последовательность $Z = \{z_i : i \in \mathbb{N}\}$, состоящую из попарно различных точек. Распределим теперь точки G по двум непересекающимся последовательностям $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $G_k \cap A = \{x_1, \dots, x_{n_k}\}$, $G_k \cap B = \{y_1, \dots, y_{m_k}\}$;
2) $n_k \geq m_k$ и $n_k - m_k \leq 1$;
3) пересечения $A \cap Z$ и $B \cap Z$ бесконечны.

Из условия 3 следует, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$, следовательно, определена мсс $\xi(A,B)$, причем $\operatorname{supp}(\xi(A,B)) = X$. Множество $D = \{x_1, \dots, x_{n_k}\} \cup \{y_1, \dots, y_{n_k - 1}\}$ является ε_k-разделенным, следовательно, по лемме 1

$$N(\xi(A,B), \varepsilon_k/2) \geq 2(n_k - 1) \geq |G_k| - 2 \geq N(X, \varepsilon_k) - 2.$$

Применяя предложение 1, получаем

$$\underline{\dim}_\lambda \xi(A,B) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log N(\xi(A,B),\varepsilon_k/2)}{-\log \varepsilon_k/2} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log(N(X,\varepsilon_k)-2)}{-\log \varepsilon_k/2} = \underline{\dim}_B X,$$

$$\overline{\dim}_\lambda \xi(A,B) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\log N(\xi(A,B),\varepsilon_k/2)}{-\log \varepsilon_k/2} \geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\log(N(X,\varepsilon_k)-2)}{-\log \varepsilon_k/2} = \overline{\dim}_B X.$$

Из [2, предложение 2] следует, что

$$\underline{\dim}_\lambda \xi(A,B) \leq \underline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi(A,B))) = \underline{\dim}_B X,$$
$$\overline{\dim}_\lambda \xi(A,B) \leq \overline{\dim}_B(\mathrm{supp}(\xi(A,B))) = \overline{\dim}_B X.$$

Значит, $\xi(A,B)$ — искомая максимальная сцепленная система. $\square$

Теорема 3. *Пусть (X,ρ) — метрический компакт. Для любого неотрицательного числа $b \leq \underline{\dim}_B X = a \leq \infty$ существует мсс $\xi \in \lambda X$, для которой $\underline{\dim}_\lambda(\xi) = b$ и $\mathrm{supp}(\xi) = X$.*

Доказательство. Для $b = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 2. Случай $b = a$ рассмотрен в предложении 2. Пусть $b \in (0,a)$. Положим $\varepsilon_k = 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. В силу предложения 1 получаем

$$a = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log N(X,\varepsilon_k)}{-\log \varepsilon_k} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log N(X,2\varepsilon_k)}{-\log \varepsilon_k} > b,$$

откуда следует, что при достаточно больших k

$$N(X,2\varepsilon_k) > 2^{kb}. \tag{1}$$

Пусть натуральное число k_0 таково, что для всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство (1), и числа

$$n_k = [2^{kb-1}] - 1 \tag{2}$$

положительны и попарно различны.

Фиксируем предельную точку $p \in X$. Построим по индукции последовательности натуральных чисел $T = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ и пар точек $x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}} \in X$, $i \in \mathbb{N}$, следующим образом.

Шаг 1. Пусть k_1 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям: $k_1 > k_0$ и $B(p,\varepsilon_{k_1}) \setminus B(p,\varepsilon_{k_1+1}) \neq \varnothing$. Выберем точки $x_{n_{k_1}} \in B(p,\varepsilon_{k_1}) \setminus B(p,\varepsilon_{k_1+1})$ и $y_{n_{k_1}} \in O(p,\varepsilon_{k_1+1})$ так, что $\rho(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}) > \varepsilon_{k_1+1}$. Легко проверить, что $\rho(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}) \leq 2\varepsilon_{k_1}$.

Шаг 2. Пусть k_2 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям: $2\varepsilon_{k_2} < \rho(p, y_{n_{k_1}})$ и $B(p,\varepsilon_{k_2}) \setminus B(p,\varepsilon_{k_2+1}) \neq \varnothing$. Дословно повторив проведенные выше рассуждения (с заменой индекса k_1 на k_2), выберем точки $x_{n_{k_2}} \in B(p,\varepsilon_{k_2}) \setminus B(p,\varepsilon_{k_2+1})$ и $y_{n_{k_2}} \in O(p,\varepsilon_{k_2+1})$.

Продолжая индукцию, получим множество $T = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ и последовательности $A' = \{x_{n_{k_i}} : i \in \mathbb{N}\}$, $B' = \{y_{n_{k_i}} : i \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что $|k_i - k_j| > 1$ для любых различных $i,j \in \mathbb{N}$, а также что $(A' \cup B') \setminus B(p,2\varepsilon_k) \subset \big(\bigcup\limits_{k_i<k} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i<k} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ для любого $k \geq k_0$.

Будем строить по индукции возрастающую (по включению) последовательность конечных подмножеств $G_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

(a) $G_k \cap (A' \cup B') = \varnothing$;

(b) $G_k \cup \{p\}$ — $2\varepsilon_k$-разделенное множество;

(c) $G_k \cup \big(\bigcup\limits_{k_i \le k} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ — ε_k-разделенное множество;

(d) $G_k \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\}\big) \cup \{p\}$ — $2\varepsilon_k$-сеть.

Шаг $k = k_0$. В качестве G_{k_0} возьмем максимальное $2\varepsilon_{k_0}$-разделенное подмножество $X \setminus B(p, 2\varepsilon_{k_0})$. Очевидно, что все перечисленные выше условия выполняются.

Шаг $k > k_0$. Пусть C_k — максимальное $2\varepsilon_k$-разделенное подмножество $X \setminus B(G_{k-1} \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\}\big) \cup \{p\}, 2\varepsilon_k)$. Тогда положим $G_k = G_{k-1} \cup C_k$. Условия (a), (b) и (d) будут выполняться для G_k в силу свойств A', B', построения C_k и того факта, что условие (a) выполнялось для G_{k-1}. Проверим выполнение условия (c).

Если $k = k_j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то в силу выполнения условия (c) для G_{k_j-1}, а также того, что $k_j - 1 \notin T$, множество $G_{k_j-1} \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k_j} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ будет $2\varepsilon_{k_j}$-разделенным. В силу построения C_{k_j} множество $G_{k_j} \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k_j} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ также является $2\varepsilon_{k_j}$-разделенным. Это множество не пересекает $B(p, 2\varepsilon_{k_j})$ в силу выполнения условия (b) для G_{k_j} и построения точек $x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}$. Точка $x_{n_{k_j}}$ содержится в $B(p, \varepsilon_{k_j})$, а значит, $G_{k_j} \cup \big(\bigcup\limits_{k_i \le k_j} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ будет ε_{k_j}-разделенное.

Если $k = k_j + 1$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то в силу выполнения условия (c) для G_{k_j} множество $G_{k_j} \cup \big(\bigcup\limits_{k_i \le k_j} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ — $2\varepsilon_{k_j+1}$-разделенное. В силу построения C_{k_j+1} множество $G_{k_j+1} \cup \big(\bigcup\limits_{k_i \le k_j} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ также $2\varepsilon_{k_j+1}$-разделенное. Это множество пересекает $B(p, 2\varepsilon_{k_j+1})$ только по точке $x_{n_{k_j}}$ в силу выполнения условия (b) для G_{k_j+1} и построения точек $x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}$. Кроме того, $\rho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) > \varepsilon_{k_j+1}$ и $y_{n_{k_j}} \in B(p, \varepsilon_{k_j+1})$. Значит, $G_{k_j+1} \cup \big(\bigcup\limits_{k_i \le k_j} \{x_{n_{k_i}}\}\big) \cup \big(\bigcup\limits_{k_i \le k_j} \{y_{n_{k_i}}\}\big)$ ε_{k_j+1}-разделенно. В силу того, что $k_j + 1 \notin T$, условие (c) для G_{k_j+1} тем самым проверено.

Если $k_j + 1 < k < k_{j+1}$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то выполнение условия (c) будет следовать из выполнения этого условия для G_{k-1} и построения C_k.

Продолжая индукцию, получаем искомую последовательность G_k. Положим
$$G = \bigcup_{k \ge k_0} G_k.$$
Точка p является предельной точкой последовательностей A' и B'. Поэтому в силу условия (d) множество $G \cup A' \cup B'$ будет всюду плотным в X. Из условий (d), (1) и (2) следует, что
$$\Big|G_k \cup \Big(\bigcup_{k_i < k} \{x_{n_{k_i}}\}\Big) \cup \Big(\bigcup_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\}\Big)\Big| \ge N(X, 2\varepsilon_k) - 1 \ge 2n_k. \tag{3}$$

Положим $S = \mathbb{N} \setminus T$. В силу неравенства (3) множество G можно представить в виде объединения двух непересекающихся последовательностей $A'' =$

$\{x_i : i \in S\}$ и $B'' = \{y_i : i \in S\}$ так, чтобы для любого $k \geq k_0$ выполнялось включение $\{x_j : j \in S,\ j \leq n_k\} \cup \{y_j : j \in S,\ j \leq n_k\} \subset G_k$. Объединяя последовательности A' с A'' и B' с B'', получим (соответственно) последовательности $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Для любого $k \in T$ имеем $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq 2\varepsilon_k$, следовательно, $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Из свойства (c) следует, что $\{x_j : j \in \mathbb{N},\ j \leq n_k\} \cup \{y_j : j \in \mathbb{N},\ j < n_k\}$ — ε_k-разделенное множество для всех $k \geq k_0$. В силу леммы 1 $N(\xi(A,B), \varepsilon_k/2) \geq 2n_k - 2$. Применяя к данному неравенству предложение 1 и (2), получаем, что

$$\underline{\dim}_\lambda \xi(A,B) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log N(\xi(A,B), \varepsilon_k/2)}{-\log \varepsilon_k/2} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log(2n_k - 2)}{-\log \varepsilon_k/2} = b.$$

Для любого $k_i \in T$ будет $\rho(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) \leq 2\varepsilon_{k_i}$, поэтому по лемме 2 верно неравенство $N(\xi(A,B), 2\varepsilon_{k_i}) \leq 2n_{k_i} - 1$. С учетом предложения 1 и того факта, что T бесконечно, получаем

$$\underline{\dim}_\lambda \xi(A,B) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log N(\xi(A,B), 2\varepsilon_k)}{-\log 2\varepsilon_k} \leq \varliminf_{i\to\infty} \frac{\log N(\xi(A,B), 2\varepsilon_{k_i})}{-\log 2\varepsilon_{k_i}} \leq \varliminf_{i\to\infty} \frac{\log(2n_{k_i} - 1)}{-\log 2\varepsilon_{k_i}} = b.$$

Так как $A \cup B$ всюду плотно в X, носитель $\operatorname{supp}(\xi(A,B))$ равен X. Итак, $\xi(A,B)$ — искомая максимальная сцепленная система. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form $\mathscr{F}(X)$ // Topology Appl. 2017. V. 221. P. 107–113.
2. *Иванов А. В., Фомкина О. В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Тр. Карел. науч. центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14.
3. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 540–545.
4. *Fedorchuk V., Todorcevic S.* Cellularity of covariant functors // Topology Appl. 1997. V. 76. P. 125–150.
5. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 2. С. 396–417.
6. *Иванов А. В.* О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. Т. 63. С. 15–26.
7. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
8. *Вакулова (Кашуба) Е. В.* О носителях максимальных сцепленных систем // Тр. ПГУ. Математика. 2004. № 11. С. 3–8.

Поступила в редакцию 2 декабря 2023 г.
После доработки 2 декабря 2023 г.
Принята к публикации 25 января 2024 г.

Иванов Андрей Александрович (ORCID 0009-0002-8303-2544)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра общей топологии и геометрии;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1, Москва 119991
an98iv@yandex.ru