Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2024. Том 65, № 3

УДК 517.518+517.54

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

С. К. Водопьянов, С. В. Павлов

Аннотация. Работа посвящена исследованию задачи о граничном соответствии для последовательности гомеоморфизмов, изменяющих емкость конденсаторов контролируемым образом. Для изучения совместного граничного поведения указанных отображений введены емкостные метрики в последовательности областей, обладающей невырожденным ядром, посредством пополнения по которым к последовательности областей присоединяются новые элементы, называемые граничными. В качестве следствия получены достаточные условия глобальной равномерной сходимости последовательности гомеоморфизмов, а также приведены некоторые приложения к задачам математической теории упругости.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.305

Ключевые слова: квазиконформный анализ, простые концы, емкость конденсатора, емкостная метрика, отображения с конечным искажением.

Введение

Конструкция простых концов, введенная Каратеодори [1], позволила исследовать граничное поведение плоского конформного отображения в ситуации, когда оно задано на области с нерегулярной границей. В работах [2–7] данная теория развивается на плоскости и в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ (в работе [7] приведена обширная библиография по обсуждаемому вопросу). В [8] описано ее обобщение применительно к последовательности плоских конформных отображений круга, в рамках которого изучено поведение последовательностей вида $\{f_n(z_n)\}$, где $\{f_n : Q \to B_n\}$ — последовательность отображений единичного круга Q на области B_n, $\{z_n\}$ — последовательность внутренних точек круга Q, сходящаяся к некоторой точке $z_0 \in \partial Q$ (см. также монографию [9], где рассматривается более общая ситуация). В работе [10] представлен подход к описанию граничного соответствия для пространственного гомеоморфизма класса $\mathscr{Q}_{q,p}$ в терминах емкостных метрик.

Идея исследования граничного поведения состоит в том, чтобы

(1) построить метрику, ассоциированную с геометрией отображения;
(2) пополнить область по этой метрике;
(3) продолжить отображение на присоединенную границу, т. е. доопределить отображение на добавившихся при пополнении элементах;

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

(4) в том случае, когда известна связь евклидовой и присоединенной границ, описать граничное поведение отображения в терминах евклидовой метрики.

В работе рассматривается последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \to D_j)$, удовлетворяющих емкостному неравенству

$$\operatorname{cap}^{1/q}\big(\theta_j(E); L^1_q(D_j)\big) \le K \operatorname{cap}^{1/p}\big(E; L^1_p(D'_j)\big)$$

для всех конденсаторов E в D'_j и всех $j \in \mathbb{N}$ с некоторой константой $K < \infty$. Здесь все D'_j, D_j — области в $\mathbb{R}^n$, $n-1 < q \le p \le n$ при $n > 2$ и $1 \le q \le p \le 2$ при $n = 2$. Мы вводим емкостную метрику в последовательности областей и рассматриваем два подхода к определению граничных элементов, т. е. к пополнению возникающего метрического пространства. Первый подход, основанный на стандартной конструкции Хаусдорфа пополнения метрического пространства, представляет собой прямолинейное обобщение идей работы [10] и дает описание граничного поведения предельного для ϑ гомеоморфизма θ_0, заданного на ядре D'_0 последовательности областей (D'_j). Второй подход исходит из альтернативного способа пополнения и приводит к характеризации предельного поведения последовательностей вида $(\theta_j(y_j))$, где $y_j \in D'_j$. Устанавливается связь между указанными подходами.

1. Предварительные сведения

Символом d будем обозначать евклидову метрику в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$d(y^1, y^2) = \big(\big(y^1_1 - y^2_1\big)^2 + \dots + \big(y^1_n - y^2_n\big)^2\big)^{1/2},$$

где $y^1 = \big(y^1_1, \dots, y^1_n\big)$ и $y^2 = \big(y^2_1, \dots, y^2_n\big)$ — точки из $\mathbb{R}^n$. Также будем всегда предполагать, что $n \ge 2$.

Областью будем называть непустое открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$. Связный компакт в $\mathbb{R}^n$, состоящий более чем из одной точки, будем называть *континуумом.*

Определение 1 [9]. Пусть дана последовательность областей $\mathscr{D}' = (D'_j)_{j=1}^{\infty}$ такая, что некоторый шар $B(a, r)$, $r > 0$, содержится в почти всех (п. в.) D'_j, т. е. во всех D'_j за исключением, быть может, лишь конечного их числа. *Невырожденным ядром последовательности областей $\mathscr{D}'$ относительно точки a* называется наибольшая по включению область D'_0 среди областей D', удовлетворяющих условиям:

(1) $a \in D'$;

(2) если компакт F содержится в D', то F содержится в D'_j при п. в. j.

Нетрудно убедиться, что при наличии шара $B(a, r)$ из определения 1 ядро последовательности областей относительно точки a существует [11, 12]. Обратим внимание на то, что ядро зависит от точки a: например, ядра последовательности областей

$$D'_j = (-1; 1)^2 \setminus (\{0\} \times [-1 + 2^{-j}; 1 - 2^{-j}])$$

относительно точек $(-1/2, 0)$ и $(1/2, 0)$ суть $(-1; 0) \times (-1; 1)$ и $(0; 1) \times (-1; 1)$ соответственно. В то же время если D'_0 — невырожденное ядро последовательности областей $\mathscr{D}'$ относительно точки a, то D'_0 является ядром последовательности $\mathscr{D}'$ относительно любой точки $b \in D'_0$. В дальнейшем, говоря о ядре последовательности областей, мы предполагаем существование шара $B(a, r)$ из определения 1 с каким-нибудь центром a и радиусом $r > 0$.

Определение 2. Пусть задана последовательность областей $\mathscr{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0. *Мультиконтинуумом в последовательности областей* $\mathscr{D}'$ будем называть последовательность $\mathscr{F} = (F_j)_{j=1}^{\infty}$ континуумов $F_j \subset D'_j$, для которой в ядре D'_0 найдется континуум F_0, к которому (F_j) сходится по метрике Хаусдорфа[1)].

Если $\mathscr{F}$ и F_0 — соответственно мультиконтинуум и континуум из определения 2, то будем говорить, что F_0 — *континуум в ядре, соответствующий мультиконтинууму* $\mathscr{F}$.

Предложение 1. *Пусть заданы последовательность областей $\mathscr{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0 и точка $y \in \partial D'_0$. Тогда любая окрестность точки y имеет непустое пересечение с бесконечно многими границами $\partial D'_j$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется положительное число r такое, что для п. в. j пересечения $B(y,r) \cap \partial D'_j$ пустые. Поскольку y принадлежит границе области D'_0, то найдется точка $z \in B(y,r) \cap D'_0$. Согласно определению ядра $z \in B(y,r) \cap D'_j$ для п. в. j. Так как для каждого достаточно большого j одновременно выполнены соотношения

$$B(y,r) \cap \partial D'_j = \varnothing \text{ и } B(y,r) \cap D'_j \neq \varnothing,$$

то $B(y,r) \subset D'_j$ для п. в. j. Из того, что $B(y,r)$ имеет непустое пересечение с ядром D'_0, следует включение $B(y,r) \subset D'_0$, чего быть не может, ведь y — граничная точка области D'_0. $\square$

Обозначим через $\mathscr{O}(D')$ систему открытых подмножеств области D', обладающую следующими свойствами:

(1) $D' \in \mathscr{O}(D')$ и если куб Q содержится в D' со своим замыканием, то $Q \in \mathscr{O}(D')$;

(2) если $\{U_l \in \mathscr{O}(D')\}$ — конечный дизъюнктный набор, то $\bigcup\limits_l U_l \in \mathscr{O}(D')$.

Определение 3. Отображение $\Phi : \mathscr{O}(D') \to [0;\infty]$ называется *квазиаддитивной функцией множества*, если

(1) для всякой точки $y \in D'$ существует положительное число $\delta(y)$ такое, что $\overline{Q}(y,\delta(y)) \subset D'$ и $0 < \Phi(Q(y,\delta)) < \infty$ для всех $\delta \in (0;\delta(y))$;

(2) для всякого конечного дизъюнктного набора $\{U_l \in \mathscr{O}(D')\}$ открытых множеств таких, что $\bigcup U_l \subset U$, где $U \in \mathscr{O}(D')$, верно неравенство

$$\sum_l \Phi(U_l) \leq \Phi(U).$$

Отображение $\varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{R}^n)$ называется *отображением с конечным искажением*, если $D\varphi = 0$ п. в. на множестве $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана, где $D\varphi = (\partial\varphi_i/\partial x_j)_{i,j=1}^n$.

Пусть в области D' задан *конденсатор* $E = (F_1, F_0)$: пара непересекающихся континуумов F_1, $F_0 \subset D'$. Непрерывную функцию u класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ будем называть *допустимой для E в D'*, если $u(y) = 1$ для $y \in F_1$, $u(y) = 0$ для $y \in F_0$ и $0 \leq u(y) \leq 1$ для $y \in D'$.

[1)] Расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B определяется как точная нижняя грань множества всех чисел $r > 0$ таких, что замкнутая r-окрестность A содержит B и замкнутая r-окрестность B содержит A.

Емкость конденсатора $E = (F_1, F_0)$ *в пространстве* $L^1_p(D')$, $1 \le p < \infty$, определяется как величина

$$\operatorname{cap}\bigl(E; L^1_p(D')\bigr) = \inf_u \int\limits_{D'} |\nabla u(x)|^p \, dx,$$

где инфимум берется по всем допустимым для конденсатора E в области D' функциям $u \in L^1_p(D')$.

Теорема 1 [13]. *Пусть* $\varphi : D \to D'$ *— гомеоморфизм областей* D, $D' \subset \mathbb{R}^n$, *где* $n \ge 2$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для любого кубического конденсатора* $E = (\overline{Q}(y,r), \partial Q(y,R))$, $r < R$, *в* D' *с прообразом* $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(\overline{Q}(y,r)), \varphi^{-1}(\partial Q(y,R)))$ *в* D *выполняется неравенство*

$$\operatorname{cap}^{1/q}\bigl(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\bigr) \le \begin{cases} K_p \operatorname{cap}^{1/p}\bigl(E; L^1_p(D')\bigr), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi_{q,p}(Q(y,R) \setminus \overline{Q}(y,r))^{1/\sigma} \operatorname{cap}^{1/p}\bigl(E; L^1_p(D')\bigr), & 1 < q < p < \infty, \end{cases}$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $K_p < \infty$ *— положительная постоянная, а* $\Psi_{q,p}$ *— некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества, определенная на системе открытых подмножеств области* D', *включающей в себя объединения всех конечных дизъюнктных наборов кубических колец* $Q(y,R) \setminus \overline{Q}(y,r)$ *и кубов* $Q(y,r)$, *содержащихся в* D' *со своими замыканиями;*

(2) *гомеоморфизм* φ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, *имеет конечное искажение и операторная функция искажения*

$$K_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{1/p}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \ne 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *при* $1 < q < p < \infty$ *и* $\sigma = \infty$ *при* $1 < q = p < \infty$;

(3) *оператор композиции* $\varphi^* : L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \to L^1_q(D)$, *определенный по правилу* $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, *является ограниченным;*

(4) *для любого конденсатора* $E = (F_1, F_0)$ *в* D' *с прообразом* $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F_1), \varphi^{-1}(F_0))$ *в* D *выполняется неравенство*

$$\operatorname{cap}^{1/q}\bigl(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\bigr) \le \begin{cases} \widetilde{K}_p \operatorname{cap}^{1/p}\bigl(E; L^1_p(D')\bigr), & 1 < q = p < \infty, \\ \widetilde{\Psi}_{q,p}(D' \setminus (F_0 \cup F_1))^{1/\sigma} \operatorname{cap}^{1/p}\bigl(E; L^1_p(D')\bigr), & 1 < q < p < \infty, \end{cases}$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\widetilde{K}_p < \infty$ *— положительная постоянная, а* $\widetilde{\Psi}_{q,p}$ *— некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества, определенная на некоторой системе открытых подмножеств области* D', *включающей в себя объединения всех конечных дизъюнктных наборов множеств вида* $D' \setminus (F_1 \cup F_0)$, *где* (F_1, F_0) *— конденсатор в* D', *и кубов* $Q(y,r)$, *содержащихся в* D' *со своими замыканиями.*

Равносильность утверждений (1)–(4) *сохраняется при* $1 = q \le p < \infty$ *и* $n = 2$, *если в условии* (1) *неравенства выполнены также для конденсаторов* $E = (F_1, F_0)$ *в* D', *имеющих один из двух следующих видов:*

$$F_1 = \partial([a-r, a+r] \times [b; c]), \quad F_0 = \{a\} \times [b+r; c-r], \quad 2r < c-b;$$

$$F_1 = \partial([b;c] \times [a-r, a+r]), \quad F_0 = [b+r; c-r] \times \{a\}, \quad 2r < c-b.$$

Если выполнено одно из условий (1)–(4), *то величина*

$$\sup_E \frac{\operatorname{cap}^{1/q}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\right)}{\operatorname{cap}^{1/p}\left(E; L^1_p(D')\right)},$$

где супремум берется по всем конденсаторам E в D', обладающим положительной емкостью в пространстве $L^1_p(D')$, оценивается сверху через $\|K_{q,p}(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(D)\|$.

Непосредственно из определения емкости следует

Предложение 2 (монотонность емкости). *Пусть в области D' содержится конденсатор (F_1, F_0). Пусть еще $\widetilde{D}'$ — область, содержащая D', и $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_0$ — континуумы такие, что $\widetilde{F}_1 \subset F_1$, $\widetilde{F}_0 \subset F_0$. Тогда*

$$\operatorname{cap}\left(\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_0; L^1_p(D')\right) \le \operatorname{cap}\left(F_1, F_0; L^1_p(D')\right) \le \operatorname{cap}\left(F_1, F_0; L^1_p(\widetilde{D}')\right).$$

Следующая лемма позволяет установить топологическую эквивалентность евклидовой и емкостных метрик. В [10, лемма 2.1] она доказана в случае, когда S_1 и S_0 — замкнутые шары, а континуумы $T_{0,j}$ попарно совпадают.

Лемма 1. *Пусть D' — область в $\mathbb{R}^n$, S_1 и S_0 — непересекающиеся компакты в D', $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$. Пусть задана последовательность конденсаторов $\{(T_{1,j}, T_{0,j})\}$ в D' таких, что $T_{1,j} \subset S_1$, $T_{0,j} \subset S_0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Если $\varliminf\limits_j \operatorname{diam} T_{0,j} > 0$, то соотношение*

$$\lim_j \operatorname{cap}\left(T_{1,j}, T_{0,j}; L^1_p(D')\right) = 0 \tag{1}$$

выполняется в том и только том случае, когда

$$\lim_j \operatorname{diam} T_{1,j} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость докажем от противного.

(1.1) Пусть выполнено (1), а условие (2) нарушается: $\varlimsup\limits_j \operatorname{diam} T_{1,j} > 0$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что предел $\lim\limits_j \operatorname{diam} T_{1,j}$ положителен.

Фиксируем произвольные точки $y_{1,j} \in T_{1,j}$ и $y_{0,j} \in T_{0,j}$, $j \in \mathbb{N}$. Так как точки последовательности $\{y_{i,j}\}_{j=1}^\infty$, $i = 0, 1$, принадлежат компактному множеству S_i, то, переходя дважды к подпоследовательностям, можно считать, что существуют пределы $\lim\limits_j y_{i,j} = y_i \in S_i$, $i = 0, 1$. Пусть $r \in (0, \varliminf\limits_j \operatorname{diam} T_{0,j})$ — число такое, что $B(y_i, r) \Subset D'$, $i = 0, 1$. Положим $B_1 = B(y_1, r)$, а $B_0 = B(y_0, r)$.

В силу [14, лемма 3] существует область Джона $\Omega \in J(\alpha, \beta)$, компактно вложенная в D', с некоторыми положительными параметрами α и β, зависящими от D' и шаров B_1, B_0, которая содержит в себе их замыкания. В области Ω имеем следующее неравенство Пуанкаре [15, теоремы 4 и 9][2)]:

$$\|u - c_u \mid L_{p^*}(\Omega)\| \le C\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^n (\operatorname{diam}\Omega)^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{p^*}} \|\nabla u \mid L_p(\Omega)\|, \tag{3}$$

[2)] В приводимом неравенстве $u \in W^1_p(\Omega)$.

в котором $p^* \in [n;\infty)$ — произвольное число при $p=n$ и $p^*=\frac{np}{n-p}$ при $p<n$, а c_u и C — постоянные, причем $C>0$ не зависит от u, α и β.

При выполнении (1) существует последовательность функций $u_j \in C(D')\cap L_p^1(D')$, допустимых для емкости cap $\big(T_{1,j},T_{0,j};L_p^1(D')\big)$, для которых

$$u_j|_{T_{1,j}}=1,\quad u_j|_{T_{0,j}}=0,\quad 0\le u_j\le 1 \quad \text{и} \quad \|\nabla u_j \mid L_p(D')\|\to 0 \text{ при } j\to\infty.$$

Так как $u_j\in W_p^1(\Omega)$, из неравенства Пуанкаре (3) выводим, что $\|u_j-c_{u_j}\mid L_{p^*}(\Omega)\|\to 0$ при $j\to\infty$. Последовательность чисел c_{u_j} не может быть неограниченной, так как ввиду неравенства Пуанкаре и того, что $0\le u_j\le 1$, $|\Omega|<\infty$, последовательность $\|\nabla u_j \mid L_p(\Omega)\|$ была бы также неограниченной. Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что последовательность чисел c_{u_j} сходится к некоторому $c_0\in\mathbb{R}$.

Так как Ω — ограниченная область, по неравенству Гёльдера имеем

$$\|u_j-c_0\mid L_p(\Omega)\|\to 0 \quad \text{при } j\to\infty.$$

Отсюда получаем, что $\big\|u_j-c_0\mid W_p^1(\Omega)\big\|\to 0$ при $j\to\infty$. Поскольку существует ограниченный оператор продолжения $W_p^1(B_0)\to W_p^1(\mathbb{R}^n)$ [16; 17, гл. 4.4, теорема 1], можно продолжить ограничения $(u_j-c_0)|_{B_0}$ до функций $v_j\in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, $v_j|_{B_0}=(u_j-c_0)|_{B_0}$, таких, что $\big\|v_j\mid W_p^1(\mathbb{R}^n)\big\|\to 0$ при $j\to\infty$. Отсюда при условии $c_0\ne 0$ выводим

$$\big\|c_0^{-1}u_j-1\mid W_p^1(B_0)\big\|\le |c_0^{-1}|\big\|v_j\mid W_p^1(\mathbb{R}^n)\big\|\to 0 \quad \text{при } j\to\infty. \tag{4}$$

Пусть $[T_{0,j}\cap\overline{B_0}]_{y_{0,j}}$ — компонента связности пересечения $T_{0,j}\cap\overline{B_0}$, содержащая точку $y_{0,j}$. Из (4) выводим, что емкости континуумов $[T_{0,j}\cap\overline{B_0}]_{y_{0,j}}$ в пространстве $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ (совпадающем с пространством бесселевых потенциалов $\mathscr{L}_p^1(\mathbb{R}^n)$ при $p>1$) стремятся к нулю при $j\to\infty$, поскольку $(-c_0)^{-1}v_j(y)=1$ для всех $y\in T_{0,j}\cap\overline{B_0}$ и всех $j\in\mathbb{N}$. Для $n-1<p\le n$ последнее возможно только при условии $\operatorname{diam}[T_{0,j}\cap\overline{B_0}]_{y_{0,j}}\to 0$ при $j\to\infty$, ввиду соотношения [18, гл. II, § 3.4, следствие 2; 19, теорема 4.1; 20, теорема 9]

$$\operatorname{diam}[T_{0,j}\cap\overline{B_0}]_{y_{0,j}}\le C(n,p)\operatorname{Cap}_{(1,p)}(T_{0,j}\cap\overline{B_0}). \tag{5}$$

Последний вывод противоречит неравенству $\operatorname{diam}[T_{0,j}\cap\overline{B_0}]_{y_{0,j}}\ge r/2>0$ при $j\ge j_0$, где j_0 выбрано так, что $y_{0,j}\in B(y_0,r/2)$ при всех $j\ge j_0$. В случае $p=1$, $n=2$ неравенство (5) — это частный случай утверждения [21, лемма 6]. Следовательно, c_0 *может равняться только нулю.*

(1.2) Проводя аналогичные рассуждения для шара B_1, заключаем, что существует последовательность непрерывных функций $v_j\in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, совпадающих с u_j на B_1: $v_j|_{B_1}=u_j|_{B_1}$, таких, что

$$\big\|v_j\mid W_p^1(\mathbb{R}^n)\big\|\to 0.$$

Поскольку $v_j(y)=1$ при $y\in T_{1,j}\cap\overline{B_1}$, отсюда вытекает, что емкости континуумов $[T_{1,j}\cap\overline{B_1}]_{y_{1,j}}$ в пространстве бесселевых потенциалов стремятся к нулю. Последнее возможно только в том случае, если $\lim\limits_j \operatorname{diam}[T_{1,j}\cap\overline{B_1}]_{y_{1,j}}=0$, что также вытекает из оценки [18, гл. II, § 3.4; 19, теорема 4.1; 20, теорема 9]

$$\operatorname{diam}[T_{1,j}\cap\overline{B_1}]_{y_{1,j}}\le C(n,p)\operatorname{Cap}_{(1,p)}(T_{1,j}\cap\overline{B_1}).$$

В то же время по предположению левая часть этого неравенства отделена от нуля, т. е. получено противоречие.

Перейдем к достаточности. Докажем, что

$$\operatorname{cap}\big(T_{1,j}, T_{0,j}; L^1_p(D')\big) \to 0 \quad \text{при } j \to \infty, \tag{6}$$

когда $\operatorname{diam} T_{1,j} \to 0$.

Положим $R = \operatorname{dist}(S_1, S_0)$. Фиксируем точки $y_{1,j} \in T_{1,j}$, $j \in \mathbb{N}$. Так как диаметры континуумов $T_{1,j}$ стремятся к нулю, то $T_{1,j} \subset B(y_{1,j}, r_j)$, где $r_j \to 0$ при $j \to \infty$. При достаточно больших j верны неравенства

$$\operatorname{diam} T_{1,j} < r_j < R/2.$$

Из свойства монотонности емкости следует, что

$$\operatorname{cap}\big(T_{1,j}, T_{0,j}; L^1_p(D')\big) \le \operatorname{cap}\big(B(y_{1,j}, r_j), \partial B(y_{1,j}, R); L^1_p(\mathbb{R}^n)\big).$$

Значит, достаточно доказать, что правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $j \to \infty$. Последнее является следствием известной формулы [18, гл. II, § 3.1, с. 54, 55] при $p > 1$, и частным случаем из [21, лемма 6] при $p = 1$:

$$\operatorname{cap}\big((\overline{B(0,r)}, \partial B(0,R); L^1_p(\mathbb{R}^n)\big) = \begin{cases} \sigma_{n-1} r^{n-1} & \text{при } p = 1 \\ \sigma_{n-1}\big(\frac{n-p}{n-1}\big)^{p-1}\big(r^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}}\big)^{1-p} & \text{при } 1 < p < n, \\ \sigma_{n-1}\big(\ln \frac{R}{r}\big)^{1-n} & \text{при } p = n, \end{cases}$$

где $r \in (0, R)$, а σ_{n-1} — площадь единичной $(n-1)$-мерной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Полагая в этой формуле $r = r_j$, получаем (6). $\square$

Определение 4 [10]. Пусть заданы область D' и континуум $F \subset D'$ такие, что дополнение $D' \backslash F$ связно, и число $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$. Для y^1, $y^2 \in D' \setminus F$ *емкостная метрическая функция* задается равенством

$$\rho_{p,F}(y^1, y^2) = \inf_\gamma \operatorname{cap}^{1/p}\big(\gamma([0;1]), F; L^1_p(D')\big),$$

где инфимум берется по всем непрерывным кривым $\gamma : [0; 1] \to D' \setminus F$ с концевыми точками y^1 и y^2.

В [10] показано, что если $n - 1 < p \le n$ при $n > 2$ и $1 \le p \le 2$ при $n = 2$, то $\rho_{p,F}$ — метрика на множестве $D' \setminus F$, топологически эквивалентная евклидовой метрике d. Кроме того, в [10] приведены более детальная история вопроса и более обширная библиография по обсуждаемому вопросу.

Ниже вместо $\gamma([0; 1])$ будем писать γ, что не должно привести к разночтению.

2. Емкостная метрика и граничные элементы в последовательности областей

Определение 5. Пусть в последовательности областей $\mathscr{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0 заданы мультиконтинуум $\mathscr{F} = (F_j)$ и соответствующий ему в ядре континуум F_0 такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные. Пусть также задано число $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$. *Емкостная метрическая функция в последовательности* $\mathscr{D}'$ определяется как

$$\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2) = \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2),$$

где $y^1, y^2 \in D_0' \setminus F_0$, а каждая ρ_{p,F_j} — метрика на $D_j' \setminus F_j$ из определения 4, в котором взяты $D' = D_j'$, $F = F_j$.

Сделаем несколько замечаний относительно определения функции $\varrho_{p,\mathscr{F}}$.

1. Поскольку D_0' — ядро $\mathscr{D}'$, а последовательность (F_j) сходится к F_0 по Хаусдорфу, то из того, что y^1 и y^2 принадлежат $D_0' \setminus F_0$, следует, что $y^1, y^2 \in D_j' \setminus F_j$, $j \geq j_0$, для некоторого $j_0 \geq 1$. Это обеспечивает корректность определения 5.

2. Естественно предположить, что функцию $\varrho_{p,\mathscr{F}}$ следует задавать на последовательностях вида $(y_j \in D_j' \setminus F_j)$. Более подробное рассмотрение данного вопроса отложим до разд. 4. Пока лишь обращаем внимание читателя на предложение 5.

3. В работе [6] для построения простых концов последовательности областей, определяемых посредством убывающих цепей относительных континуумов, p-емкость последовательности конденсаторов (E_j) задается формулой

$$\varlimsup_j \operatorname{cap}\left(E_j; L_p^1(D_j')\right),$$

однако в рамках работы [6] метризация пространства простых концов представляется затруднительной.

Предложение 3. *Пусть $n-1 < p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$, $\mathscr{D}' = (D_j')$ — равномерно ограниченная последовательность областей с невырожденным ядром D_0', $\mathscr{F} = (F_j)$ — мультиконтинуум в $\mathscr{D}'$, F_0 — соответствующий ему континуум в ядре такие, что дополнения $D_j' \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные.*

Тогда $\varrho_{p,\mathscr{F}}$ — метрика на множестве $D_0' \setminus F_0$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2) < \infty$ для произвольных $y^1, y^2 \in D_0' \setminus F_0$. Пусть $\gamma : [0;1] \to D_0' \setminus F_0$ — кривая, соединяющая y^1 и y^2, $\overline{V} \subset D_0' \setminus \gamma$ — замыкание некоторой связной окрестности V континуума F_0. Тогда $\gamma \subset D_j'$, $F_j \subset \overline{V} \subset D_j'$ для п. в. j. Отсюда по свойству монотонности получаем

$$\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2) \leq \varlimsup_j \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma, F_j; L_p^1(D_j')\right) \\ \leq \varlimsup_j \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma, \overline{V}; L_p^1(D_j')\right) \leq \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma, \overline{V}; L_p^1(\mathbb{R}^n)\right) < \infty.$$

(1) Поскольку ρ_{p,F_j} — метрики на $D_j' \setminus F_j$, для $y \in D_0' \setminus F_0$ имеем

$$\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y) = \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y, y) = 0.$$

Пусть теперь $y^1, y^2 \in D_0' \setminus F_0$ — различные точки, $\overline{B} \subset D_0' \setminus F_0$ — замкнутый шар с центром в y^1, не содержащий y^2, $\overline{V} \subset D_0' \setminus \overline{B}$ — замыкание некоторой связной окрестности V континуума F_0. Пусть также $\Omega \Subset D_0'$ — область, содержащая $\overline{B}$ и $\overline{V}$. Для кривой γ с началом в точке y^1 и пересекающей границу шара $\overline{B}$ определим кривую $\gamma_{\overline{B}} = \gamma|_{[0;t_\gamma]}$, где $t_\gamma = \inf\{t \in [0;1] \mid \gamma(t) \notin \operatorname{int} \overline{B}\} > 0$.

Предположим, что $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2) = 0$. Тогда найдутся число $j_0 \in \mathbb{N}$ и кривые $\gamma_j : [0;1] \to D_j' \setminus F_j$, $j \geq j_0$, такие, что $\gamma_j(0) = y^1$, $\gamma_j(1) = y^2$ и $\operatorname{cap}\left(\gamma_j, F_j; L_p^1(D_j')\right) \to 0$. Имеем

$$\lim_j \operatorname{cap}^{1/p}\left((\gamma_j)_{\overline{B}}, F_j; L_p^1(\Omega)\right) \leq \lim_j \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma_j, F_j; L_p^1(D_j')\right) = 0.$$

Поскольку $\varliminf_j \operatorname{diam} F_j > 0$ в силу сходимости (F_j) к F_0 по Хаусдорфу, применяя лемму 1 с $S_1 = \overline{B}$ и $S_0 = \overline{V}$, получаем отсюда, что $\operatorname{diam}(\gamma_j)_{\overline{B}} \to 0$. Получено противоречие с тем, что диаметры кривых $(\gamma_j)_{\overline{B}}$ отделены от нуля радиусом шара $\overline{B}$.

(2), (3). Пусть $y^1, y^2, y^3 \in D_0' \setminus F_0$. Тогда начиная с некоторого j_0 точки y^1, y^2 и y^3 принадлежат всем $D_j' \setminus F_j$. Поскольку каждая ρ_{p,F_j} есть метрика на $D_j' \setminus F_j$, то

$$\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2) = \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) = \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^2, y^1) = \varrho_{p,\mathscr{F}}(y^2, y^1),$$

$$\begin{aligned}\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^3) &= \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^3) \le \varlimsup_j (\rho_{p,F_j}(y^1, y^2) + \rho_{p,F_j}(y^2, y^3)) \\ &\le \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) + \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^2, y^3) = \varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2) + \varrho_{p,\mathscr{F}}(y^2, y^3). \quad \square\end{aligned}$$

Предложение 4. *Пусть выполняются условия предложения 3. Если $y, y^m \in D_0' \setminus F_0$, $m \in \mathbb{N}$, то верно следующее: $d(y, y^m) \to 0$ тогда и только тогда, когда $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^m) \to 0$.*

Доказательство. Пусть $\overline{V} \subset D_0'$ — замыкание связной окрестности F_0, не содержащее точку y. Пусть $r^m = d(y, y^m) \to 0$. Тогда при достаточно больших m в силу леммы 1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^m, y) &\le \varlimsup_j \operatorname{cap}^{1/p}\left(\overline{B}(y, r^m), F_j; L_p^1(D_j')\right) \\ &\le \operatorname{cap}^{1/p}\left(\overline{B}(y, r^m), \overline{V}; L_p^1(\mathbb{R}^n)\right) \to 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^m) \to 0$. Предположим, что $\{y^m\}$ не сходится к y в евклидовой метрике d. Тогда после перехода к подпоследовательности и перенумерации выберем шар $\overline{B} = \overline{B}(y, r)$ такой, что $\overline{B} \subset D_0' \setminus F_0$ и $y^m \notin \overline{B}$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть снова $\overline{V} \subset D_0' \setminus \overline{B}$ — замыкание некоторой связной окрестности F_0, $\Omega \Subset D_0'$ — область, содержащая $\overline{B}$ и $\overline{V}$. Тогда $\Omega \subset D_j'$ и $F_j \subset \overline{V}$ для п. в. j. Для каждого m существует последовательность кривых $(\gamma_j^m : [0; 1] \to D_j' \setminus F_j)_{j=1}^{\infty}$ такая, что $\gamma_j^m(0) = y$, $\gamma_j^m(1) = y^m$ для п. в. j и

$$2\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^m) \ge \varlimsup_j \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma_j^m, F_j; L_p^1(D_j')\right).$$

Далее, для каждого m существует число $j_m > j_{m-1}$ такое, что $\gamma_{j_m}^m$ соединяет точки y, y^m и

$$2\varlimsup_j \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma_j^m, F_j; L_p^1(D_j')\right) \ge \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma_{j_m}^m, F_{j_m}; L_p^1(D_{j_m}')\right).$$

Из того, что $\Omega \subset D_{j_m}'$ для п. в. m, выводим

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma_{j_m}^m, F_{j_m}; L_p^1(D_{j_m}')\right) &\ge \operatorname{cap}^{1/p}\left((\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}, F_{j_m}; L_p^1(D_{j_m}')\right) \\ &\ge \operatorname{cap}^{1/p}\left((\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}, F_{j_m}; L_p^1(\Omega)\right),\end{aligned}$$

где $(\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}$ определены, как в доказательстве предложения 3. Отсюда

$$\operatorname{cap}^{1/p}\left((\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}, F_{j_m}; L_p^1(\Omega)\right) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

поскольку $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^m) \to 0$. Следовательно, по лемме 1 с $S_1 = \overline{B}$, $S_0 = \overline{V}$ в силу того, что $\varliminf_j \operatorname{diam} F_j > 0$, получаем $\operatorname{diam}\bigl(\gamma_{j_m}^m\bigr)_{\overline{B}} \to 0$. Однако последнее противоречит оценкам $\operatorname{diam}\bigl(\gamma_{j_m}^m\bigr)_{\overline{B}} \ge r > 0$. $\square$

Предложение 5. *Пусть выполняются условия предложения* 3. *Пусть последовательности* $\big(y_j^1 \in D_j' \setminus F_j\big)$, $\big(y_j^2 \in D_j' \setminus F_j\big)$ *сходятся в евклидовой метрике к точкам* $y^1, y^2 \in D_0' \setminus F_0$ *соответственно. Тогда верно равенство*

$$\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2) = \varlimsup_j \rho_{p,F_j}\big(y_j^1, y_j^2\big).$$

Доказательство. Пусть $r_j = d(y^1, y_j^1) \to 0$. Тогда в силу свойства монотонности и леммы 1 имеем

$$\varlimsup_j \rho_{p,F_j}\big(y^1, y_j^1\big) \le \varlimsup_j \operatorname{cap}^{1/p}\big(\overline{B}(y^1, r_j), \overline{V}; L_p^1(\mathbb{R}^n)\big) = 0,$$

где $\overline{V}$ — замыкание связной окрестности континуума F_0, не содержащее y^1.

Далее, в силу того, что ρ_{p,F_j} — метрики, при п. в. j имеем неравенство

$$\rho_{p,F_j}\big(y_j^1, y_j^2\big) \le \rho_{p,F_j}\big(y_j^1, y^1\big) + \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) + \rho_{p,F_j}\big(y^2, y_j^2\big),$$

переходя в котором к верхнему пределу при $j \to \infty$, выводим

$$\begin{aligned}\varlimsup_j \rho_{p,F_j}\big(y_j^1, y_j^2\big) \le \varlimsup_j \rho_{p,F_j}\big(y_j^1, y^1\big) + \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) + \varlimsup_j \rho_{p,F_j}\big(y^2, y_j^2\big)\\ = \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) = \varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2).\end{aligned}$$

Обратное неравенство $\varliminf_j \rho_{p,F_j}\big(y_j^1, y_j^2\big) \ge \varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2)$ может быть получено аналогичным образом. $\square$

Предложение 6. *Пусть выполняются условия предложения* 3. *Пусть* $\{y^m \in D_0' \setminus F_0\}$ *— фундаментальная в метрике* $\varrho_{p,\mathscr{F}}$ *последовательность, а* y *— ее частичный предел в топологии пространства* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

(1) $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^m) \to 0$ *и* $d(y, y^m) \to 0$, *если* $y \in D_0' \setminus F_0$;

(2) $\operatorname{dist}(y^m, F_0) = \inf\limits_{z \in F_0} d(y^m, z) \to 0$, *если* $y \in F_0$;

(3) $\operatorname{dist}(y^m, \partial D_0') \to 0$, *если* $y \in \partial D_0'$.

Доказательство. (1) Пусть $\{y^{m_l}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к y в евклидовой метрике. Тогда $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^{m_l}) \to 0$ и в силу фундаментальности $\{y^m\}$ имеем $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^m) \to 0$. По предложению 4 верно также $d(y, y^m) \to 0$.

(2) Предположим противное, т. е. что $\operatorname{dist}(y^m, F_0)$ не стремится к нулю. Тогда найдутся связные окрестности $U_1 \Subset V_1 \Subset V_2 \Subset U_2 \Subset D_0'$ континуума F_0 и подпоследовательности $\{y_1^l\}$, $\{y_2^l\}$ последовательности $\{y^m\}$ такие, что $y_1^l \in V_1$ и $y_2^l \notin V_2$. Также аналогично тому, как это было сделано в доказательстве предложения 4, можно построить возрастающую последовательность номеров $\{j_l\}$ и последовательность кривых $\{\gamma^l : [0;1] \to D_{j_l}' \setminus F_{j_l}\}$ такие, что $U_2 \subset D_{j_l}'$, $\gamma^l(0) = y_1^l$, $\gamma^l(1) = y_2^l$ для всех l и $\operatorname{cap}\big(\gamma^l, F_{j_l}; L_p^1(D_{j_l}')\big) \to 0$ (отметим, что $\varrho_{p,\mathscr{F}}\big(y_1^l, y_2^l\big) \to 0$, так как последовательность $\{y^m\}$ фундаментальная).

Теперь для каждого l выберем по точке $t^l \in (0;1)$ так, чтобы $\gamma^l(t^l) \in V_2 \setminus \overline{V_1}$ и $\gamma^l(t) \in V_2$ при $t \le t^l$, что можно сделать, поскольку $y_1^l \in V_1$, $y_2^l \notin V_2$ и $\overline{V_1} \subset V_2$. Далее, рассмотрим кривые $(\gamma^l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}} = \gamma^l|_{[t_1^l; t_2^l]}$, где

$$t_1^l = \sup\{t < t^l \mid \gamma^l(t) \in V_1\} \in (0; t^l),$$

$$t_2^l = \inf\{t > t^l \mid \gamma^l(t) \notin V_2\} \in (t^l; 1).$$

Образы кривых $(\gamma^l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}}$ содержатся в $\overline{V_2 \setminus V_1}$ и их диаметры оцениваются снизу через $\operatorname{dist}(V_1, \partial V_2) > 0$, так как $\gamma^l\big(t_1^l\big) \in \partial V_1$, $\gamma^l\big(t_2^l\big) \in \partial V_2$. Согласно лемме 1, в которой следует положить $S_1 = \overline{V_2 \setminus V_1}$ и $S_0 = \overline{U_1}$, это противоречит тому, что следующие емкости стремятся к нулю:

$$\operatorname{cap}\left((\gamma^l)_{\overline{V_2\setminus V_1}}, F_{j_l}; L^1_p(U_2)\right) \le \operatorname{cap}\left(\gamma^l, F_{j_l}; L^1_p(D'_{j_l})\right) \to 0.$$

(3) Если у последовательности $\{y^m\}$ есть какой-либо другой частичный предел z, то предположение $z \notin \partial D'_0$ в случае $z \in D'_0 \setminus F_0$ приводит к тому, что $d(z, y^m) \to 0$, а в случае $z \in F_0$ — к тому, что $y^m \to F_0$, чего быть не может. $\square$

Пусть, как и в предложении 3, заданы число $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$, равномерно ограниченная последовательность областей $\mathscr{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0, мультиконтинуум $\mathscr{F} = (F_j)$ в $\mathscr{D}'$ и соответствующий ему континуум $F_0 \subset D'_0$ такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, связные.

Опираясь на идеи работы [10], рассмотрим пополнение $\left(\mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}'_p, \varrho^{\mathrm{k}}_{p,\mathscr{F}}\right)$ метрического пространства $(D'_0 \setminus F_0, \varrho_{p,\mathscr{F}})$ по стандартной конструкции Хаусдорфа[3)]. Отметим, что в ситуации, когда $D'_j = D'$ и $F_j = F$ для всех j, построенное таким образом пространство совпадает с пространством $\widetilde{D}'_{\rho,p}$ из [10, определение 2.14].

В дальнейшем для краткости будем использовать также символ $\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p$ для обозначения пространства $\mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}'_p$.

Определение 6. *Носителем* $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h)$ элемента $h \in \left(\mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}'_p, \varrho^{\mathrm{k}}_{p,\mathscr{F}}\right)$ называется совокупность всех частичных в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ пределов для всех фундаментальных в метрике $\varrho_{p,\mathscr{F}}$ последовательностей, входящих в класс h.

Нетрудно показать, что носитель $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h)$ каждого элемента h — замкнутое в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ множество.

Определение 7. *Граничным элементом* в последовательности областей $\mathscr{D}'$ будем называть элемент $h \in \mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}'_p$ такой, что $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \subset \partial D'_0$.

Из предложения 6 следует, что $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \cap \partial D'_0 \ne \varnothing$ в том и только том случае, когда h — граничный элемент в $\mathscr{D}'$, а также что носитель всякой точки $y \in D'_0 \setminus F_0$[4)] представляет собой одноточечное множество $\{y\}$.

Пример (исчезающая ручка). Положим

$$D'_j = (-2; 2)^2 \setminus ([1; 2 - j^{-1}] \times [-1; 1]).$$

Ядром последовательности $\mathscr{D}' = (D'_j)$ является область

$$D'_0 = (-2; 2)^2 \setminus ([1; 2) \times [-1; 1]).$$

[3)] Напомним конструкцию Хаусдорфа пополнения метрического пространства (M, ρ). На множестве всех фундаментальных в M последовательностей введем отношение эквивалентности: фундаментальные последовательности $\{\xi^m \in M\}$ и $\{\eta^m \in M\}$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_m \rho(\xi^m, \eta^m) = 0$. Обозначим через $\widetilde{M}$ множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей в смысле данного отношения. Далее, зададим на $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ функцию $\widetilde{\rho}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) = \lim\limits_m \rho(\xi^m, \eta^m)$, где $\{\xi^m\} \in \widetilde{\xi} \in \widetilde{M}$, $\{\eta^m\} \in \widetilde{\eta} \in \widetilde{M}$. Тогда $\widetilde{\rho}$ определена корректно (т. е. фигурирующий в ее определении предел существует и не зависит от представляющих последовательностей $\{\xi^m\} \in \widetilde{\xi}$ и $\{\eta^m\} \in \widetilde{\eta}$) и является метрикой на $\widetilde{M}$, относительно которой пространство $\widetilde{M}$ полное. Отображение, сопоставляющее точке $\xi \in M$ класс последовательностей, сходящихся к ξ, есть изометрическое вложение (M, ρ) в $(\widetilde{M}, \widetilde{\rho})$ такое, что образ M под его действием — плотное в $\widetilde{M}$ множество.

[4)] Как это обычно принято, будем отождествлять класс последовательностей, сходящихся к точке y, с самой точкой y.

Пусть $p \in [1;2]$, $F_j = [-1;0]^2$, $\mathscr{F} = (F_j)$. Тогда любые последовательности $\{y^m \in D_0' \setminus F_0\}$, $\{z^m \in D_0' \setminus F_0\}$, сходящиеся в топологии $\mathbb{R}^2$ к точкам $(2,1)$ и $(2,-1)$ соответственно, являются фундаментальными в метрике $\varrho_{p,\mathscr{F}}$. Также легко видеть, что последовательности $\{y^m\}$ и $\{z^m\}$ эквивалентны и что $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) = \{(2,1),(2,-1)\}$, где $\{y^m\},\{z^m\} \in h$.

Приведенный пример показывает, что носитель граничного элемента $h \in \mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}_p'$ в последовательности областей не обязан быть связным. Отсюда также можем видеть, что в общем случае естественного взаимно однозначного соответствия между граничными элементами в последовательности областей и граничными элементами в ядре может не быть.

3. Последовательности отображений, удовлетворяющих емкостному неравенству. Поведение предельного отображения на границе ядра

Рассмотрим равномерно ограниченную последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D_j' \to D_j)_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющих емкостному неравенству с общей константой K. А именно, пусть для некоторых $n-1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$ неравенство

$$\operatorname{cap}^{1/q}\left(\theta_j(E); L_q^1(D_j)\right) \leq K \operatorname{cap}^{1/p}\left(E; L_p^1(D_j')\right) \tag{7}$$

выполняется для каждого конденсатора E в D_j' и каждого j. Пусть еще последовательность ϑ сходится локально равномерно в ядре D_0' к гомеоморфизму $\theta_0 : D_0' \to D$.

Поскольку граничное поведение последовательности ϑ будем исследовать в терминах пространства $\mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}_p'$, определяемого как пополнение подмножества ядра $D_0' \setminus F_0$ по емкостной метрике, для нас интересен вопрос о связи образа ядра $D = \theta_0(D_0')$ с ядром последовательности $\mathscr{D} = (D_j)$. Известен следующий общий результат.

Лемма 2 [12, теорема 1]. *Пусть $\mathscr{D}' = (D_j')$ и $\mathscr{D} = (D_j)$ — последовательности областей и непустая область D' содержится в ядре последовательности $\mathscr{D}'$. Если последовательность гомеоморфизмов $(\theta_j : D_j' \to D_j)$ сходится локально равномерно в области D' к гомеоморфизму $\theta_0 : D' \to D$, то D содержится в ядре последовательности $\mathscr{D}$, при этом последовательность обратных отображений (θ_j^{-1}) сходится локально равномерно в D к обратному отображению θ_0^{-1}.*

Обозначим через D_0 то ядро последовательности $\mathscr{D}$, которое содержит область D (подчеркнем, что ядро D_0 здесь берется относительно любой точки $\theta_0(a)$, $a \in D_0'$). В работе [22] в предположении о том, что последовательности прямых (θ_j) и обратных (θ_j^{-1}) отображений удовлетворяют емкостному неравенству с общей константой, получено равенство $D = D_0$, которое нельзя гарантировать в условиях леммы 2, если положить $D' = D_0'$.

Рассмотрим вопрос о поведении вблизи границы семейства отображений, удовлетворяющих емкостному неравенству (7) с общей константой K и некоторыми $n-1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$. Пусть в последовательности областей $\mathscr{D}'$, обладающей невырожденным ядром D_0', задан мультиконтинуум $\mathscr{F} = (F_j)$, которому соответствует континуум $F_0 \subset D_0'$, такие, что дополнения $D_j' \setminus F_j$, $j = 0,1,2,\dots$, связные. Тогда $\vartheta(\mathscr{F}) = (\theta_j(F_j))$ — мультиконтинуум в последовательности областей $\mathscr{D}$, а $\theta_0(F_0)$ — соответствующий ему континуум в ядре, содержащийся в D, такие, что дополнения $D_j \setminus \theta_j(F_j)$,

$j = 0, 1, 2, \ldots,$ связные. Для $y \in D'_0 \setminus F_0$ положим $\vartheta(y) = \lim\limits_{j} \theta_j(y) = \theta_0(y) \in D \setminus \theta_0(F_0)$. Согласно предложению 5 из неравенств

$$\rho_{q,\theta_j(F_j)}(\theta_j(y^1), \theta_j(y^2)) \le K\rho_{p,F_j}(y^1, y^2),$$

вытекающих из (7), следует, что

$$\varrho_{q,\vartheta(\mathscr{F})}(\vartheta(y^1), \vartheta(y^2)) \le K\varrho_{p,\mathscr{F}}(y^1, y^2).$$

Иными словами, последовательность ϑ задает K-липшицево отображение между пространствами $\big(D'_0 \setminus F_0, \varrho_{p,\mathscr{F}}\big)$ и $(D_0 \setminus \theta_0(F_0), \varrho_{q,\vartheta(\mathscr{F})})$. Поэтому отображение ϑ может быть единственным образом продолжено по непрерывности до K-липшицевого отображения

$$\vartheta^{\mathrm{k}} : (\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p, \varrho^{\mathrm{k}}_{p,\mathscr{F}}) \to (\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}_q, \varrho^{\mathrm{k}}_{q,\vartheta(\mathscr{F})}).$$

По построению ϑ^{k} и определению носителя имеем следующую характеризацию поведения предельного гомеоморфизма на границе ядра: для каждого элемента $h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p$ и для каждой последовательности $\{y^m\} \in h$ выполняется

$$\theta_0(y^m) \to \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(\vartheta^{\mathrm{k}}(h)).$$

Предложение 7. *Пусть выполнены условия предложения* 3. *Пусть задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \to D_j)$, удовлетворяющая емкостному неравенству* (7) *с общей константой K и некоторыми $n-1 < q \le p \le n$ при $n > 2$ и $1 \le q \le p \le 2$ при $n = 2$, и сходящаяся к гомеоморфизму $\theta_0 : D'_0 \to D$ локально равномерно в D'_0.*

Если h — граничный элемент в последовательности областей $\mathscr{D}'$, то носитель элемента $\vartheta^{\mathrm{k}}(h)$ содержится в ∂D.

Доказательство. Пусть $\{y^m\} \in h$. Тогда последовательность $\{\theta_0(y^m)\}$ фундаментальна в метрике $\varrho_{q,\vartheta(\mathscr{F})}$. Пусть x — предел некоторой подпоследовательности $\{\theta_0(y^{m_l})\}$ последовательности $\{\theta_0(y^m)\}$. Если $x \in D$, то $y^{m_l} = \theta_0^{-1}(\theta_0(y^{m_l})) \to \theta_0^{-1}(x) \in D'_0$ в евклидовой метрике, поскольку θ_0 — гомеоморфизм. Это противоречит выбору $\{y^m\}$, так как $y^m \to \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \subset \partial D'_0$. $\square$

Согласно предложениям 6, 7 ситуация, при которой $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(\vartheta^{\mathrm{k}}(h)) = \{x\}$, где $x \in D_0 \cap \partial D$, представляется наиболее простой: для $\{y^m\} \in h$ имеем сходимость $\theta_0(y^m) \to x$. Доказываемая ниже теорема 2 исключает такую возможность.

Теорема 2. *Пусть $n-1 < q \le p \le n$ при $n > 2$ и $1 \le q \le p \le 2$ при $n = 2$, $\mathscr{D}' = (D'_j)$ — равномерно ограниченная последовательность областей, обладающая невырожденным ядром D'_0. Пусть еще задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \to D_j)$, сходящаяся локально равномерно в D'_0 к гомеоморфизму $\theta_0 : D'_0 \to D$ и удовлетворяющая емкостному неравенству с общей константой K:*

$$\operatorname{cap}^{1/q}\big(\theta_j(E); L^1_q(D_j)\big) \le K \operatorname{cap}^{1/p}\big(E; L^1_p(D'_j)\big)$$

для каждого конденсатора E в D'_j и каждого j.

Тогда D — это ядро последовательности областей $\mathscr{D} = (D_j)$.

Доказательство. Обозначим через D_0 ядро последовательности $\mathscr{D}$, содержащее D, существование которого обеспечивается леммой 2. Пусть еще

$\mathscr{F} = (F_j)$ — произвольный мультиконтинуум в $\mathscr{D}'$, которому в ядре D'_0 соответствует континуум F_0, $V \Subset D'_0$ — связная окрестность F_0, а $U \Subset D$ — окрестность $\theta_0(F_0)$.

Предположим, что $D \neq D_0$. Тогда существует $x \in D_0 \cap \partial D$. Так как $x \in D_0 \setminus \overline{U}$, то при некотором R имеем включение $\overline{B}(x, 2R) \subset D_0 \setminus \overline{U}$. Пусть $\Omega \Subset D_0$ — область, содержащая в себе $\overline{U}$ и $\overline{B}(x, 2R)$. Можем считать, что включения $\Omega \subset D_j$ и $\theta_j(F_j) \subset \overline{U}$ выполнены для всех j. Пусть последовательность $\{x^m \in \big(B(x,R) \cap D\big) \setminus \overline{U}\}$ сходится к x в евклидовой метрике. Положим $y^m = \theta_0^{-1}(x^m)$. Тогда $y^m \to \partial D'_0$. После перехода к подпоследовательности можем считать, что $y^m \to y \in \partial D'_0$. Пусть $r^m = 2\operatorname{dist}(y^m, \partial D'_0)$. Тогда найдется замкнутый шар $\overline{B}(y, r)$, находящийся на положительном расстоянии от $\overline{V}$. В силу сходимостей $r^m \to 0$, $y^m \to y$ справедливы включения $\overline{B}(y^m, r^m) \subset \overline{B}(y, r)$, $m \geq m_0$, где m_0 — достаточно большое число. Также по выбору r^m имеем $B(y^m, r^m) \cap \partial D'_0 \neq \varnothing$, откуда в силу предложения 1 вытекает, что каждый шар $B(y^m, r^m)$ имеет непустое пересечение с бесконечно многими границами $\partial D'_j$.

Для каждого $m \geq m_0$ выберем достаточно большое число j_m, чтобы $y^m \in D'_{j_m}$, $\theta_{j_m}(y^m) \in B(x, R)$ и $B(y^m, r^m) \cap \partial D'_{j_m} \neq \varnothing$[5)]. При этом не требуется, чтобы последовательность $\{j_m\}$ была возрастающей.

Теперь рассмотрим кривые

$$\gamma^m : [0;1] \to \overline{D'_{j_m}} \cap B(y^m, r^m), \quad m \geq m_0,$$

такие, что $\gamma^m(0) = y^m$, $\gamma^m\big((0;1)\big) \subset D'_{j_m} \cap B(y^m, r^m)$, $\gamma^m(1) \in \partial D'_{j_m}$. Поскольку $r^m \to 0$, то

$$\operatorname{cap}\big(\gamma^m, \overline{V}'; L^1_p(\mathbb{R}^n)\big) \to 0.$$

Обозначим $\widetilde{\sigma}^m(t) = \theta_{j_m}(\gamma^m(t))$ при $t \in [0;1)$. Поскольку $\widetilde{\sigma}^m(0) \in B(x, R)$, $\widetilde{\sigma}^m(t) \to \partial D_{j_m}$ при $t \to 1$, и $\overline{B}(x, 2R) \subset D_{j_m}$, то $\widetilde{\sigma}^m \cap \partial B(x, 2R) \neq \varnothing$. Определим еще

$$t^m = \inf\{t \in [0;1) \mid \widetilde{\sigma}^m(t) \notin B(x, 2R)\} \in (0;1).$$

Положим $\sigma^m = \widetilde{\sigma}^m|_{[0;t^m]}$. Тогда $\sigma^m : [0; t^m] \to \overline{B}(x, 2R)$ — кривая. По построению $\sigma^m(0) \in B(x, R)$ и $\sigma^m(t^m) \in \partial B(x, 2R)$, так что $\operatorname{diam} \sigma^m \geq R$ при $m \geq m_0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}^{1/q}\big(\sigma^m, \theta_{j_m}(F_{j_m}); L^1_q(\Omega)\big) &\leq \operatorname{cap}^{1/q}\big(\sigma^m, \theta_{j_m}(F_{j_m}); L^1_q(D_{j_m})\big) \\ &\leq K \operatorname{cap}^{1/p}\big(\gamma^m|_{[0;t^m]}, F_{j_m}; L^1_p(D'_{j_m})\big) \leq K \operatorname{cap}^{1/p}\big(\gamma^m, \overline{V}; L^1_p(\mathbb{R}^n)\big) \to 0. \end{aligned}$$

Последнее согласно лемме 1 с $S_1 = \overline{B}(x, 2R)$ и $S_0 = \overline{U}$ противоречит тому, что $\operatorname{diam} \sigma^m \geq R$. Таким образом, предположение $D \neq D_0$ неверно. $\square$

В предложении 7 и теореме 2 установлено следующее описание поведения предельного отображения θ_0 вблизи границы ядра D'_0.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{D}' = (D'_j)$ — равномерно ограниченная последовательность областей, обладающая невырожденным ядром D'_0, $\mathscr{F} = (F_j)$ — мультиконтинуум в $\mathscr{D}'$, F_0 — соответствующий ему континуум в ядре такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, связные. Пусть задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \to D_j)$, удовлетворяющая емкостному неравенству (7) с общей константой K и некоторыми*

[5)] Такие числа найдутся, поскольку первые два из условий, налагаемых на j_m, выполняются для п. в. j, а третье — для бесконечно многих из них.

$n-1 < q \le p \le n$ при $n > 2$ и $1 \le q \le p \le 2$ при $n = 2$ и сходящаяся к гомеоморфизму $\theta_0 : D_0' \to D_0$ локально равномерно в D_0'.

Тогда

(1) *область D_0 — ядро последовательности $\mathscr{D} = (D_j)$;*

(2) *если $h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}_p'$ — граничный элемент в последовательности областей $\mathscr{D}'$, то $\vartheta^{\mathrm{k}}(h) \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}_q$ — граничный элемент в $\mathscr{D}$, т. е. $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(\vartheta^{\mathrm{k}}(h)) \subset \partial D_0$;*

(3) *если $\{y^m\} \in h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}_p'$, то $\theta_0(y^m) \to \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(\vartheta^{\mathrm{k}}(h))$.*

4. Альтернативное представление граничных элементов

Следующей нашей целью станет исследование предельного поведения последовательностей вида $(\theta_j(y_j))$, где $y_j \in D_j' \setminus F_j$, $j \in \mathbb{N}$. Конечно, не все последовательности (y_j) позволяют извлекать адекватную информацию о поведении последовательности отображений ϑ вблизи дополнения к ядру. Например, если $D_j' = B(0,1)$, θ_j — тождественные отображения и (y_j) — последовательность, предельными точками которой являются все точки сферы $\partial B(0,1)$, то можно сделать вывод лишь о том, что $(\theta_j(y_j))$ стремится к $\partial B(0,1)$, чего слишком мало, особенно при имеющихся предположениях.

В первую очередь выделим наименьший набор последовательностей (y_j), для которых рассмотрение последовательности $(\theta_j(y_j))$ приводит к получению разумного описания граничного поведения ϑ (далее станет ясен смысл этого неточного выражения). Еще одно необходимое требование, налагаемое на «подходящие» последовательности (y_j), состоит в том, чтобы последовательности вида $(\theta_j(y_j))$ были «подходящими» в последовательности образов $\mathscr{D}$.

В действительности уже выделен некоторый набор последовательностей с описанными свойствами: последовательности, сходящиеся в евклидовой метрике к точкам множества $D_0' \setminus F_0$. Конечно, каждая последовательность, отождествленная таким образом с внутренней точкой, локализуется внутри ядра, поэтому требуется *дополнить* этот набор. Но поскольку стандартная процедура пополнения приводит к описанию поведения предельного отображения θ_0 на границе ядра (в смысле п. (3) теоремы 3), для работы с совместным граничным поведением последовательности ϑ понадобится альтернативная конструкция. Идея состоит в том, чтобы представить пополнение области, снабженной емкостной метрикой, как замыкание множества постоянных последовательностей (y_0), $y_0 \in D_0' \setminus F_0$, в (полном) пространстве последовательностей вида $(y_j \in D_j' \setminus F_j)$, в котором расстояние между элементами $\left(y_j^1\right)$ и $\left(y_j^2\right)$ определяется как $\varlimsup\limits_j \rho_{p,F_j}\left(y_j^1, y_j^2\right)$. В доказываемой ниже лемме 3, носящей довольно общий характер, разрешаются все возникающие при этом технические тонкости.

Рассмотрим последовательность метрических пространств $((M_j, \rho_j))$ и произвольную последовательность $\xi^0 = \left(\xi_j^0\right) \in \prod\limits_j M_j$. Обозначим

$$\mathscr{M}(\xi^0) = \Big\{\xi = (\xi_j) \in \prod_j M_j \mid \varlimsup_j \rho_j\left(\xi_j^0, \xi_j\right) < \infty\Big\},$$

$$\rho(\eta, \zeta) = \varlimsup_j \rho_j(\eta_j, \zeta_j), \quad [\eta] = \{\xi \in \mathscr{M}(\xi^0) \mid \rho(\xi, \eta) = 0\},$$

где $\eta = (\eta_j), \zeta = (\zeta_j) \in \mathscr{M}(\xi^0)$. Зададим на $\mathscr{M}(\xi^0)$ бинарное отношение:

$$\eta \sim_\rho \zeta, \text{ если } \rho(\eta, \zeta) = 0. \tag{8}$$

Лемма 3. *Пусть* $((M_j,\rho_j))$ — *последовательность метрических пространств и* $\xi^0=(\xi^0_j)\in\prod\limits_j M_j$. *Тогда*

(1) $\mathscr{M}(\xi^0)=\mathscr{M}(\xi^1)$, *если* $\overline{\lim\limits_j}\,\rho_j\big(\xi^1_j,\xi^0_j\big)<\infty$, *где* $\xi^1=\big(\xi^1_j\big)\in\prod\limits_j M_j$;

(2) *отношение* (8) *есть отношение эквивалентности на* $\mathscr{M}(\xi^0)$, *а* $[\eta]$ — *класс эквивалентности, содержащий последовательность* η;

(3) $\rho(\eta,\zeta)=\rho(\widetilde{\eta},\widetilde{\zeta})$, *если* $\eta\sim_\rho\widetilde{\eta}$ *и* $\zeta\sim_\rho\widetilde{\zeta}$, *где* η, $\widetilde{\eta}$, ζ, $\widetilde{\zeta}\in\mathscr{M}(\xi^0)$;

(4) $\zeta\in\mathscr{M}(\xi^0)$ *и* $\zeta\sim_\rho\eta$, *если* $\eta=(\eta_j)\in\mathscr{M}(\xi^0)$ *и* $\zeta=(\zeta_j)$ *таковы, что* $\overline{\lim\limits_j}\,\rho_j(\eta_j,\zeta_j)=0$;

(5) *функция* ϱ, *заданная на парах элементов из множества классов эквивалентности*
$$\mathscr{M}(\xi^0)/{\sim_\rho}=\{[\eta]\mid\eta\in\mathscr{M}(\xi^0)\}$$
по правилу
$$\varrho([\eta],[\zeta])=\rho(\eta,\zeta),$$
является метрикой, относительно которой $\mathscr{M}(\xi^0)/{\sim_\rho}$ — *полное метрическое пространство.*

Доказательство. Утверждения (1)–(4) проверяются непосредственно. Симметричность функции ρ и выполнение для нее неравенства треугольника следуют из ее определения. Конечность ρ следует из перечисленных свойств и определения множества $\mathscr{M}(\xi^0)$:
$$\rho(\eta,\zeta)\le\rho(\eta,\xi^0)+\rho(\xi^0,\zeta)<\infty.$$
Поскольку множества значений функций ρ и ϱ совпадают, в силу своего определения ϱ тоже удовлетворяет перечисленным свойствам. Наконец, аксиома тождества для ϱ вытекает из задания отношения (8) на $\mathscr{M}(\xi^0)$. Таким образом, $(\mathscr{M}(\xi^0)/{\sim_\rho},\varrho)$ — метрическое пространство.

Покажем его полноту. Пусть $\{[\xi^m]\in\mathscr{M}(\xi^0)/{\sim_\rho}\}$ — фундаментальная последовательность. После перехода к подпоследовательности и замены обозначений можем считать, что $\varrho([\xi^m],[\xi^{m+1}])<1/2^{m+1}$ при всех m. По определению ϱ это означает, что для каждого $m\ge1$ найдется число $j_m>j_{m-1}$ такое, что при всех $j\ge j_m$ справедливо
$$\rho_j(\xi^m_j,\xi^{m+1}_j)<\frac{1}{2^{m+1}},$$
где $j_0=0$. Положим $\xi_j=\xi^m_j$ при $j_m\le j<j_{m+1}$ и $m\ge1$. Если $j_1>1$, то для $j<j_1$ выберем $\xi_j\in M_j$ произвольным образом. Покажем, что последовательность $\{[\xi^m]\}$ сходится к $[\xi]$, где $\xi=(\xi_j)$. Если $j_{m+m'}\le j<j_{m+m'+1}$, то
$$\rho_j\big(\xi^m_j,\xi_j\big)=\rho_j\big(\xi^m_j,\xi^{m+m'}_j\big)\le\sum_{l=1}^{m'}\rho_j\big(\xi^{m+l-1}_j,\xi^{m+l}_j\big)<\sum_{l=1}^{m'}\frac{1}{2^{m+l}}<\frac{1}{2^m},$$
где $\rho_j\big(\xi^{m+l-1}_j,\xi^{m+l}_j\big)<1/2^{m+l}$ в силу того, что $j\ge j_{m+m'}>j_{m+l-1}$ при всех $l=1,\dots,m'$. Отсюда при всех $j\ge j_{m+1}$ имеем
$$\rho_j\big(\xi^m_j,\xi_j\big)<\frac{1}{2^m}.$$
Следовательно, $\rho(\xi^m,\xi)\le1/2^m$, т. е. $\xi\in\mathscr{M}(\xi^0)$ и $\varrho([\xi^m],[\xi])\le1/2^m\to0$. $\square$

Определение 8. Пусть выполнены условия предложения 3. А именно, пусть $n-1<p\le n$ при $n>2$ и $1\le p\le 2$ при $n=2$, $\mathscr{D}'=(D'_j)$ — равномерно ограниченная последовательность областей с невырожденным ядром D'_0, $\mathscr{F}=(F_j)$ — мультиконтинуум в $\mathscr{D}'$, F_0 — соответствующий ему континуум в ядре такие, что дополнения $D'_j\setminus F_j$, $j=0,1,2,\dots$, связные. Положим в лемме 3

$$(M_j,\rho_j)=(D'_j\setminus F_j,\rho_{p,F_j}),\quad \xi^0=(z_0),$$

где $z_0\in D'_0\setminus F_0$[6)], и обозначим

$$\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}=\varrho,\quad \mathscr{D}'(D'_0)=\mathscr{M}(\xi^0).$$

Пространство $\mathscr{C}^{\sec}\mathscr{D}'_p=\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p$, снабжаемое метрикой $\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}$, определяется как замыкание множества $\{[(y_0)]\mid y_0\in D'_0\setminus F_0\}$ в $\bigl(\mathscr{D}'(D'_0)/{\sim_\rho},\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}\bigr)$.

Применяя лемму 3 и определения метрик $\varrho_{p,\mathscr{F}}$ и $\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}$, выводим следующее.

1. Всякая постоянная последовательность (y_0), $y_0\in D'_0\setminus F_0$, принадлежит $\mathscr{D}'(D'_0)$ при любой точке z_0, что обеспечивает корректность определения 8.

2. Множество $\mathscr{D}'(D'_0)$ и, как следствие, $\mathscr{C}^{\sec}\mathscr{D}'_p$ не зависят от выбора $z_0\in D'_0\setminus F_0$ (здесь следует обратить внимание на конечность функции $\varrho_{p,\mathscr{F}}$).

3. Соответствие, сопоставляющее точке y_0 класс эквивалентности $[(y_0)]$, содержащий постоянную последовательность (y_0), есть изометрическое вложение пространства $(D'_0\setminus F_0,\varrho_{p,\mathscr{F}})$ в $\bigl(\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p,\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}\bigr)$, т. е.

$$\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}\bigl([(y_0^1)],[(y_0^2)]\bigr)=\varrho_{p,\mathscr{F}}\bigl(y_0^1,y_0^2\bigr)$$

для всех y_0^1, $y_0^2\in D'_0\setminus F_0$.

Из того, что $\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p$ замкнутое в полном пространстве $\mathscr{D}'(D'_0)/{\sim_\rho}$, следует, что отображение $y_0\mapsto[(y_0)]$ может быть продолжено до изометрии

$$i:\bigl(\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p,\varrho^{\mathrm{k}}_{p,\mathscr{F}}\bigr)\to\bigl(\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p,\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}\bigr)\tag{9}$$

(определение $\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p$ см. в разд. 2). Хотя построенное таким образом пространство $\mathscr{C}^{\sec}\mathscr{D}'_p$ изометрично пространству $\mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}'_p$, такое представление пополнения множества $D'_0\setminus F_0$, снабженного емкостной метрикой, приводит к другим наблюдениям при установлении связей с евклидовой геометрией, поскольку теперь мы имеем дело с другим запасом представляющих последовательностей.

Как показано в предложении 5, для всякой точки $y_0\in D'_0\setminus F_0$ и произвольной последовательности $(y_j\in D'_j\setminus F_j)$ справедливо: если (y_j) сходится к y_0 в евклидовой метрике, то $\varlimsup\limits_j\rho_{p,F_j}(y_0,y_j)=0$. Так что всякая последовательность $(y_j\in D'_j\setminus F_j)$, сходящаяся к некоторой точке y_0 из $D'_0\setminus F_0$, принадлежит классу $[(y_0)]$.

С этого момента отсутствие нижнего индекса будет обычно означать, что мы имеем дело с последовательностью: $y=(y_j)$, $y^m=\bigl(y^m_j\bigr)$ и т. д.

Определение 9. Для класса $Y\in\mathscr{C}^{\sec}\mathscr{D}'_p$ определим его носитель $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ как совокупность всех частичных пределов в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ последовательности $y=(y_j\in D'_j\setminus F_j)$ для всех $y\in Y$.

[6)] Равенство $\xi^0=(z_0)$ понимается в том смысле, что $\xi^0_j=z_0$, если $z_0\in D'_j\setminus F_j$, т. е. при п. в. j.

Предложение 8. *Пусть выполнены условия предложения 3. Тогда для каждого $h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p$ выполнено включение*

$$\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \subset \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(i(h)),$$

где i — изометрия (9). Более того, для всякой точки $y_0 \in \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h)$ существует последовательность $(y_j \in D'_j \cap D'_0 \setminus (F_j \cup F_0)) \in i(h)$, сходящаяся к y_0 в евклидовой метрике. В частности, для всякого $Y \in \mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p$ пересечение $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y) \cap \overline{D'_0 \setminus F_0}$ непустое.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{y_0^m\} \in h$, сходящуюся к произвольной точке $y_0 \in \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h)$ в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющую при каждом m неравенству

$$\varrho_{p,\mathscr{F}}\bigl(y_0^m, y_0^{m+1}\bigr) < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Поскольку i — изометрия, то

$$\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}\bigl(i\bigl(y_0^m\bigr), i\bigl(y_0^{m+1}\bigr)\bigr) < \frac{1}{2^{m+1}}$$

для всех m. Пусть последовательность $y^m = \bigl(y_j^m\bigr) \in i\bigl(y_0^m\bigr)$ такова, что $y_j^m = y_0^m$ при всех $j \geq j_m^0$, где j_m^0 — число такое, что точка $y_0^m \in D'_0 \setminus F_0$ принадлежит всем $D'_j \setminus F_j$ при $j \geq j_m^0$. По определению $\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}$ это означает, что

$$\varlimsup_j \rho_{p,F_j}\bigl(y_j^m, y_j^{m+1}\bigr) < \frac{1}{2^{m+1}} \text{ для всех } m.$$

Следовательно, для каждого $m \geq 1$ найдется $j_m > \max\bigl\{j_{m-1}, j_m^0\bigr\}$ такое, что при всех $j \geq j_m$ справедливо

$$\rho_{p,F_j}\bigl(y_j^m, y_j^{m+1}\bigr) < \frac{1}{2^{m+1}},$$

где $j_0 = 1$. Положим $y_j = y_j^m = y_0^m$ при $j_m \leq j < j_{m+1}$ и $m \geq 1$. Если $j_1 > 1$, то для $j < j_1$ выберем $y_j \in D'_j \setminus F_j$ произвольным образом. Очевидно, что $y = (y_j)$ сходится к y_0 в евклидовой метрике.

Для $j_{m+m'} \leq j < j_{m+m'+1}$ имеем

$$\rho_{p,F_j}\bigl(y_j^m, y_j\bigr) = \rho_{p,F_j}\bigl(y_j^m, y_j^{m+m'}\bigr) \leq \sum_{l=1}^{m'} \rho_{p,F_j}\bigl(y_j^{m+l-1}, y_j^{m+l}\bigr) < \sum_{l=1}^{m'} \frac{1}{2^{m+l}} < \frac{1}{2^m},$$

где $\rho_{p,F_j}\bigl(y_j^{m+l-1}, y_j^{m+l}\bigr) < 1/2^{m+l}$ в силу того, что $j \geq j_{m+m'} > j_{m+l-1}$ при всех $l = 1, \dots, m'$. Отсюда для всех $j \geq j_{m+1}$ выводим

$$\rho_{p,F_j}\bigl(y_j^m, y_j\bigr) < \frac{1}{2^m}.$$

Следовательно, $\varlimsup\limits_j \rho_{p,F_j}\bigl(y_j^m, y_j\bigr) \leq 1/2^m$, $y \in \mathscr{D}'(D'_0)$ и

$$\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}\bigl(i(y^m), [y]\bigr) \leq 1/2^m \to 0.$$

Поскольку $i(y^m) \to i(h)$ в $\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p$, то $[y] = i(h)$ и, таким образом, $y \in i(h)$. $\square$

В примере исчезающей ручки последовательности вида

$$y_j = (2 - j^{-1}/2, t), \quad t \in [-1; 1],$$

принадлежат классу $i(h)$, где $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) = \{(2,1), (2,-1)\}$. Отсюда можно вывести, что $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(i(h)) = \{2\} \times [-1; 1] \neq \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h)$. Также данный пример показывает, что носители элементов пространства $\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p$ могут не содержаться в замыкании ядра.

Предложение 9. *Пусть выполнены условия предложения 3 и $Y \in \mathscr{C}^{\mathrm{sec}}\mathscr{D}'_p$. Тогда множество $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ связное и замкнутое и выполнено одно и только одно из следующих утверждений:*

(1) *$\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ представляет собой одноточечное множество, содержащееся в $D'_0 \setminus F_0$;*

(2) *$\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ содержится в F_0;*

(3) *$\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ имеет непустое пересечение с границей ядра $\partial D'_0$ и содержится вне D'_0.*

Доказательство. (1) Предположим, что $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ не является связным. Тогда для некоторых непересекающихся открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств U и V, каждое из которых имеет непустое пересечение с $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$, имеем $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y) \subset U \cup V$. Пусть $y = (y_j) \in Y$ — последовательность, сходящаяся в евклидовой метрике к некоторой точке $y_0 \in \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(i^{-1}(Y)) \subset \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$. Для определенности можно считать, что $y_0 \in U$. Согласно определению $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ рассмотрим последовательность $z = (z_j) \in Y$, имеющую частичный предел, содержащийся в V. Тогда $z_j \in V$ для бесконечно многих j. При этом $y_j \in U$ для п. в. j. Найдется последовательность кривых $(\gamma_j : [0;1] \to D'_j \setminus F_j)$ с концевыми точками y_j и z_j такая, что

$$\operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma_j, F_j; L^1_p(D'_j)\right) \le 2\rho_{p,F_j}(y_j, z_j).$$

На каждой кривой γ_j выберем по точке w_j со следующим условием: если $z_j \in V$ и $y_j \in U$, то $w_j \notin U \cup V$; в противном случае точка $w_j \in \gamma_j$ произвольная. Для $w = (w_j)$ в силу свойства монотонности имеем

$$\varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y_j, w_j) \le \varlimsup_j \operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma_j, F_j; L^1_p(D'_j)\right) \le 2 \varlimsup_j \rho_{p,F_j}(y_j, z_j) = 0,$$

т. е. $w \sim_\rho y \in Y$. В то же время из построения w следует, что бесконечное число точек w_j лежит вне $U \cup V$. Поскольку $U \cup V$ открыто, некоторый частичный предел последовательности w не принадлежит $U \cup V$. Получено противоречие с тем, что $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y) \subset U \cup V$.

(2) Покажем, что $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ замкнуто. Пусть $\left\{y_0^m \in \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)\right\}$ сходится в евклидовой метрике к некоторой точке y_0. Требуется показать, что существует последовательность $y^0 = \left(y_j^0\right) \in Y$, имеющая подпоследовательность, сходящуюся к y_0. С самого начала можно считать, что $d\left(y_0, y_0^m\right) < 1/m$. Положим $j_1 = 1$. Пусть $y^m = \left(y_j^m\right) \in Y$ — последовательность, имеющая точку y_0^m в качестве предельной, $m \in \mathbb{N}$. По выбору последовательностей y^m для всякого $m \ge 2$ найдется число $j_m > j_{m-1}$ такое, что $y^m_{j_m} \in B(y_0, m^{-1})$ и

$$\rho_{p,F_j}\left(y_j^1, y_j^m\right) < \frac{1}{m} \text{ для всех } j \ge j_m.$$

Положим $y_j^0 = y_j^m$ при $j_m \le j < j_{m+1}$. Тогда, очевидно, $y^0_{j_m} = y^m_{j_m} \to y_0$. Также при $j_m \le j < j_{m+1}$ выполняются соотношения

$$\rho_{p,F_j}\left(y_j^1, y_j^0\right) = \rho_{p,F_j}\left(y_j^1, y_j^m\right) < \frac{1}{m}.$$

Так как в последнем неравенстве m неограниченно возрастает при $j \to \infty$, то $\varlimsup\limits_j \rho_{p,F_j}\left(y_j^1, y_j^0\right) = 0$. Значит, $y^0 \sim_\rho y^1 \in Y$.

(3) Доказательство утверждения о возможных расположениях носителя $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(Y)$ в определенной мере повторяет доказательство аналогичного утверждения для $\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h)$ (см. предложение 6), поэтому мы опускаем некоторые детали.

По предложению 8 в каждом классе $Y \in \mathscr{C}^{\rm sec}\mathscr{D}'_p$ существует последовательность $y = (y_j)$, сходящаяся к некоторой точке $y_0 \in \overline{D'_0}$ (при этом наличие других свойств, например, гарантируемых предложением 8, у последовательности y для дальнейших рассуждений не требуется). Будем вести перебор случаев по расположению y_0.

(3.1) Если $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$, то рассмотрим шар $\overline{B} = \overline{B}(y_0, r)$ и замыкание $\overline{V}$ связной окрестности F_0 такие, что $2\overline{B} \cap \overline{V} = \varnothing$ и $2\overline{B}$, $\overline{V} \subset D'_0$, где $2\overline{B} = \overline{B}(y_0, 2r)$. Пусть еще $\Omega \Subset D'_0$ — область, содержащая $2\overline{B}$ и $\overline{V}$. Предположим, что некоторая последовательность $(z_j) \in Y$ не сходится к y_0. Выбирая $r > 0$ достаточно малым, можем считать, что некоторая подпоследовательность (z_{j_l}) последовательности (z_j) лежит вне этого шара, а также что $y_{j_l} \in \overline{B}$ для всех l, так как $d(y_j, y_0) \to 0$. В силу того, что $\varlimsup\limits_{l} \rho_{p,F_{j_l}}(y_{j_l}, z_{j_l}) \le \varlimsup\limits_{j} \rho_{p,F_j}(y_j, z_j) = 0$, найдутся кривые $\gamma_l : [0;1] \to D'_{j_l}$, $l \in \mathbb{N}$, каждая из которых соединяет точки y_{j_l} и z_{j_l}, удовлетворяющие соотношению

$$\operatorname{cap}\big(\gamma_l, F_{j_l}; L^1_p(D'_{j_l})\big) \to 0.$$

Отсюда согласно свойству монотонности следует, что $\operatorname{cap}\big((\gamma_l)_{2\overline{B}}, F_{j_l}; L^1_p(\Omega)\big) \to 0$. С другой стороны, все $\operatorname{diam}(\gamma_l)_{2\overline{B}}$ не меньше чем r. Снова получили противоречие с леммой 1 при $S_1 = 2\overline{B}$, $S_0 = \overline{V}$.

(3.2) Пусть $y_0 \in F_0$. Предположим, что существует последовательность $(z_j) \in Y$, все члены некоторой подпоследовательности (z_{j_l}) которой находятся вне связной окрестности $U_2 \Subset D'_0$ континуума F_0. Рассмотрим еще связные окрестности $U_1 \Subset V_1 \Subset V_2 \Subset U_2$ континуума F_0. Поскольку $\varlimsup\limits_{l} \rho_{p,F_{j_l}}(y_{j_l}, z_{j_l}) \le \varlimsup\limits_{j} \rho_{p,F_j}(y_j, z_j) = 0$, существуют кривые $\gamma_l : [0;1] \to D'_{j_l}$, $l \in \mathbb{N}$, такие, что $\gamma_l(0) = y_{j_l}$, $\gamma_l(1) = z_{j_l}$ и $\operatorname{cap}\big(\gamma_l, F_{j_l}; L^1_p(D'_{j_l})\big) \to 0$ при $l \to \infty$. Диаметры кривых $(\gamma_l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}}$ отделены от нуля расстоянием $\operatorname{dist}(V_1, \partial V_2) > 0$, так как $y_{j_l} \in V_1$ и $z_{j_l} \notin V_2$ при достаточно больших l, но в то же время емкости $\operatorname{cap}\big((\gamma_l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}}, F_{j_l}; L^1_p(U_2)\big)$ стремятся к нулю. Это противоречит лемме 1, если положить $S_1 = \overline{V_2 \setminus V_1}$, $S_0 = \overline{U_1}$.

(3.3) Пусть $y_0 \in \partial D'_0$. Предположим, что существует последовательность $(z_j) \in Y$, некоторая подпоследовательность (z_{j_l}) которой сходится к $z_0 \in D'_0$. Обозначим $\widetilde{\mathscr{D}}' = (\widetilde{D}'_l)$, $\widetilde{\mathscr{F}} = (\widetilde{F}_l)$, где $\widetilde{D}'_l = D'_{j_l}$, $\widetilde{F}_l = F_{j_l}$, и рассмотрим то ядро $\widetilde{D}'_0$ последовательности $\widetilde{\mathscr{D}}'$, которое содержит D'_0. Очевидно, что пара $\widetilde{\mathscr{D}}'$, $\widetilde{\mathscr{F}}$ удовлетворяет условиям предложения 3, причем $\widetilde{F}_0 = F_0$ — континуум в ядре $\widetilde{D}'_0$, соответствующий $\widetilde{\mathscr{F}}$.

Рассмотрим пространства $\big(\mathscr{C}^{\rm k}\widetilde{\mathscr{D}}'_p, \varrho^{\rm k}_{p,\widetilde{\mathscr{F}}}\big)$, $\big(\mathscr{C}^{\rm s}\widetilde{\mathscr{D}}'_p, \varrho^{\rm s}_{p,\widetilde{\mathscr{F}}}\big)$. Пусть $\widetilde{i}$ — их естественная изометрия. Тогда (y_{j_l}) и (z_{j_l}) представляют один элемент из $\big(\mathscr{C}^{\rm s}\widetilde{\mathscr{D}}'_p, \varrho^{\rm s}_{p,\widetilde{\mathscr{F}}}\big)$. Действительно, для всех последовательностей $\big(w^1_j \in D'_j \setminus F_j\big)$, $\big(w^2_j \in D'_j \setminus F_j\big)$ имеем неравенство

$$\varlimsup_{l} \rho_{p,\widetilde{F}_l}\big(w^1_{j_l}, w^2_{j_l}\big) \le \varlimsup_{j} \rho_{p,F_j}\big(w^1_j, w^2_j\big).$$

Отсюда если $\big\{y^m_0 \in D'_0 \setminus F_0\big\} \in i^{-1}(Y)$, то последовательность $\big\{y^m_0\big\}$ фундаментальная в пространстве $\mathscr{C}^{\rm k}\widetilde{\mathscr{D}}'_p$ и (y_{j_l}), $(z_{j_l}) \in \widetilde{i}(\widetilde{h})$, где $\big\{y^m_0\big\} \in \widetilde{h} \in \mathscr{C}^{\rm k}\widetilde{\mathscr{D}}'_p$.

Далее, в зависимости от того, лежит ли $z_0 \in D_0'$ вне континуума F_0 или принадлежит F_0, остается проделать рассуждения п. (3.1) или п. (3.2) с заменой $\mathscr{D}'$, $\mathscr{F}$, (y_j), (z_j) и y_0 на $\widetilde{\mathscr{D}}'$, $\widetilde{\mathscr{F}}$, (z_{j_l}), (y_{j_l}) и z_0 соответственно. В самом деле, последовательность $(z_{j_l}) \in \widetilde{i}(\widetilde{h})$ сходится к некоторой точке $z_0 \in D_0' \subset \widetilde{D}_0'$, а последовательность (y_{j_l}), эквивалентная ей, отстранена от z_0 и $\widetilde{F}_0 = F_0$ в смысле евклидовой метрики, т. е. мы попадаем в одну из уже рассмотренных ситуаций. $\square$

5. Совместное граничное поведение последовательности отображений

Этот раздел посвящен систематическому изучению предельного поведения последовательностей вида $(\theta_j(y_j))$ при помощи альтернативного задания граничных элементов в последовательности областей, описанного в разд. 4. Именно, пусть выполнены условия предложения 3. Пусть задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D_j' \to D_j)$, удовлетворяющих емкостному неравенству (7) с общей константой K и некоторыми $n-1 < q \le p \le n$ при $n > 2$ и $1 \le q \le p \le 2$ при $n = 2$, которая сходится к гомеоморфизму $\theta_0 : D_0' \to D_0$ локально равномерно в D_0', где D_0 — ядро последовательности областей $\mathscr{D} = (D_j)$.

Фиксируем в $\mathscr{D}$ мультиконтинуум $\vartheta(\mathscr{F})$ и определим отображение

$$\vartheta^{\mathrm{s}} : \mathscr{C}^{\sec}\mathscr{D}_p' \to \mathscr{C}^{\sec}\mathscr{D}_q$$

по правилу

$$[(y_j)] \mapsto [(\theta_j(y_j))].$$

Покажем, что задание ϑ^{s} корректно. Пусть $y_0 \in D_0' \setminus F_0$. Тогда $\theta_j(y_0) \to \theta_0(y_0) \in D_0 \setminus \theta_0(F_0)$ при $j \to \infty$ и поэтому согласно предложению 5 выполнено равенство

$$\overline{\lim_j}\, \rho_{q,\theta_j(F_j)}(\theta_j(y_0), \theta_0(y_0)) = 0,$$

из которого вытекает, что если $(y_j) \in \mathscr{D}'(D_0')$, то $(\theta_j(y_j)) \in \mathscr{D}(D_0)$. Действительно, в силу (7) имеем

$$\begin{aligned}\overline{\lim_j}\, &\rho_{q,\theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_0(y_0)) \\ &\le \overline{\lim_j}\, \rho_{q,\theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_j(y_0)) + \overline{\lim_j}\, \rho_{q,\theta_j(F_j)}(\theta_j(y_0), \theta_0(y_0)) \\ &\qquad = \overline{\lim_j}\, \rho_{q,\theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_j(y_0)) \le K\, \overline{\lim_j}\, \rho_{p,F_j}(y_j, y_0) < \infty\end{aligned}$$

(поскольку $\theta_0(y_0) \in D_0 \setminus \theta_0(F_0)$, это неравенство и означает, что $(\theta_j(y_j)) \in \mathscr{D}(D_0)$). Далее, если $(y_j) \sim_\rho (z_j)$, то $(\theta_j(y_j)) \sim_\rho (\theta_j(z_j))$ в силу неравенства

$$\overline{\lim_j}\, \rho_{q,\theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_j(z_j)) \le K\, \overline{\lim_j}\, \rho_{p,F_j}(y_j, z_j).$$

Последнее и означает корректность определения отображения $\vartheta^{\mathrm{s}} : \mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_p' \to \mathscr{D}(D_0)/\!\sim_\rho$.

Поскольку образы $[(\theta_0(y_0))]$ классов $[(y_0)]$, $y_0 \in D_0' \setminus F_0$, принадлежат $\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_q$ и $\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_q$ замкнуто в $\mathscr{D}(D_0)/\!\sim_\rho$, то образ $\vartheta^{\mathrm{s}}(Y)$ всякого $Y \in \mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_p'$ принадлежит $\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_q$ (заметим, что совокупность классов постоянных последовательностей (y_0), $y_0 \in D_0' \setminus F_0$, плотна в $\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_p'$, а отображение ϑ^{s} является K-липшицевым).

Для всякой последовательности $(y_j) \in Y \in \mathscr{C}^{\mathrm{sec}}\mathscr{D}'_p$, очевидно, справедливо

$$\theta_j(y_j) \to \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(\vartheta^{\mathrm{s}}(Y)).$$

Обозначим через

$$i_{\mathscr{D}'} : \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p \to \mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}'_p, \quad i_{\mathscr{D}} : \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}_q \to \mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_q$$

изометрии, гарантируемые теоремой Хаусдорфа о пополнении. Тогда

$$\vartheta^{\mathrm{s}} \circ i_{\mathscr{D}'} = i_{\mathscr{D}} \circ \vartheta^{\mathrm{k}},$$

поскольку $\vartheta^{\mathrm{s}}([(y_0)]) = [(\theta_0(y_0))] = i_{\mathscr{D}}(\theta_0(y_0))$ для всякой точки $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$ (т. е. указанное соотношение выполняется на плотном в $\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p$ множестве; поскольку все участвующие в выражении отображения непрерывны, оно справедливо и для всех $h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p$).

Объединяя перечисленные наблюдения с теоремой 3, можем сформулировать следующую теорему о граничном соответствии.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3*. Тогда существуют естественные изометрии*

$$i_{\mathscr{D}'} : \mathscr{C}^{\mathrm{ker}}\mathscr{D}'_p \to \mathscr{C}^{\mathrm{sec}}\mathscr{D}'_p, \quad i_{\mathscr{D}} : \mathscr{C}^{\mathrm{ker}}\mathscr{D}_q \to \mathscr{C}^{\mathrm{sec}}\mathscr{D}_q$$

для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{\mathrm{ker}}\mathscr{D}'_p & \xrightarrow{\ \vartheta^{\mathrm{k}}\ } & \mathscr{C}^{\mathrm{ker}}\mathscr{D}_q \\ {\scriptstyle i_{\mathscr{D}'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{\mathscr{D}}} \\ \mathscr{C}^{\mathrm{sec}}\mathscr{D}'_p & \xrightarrow{\ \vartheta^{\mathrm{s}}\ } & \mathscr{C}^{\mathrm{sec}}\mathscr{D}_q \end{array}$$

коммутативна, т. е. $\vartheta^{\mathrm{s}} \circ i_{\mathscr{D}'} = i_{\mathscr{D}} \circ \vartheta^{\mathrm{k}}$.

Это, в свою очередь, означает, что если $h \in \mathscr{C}^{\mathrm{ker}}\mathscr{D}'_p$ *— произвольный граничный элемент, то для всех* $\{y^m \in D'_0 \setminus F_0\} \in h$ *и всех* $(y_j \in D'_j \setminus F_j) \in i_{\mathscr{D}'}(h)$ *выполняются предельные соотношения*

$$\theta_0(y^m) \to \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(\vartheta^{\mathrm{k}}(h)), \quad \theta_j(y_j) \to \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(\vartheta^{\mathrm{s}}(i_{\mathscr{D}'}(h))),$$

причем

$$\mathscr{S}^{\mathrm{k}}(\vartheta^{\mathrm{k}}(h)) \subset \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(\vartheta^{\mathrm{s}}(i_{\mathscr{D}'}(h))), \quad \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(\vartheta^{\mathrm{s}}(i_{\mathscr{D}'}(h))) \cap D_0 = \varnothing.$$

Следствие 1. *Пусть* $n-1 < q \le p \le n$ *при* $n > 2$ *и* $1 \le q \le p \le 2$ *при* $n = 2$*. Пусть ограниченная область* D' *и континуум* $F \subset D'$ *со связным дополнением в* D' *таковы, что для некоторого открытого множества* $U \Subset D'$*, содержащего* F*, множество* $\{h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p \mid \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \cap U = \varnothing\}$ *компактно в метрическом пространстве* $\left(\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p, \varrho^{\mathrm{k}}_{p,\mathscr{F}}\right)$*, где* $\mathscr{D}' = (D')$*,* $\mathscr{F} = (F)$*. Пусть еще задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов* $\vartheta = (\theta_j : D' \to D_j)$*, удовлетворяющая емкостному неравенству* (7) *с общей константой* K *и сходящаяся локально равномерно в* D' *к гомеоморфизму* $\theta_0 : D' \to D_0$.

Если носитель $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(X)$ *всякого элемента* $X \in \left(\mathscr{C}^{\mathrm{s}}\mathscr{D}_q, \varrho^{\mathrm{s}}_{q,\vartheta(\mathscr{F})}\right)$ *такого, что* $\mathscr{S}^{\mathrm{s}}(X) \cap D_0 = \varnothing$*, является одноточечным множеством, то последовательность* ϑ *сходится к* θ_0 *равномерно на области* D'.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$, подпоследовательность (θ_{j_m}) и последовательность точек $(y_m \in D')$ такие, что

$$d(\theta_{j_m}(y_m), \theta_0(y_m)) \ge \varepsilon_0 \text{ для всех } m.$$

При этом можно считать, что $y_m \notin U$, поскольку ϑ сходится к θ_0 равномерно на $U \Subset D'$. Согласно предположению о компактности найдется подпоследовательность (y_{m_l}), сходящаяся к некоторому $h \in (\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p, \varrho^{\mathrm{k}}_{p,\mathscr{F}})$. Поэтому $\theta_0(y_{m_l}) \to x$, где $\{x\} = \mathscr{S}^{\mathrm{s}}(i_{\mathscr{D}}(\vartheta^{\mathrm{k}}(h)))$. Для $j_{m_l} \le j < j_{m_{l+1}}$ положим $z_j = y_{m_l}$ (если $j_{m_1} > 1$, то, как обычно, выбираем $z_j \in D'_j \setminus F_j$ при $j < j_{m_1}$ произвольным образом). Покажем, что $z = (z_j)$ принадлежит $\mathscr{D}'(D'_0)$ и что $z \in i_{\mathscr{D}'}(h)$.

Поскольку последовательность (y_{m_l}) фундаментальна в $\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p$, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется l_ε такое, что

$$\rho_{p,F}(y_{m_l}, y_{m_{l'}}) < \varepsilon$$

для всех l, $l' \ge l_\varepsilon$. Отсюда

$$\varlimsup_{j} \rho_{p,F}(z_j, y_{m_l}) \le \varepsilon \text{ при } l \ge l_\varepsilon.$$

Значит, $z \in \mathscr{D}'(D'_0)$ и $\varrho^{\mathrm{s}}_{p,\mathscr{F}}([z], i_{\mathscr{D}'}(y_{m_l})) \to 0$. Поэтому $[z] = i_{\mathscr{D}'}(h)$, поскольку $i_{\mathscr{D}'}$ — изометрия.

Таким образом, $\theta_j(z_j) \to x$ и потому $\theta_{j_{m_l}}(y_{m_l}) = \theta_{j_{m_l}}(z_{j_{m_l}}) \to x$. Мы получили, что $d(\theta_{j_{m_l}}(y_{m_l}), \theta_0(y_{m_l})) \to 0$. Это противоречит предположению о том, что $d(\theta_{j_m}(y_m), \theta_0(y_m)) \ge \varepsilon_0$ для всех m. $\square$

Простым достаточным условием компактности множества $\{h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p \mid \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \cap U = \varnothing\}$ является локальная конечная связность ядра D'_0 в каждой граничной точке $y \in \partial D'_0$.

Определение 10 [23, 24]. Пусть D' — область в $\mathbb{R}^n$.

(1) Область D' называется *локально связной в точке* $y \in \partial D'$, если для всякой окрестности U точки y найдется окрестность $V \subset U$ этой точки такая, что $V \cap D'$ связно.

(2) Область D' называется *локально μ-связной в точке* $y \in \partial D'$, $\mu \in \mathbb{N}$, если для всякой окрестности U точки y найдется окрестность $V \subset U$ этой точки такая, что множество $V \cap D'$ состоит из μ компонент связности, каждая из которых локально связна в точке y.

(3) Область D' называется *локально конечно связной в точке* $y \in \partial D'$, если для всякой окрестности U точки y найдется окрестность $V \subset U$ этой точки такая, что множество $V \cap D'$ состоит из конечного набора компонент связности.

Предложение 10. *Пусть выполнены условия предложения* 3. *Если ядро D'_0 последовательности D' локально конечно связно в каждой точке $y \in \partial D'_0$, то для любой окрестности $U \Subset D'_0$ континуума F_0 множество $\{h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p \mid \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \cap U = \varnothing\}$ компактно в пространстве $\big(\mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p, \varrho^{\mathrm{k}}_{p,\mathscr{F}}\big)$.*

Доказательство. Поскольку множество $D'_0 \setminus U$ плотно в $\{h \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}\mathscr{D}'_p \mid \mathscr{S}^{\mathrm{k}}(h) \cap U = \varnothing\}$ то можно рассматривать лишь последовательности, содержащиеся в $D'_0 \setminus U$. Пусть $\{y^m \in D'_0 \setminus U\}$. После перехода к подпоследовательности можем считать, что $\{y^m\}$ сходится к некоторой точке $y \in \overline{D'_0 \setminus U}$ в евклидовой метрике. Если $y \in D'_0 \setminus U$, то согласно предложению 6 справедлива сходимость $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y, y^m) \to 0$.

Пусть теперь $y \in \partial D'_0$. Выберем шар $B(y, r_1)$ достаточно малого радиуса, чтобы $\overline{B}(y, r_1) \cap \overline{U} = \varnothing$. Найдется окрестность $V_1 \subset B(y, r_1)$ точки y такая, что $V_1 \cap D'_0$ состоит из конечного числа компонент связности. Поскольку $\{y^m\}$ сходится к y, среди конечного набора компонент множества $V_1 \cap D'_0$ найдется та, в которой содержится бесконечное число точек y^m. Рассмотрим подпоследовательность $\{y_1^m\}$ в $\{y^m\}$ и компоненту $W_1 \subset V_1 \cap D_0'$ с тем свойством, что $y_1^m \in W_1$, $m \in \mathbb{N}$. Теперь выберем $r_2 < r_1/2$ таким образом, чтобы $B(y, r_1) \subset V_1$. Как и на первом шаге, найдется окрестность $V_2 \subset B(y, r_2)$ точки y такая, что $V_2 \cap D_0'$ состоит из конечного числа компонент связности, и поэтому найдутся подпоследовательность $\{y_2^m\}$ в $\{y_1^m\}$ и компонента $W_2 \subset V_2$ такие, что $y_2^m \in W_2$, $m \in \mathbb{N}$. Продолжаем этот процесс по индукции.

Положим $y_0^1 = y_1^1$. Пусть выбраны элементы $y_0^1, \dots, y_0^{l-1}$ последовательности $\{y^m\}$. В качестве y_0^l возьмем член последовательности $\{y_l^m\}$ так, чтобы номера элементов $y_0^1, \dots, y_0^l$ как членов последовательности $\{y^m\}$ возрастали. Таким образом, $\{y_0^l\}$ — подпоследовательность последовательности $\{y^m\}$. Поскольку пространство $\mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}_p'$ полное, достаточно показать, что $\{y_0^l\}$ фундаментальна. По построению для всех $l_2 \geq l_1 \geq 1$ найдется кривая $\gamma^{l_1,l_2} : [0;1] \to W_{l_1}$ с концевыми точками $y_0^{l_1}$ и $y_0^{l_2}$. Выберем $j(l_1, l_2)$ таким образом, чтобы $\varrho_{p,\mathscr{F}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1}) \leq 2\rho_{p,F_{j(l_1,l_2)}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1})$ и $\gamma^{l_1,l_2} \subset D'_{j(l_1,l_2)}$. Тогда для $l_2 \geq l_1 \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned}\varrho_{p,\mathscr{F}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1}) \leq 2\rho_{p,F_{j(l_1,l_2)}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1}) &\leq 2\operatorname{cap}^{1/p}\left(\gamma^{l_1,l_2}, F_{j(l_1,l_2)}; L_p^1(D'_{j(l_1,l_2)})\right)\\ &\leq 2\operatorname{cap}^{1/p}\left(\overline{B}(y, r_{l_1}), \overline{U}; L_p^1(\mathbb{R}^n)\right) \to 0 \text{ при } l_1 \to \infty,\end{aligned}$$

так как $\gamma^{l_1,l_2} \subset W_{l_1} \subset B(y, r_{l_1})$ и $r_{l_1} \to 0$. $\square$

6. Связь с экстремальной задачей теории упругости

Основываясь на [25], приведем условия, при которых результаты данной работы можно применить для изучения граничного поведения деформаций, возникающих в математической теории упругости. В монографии [26] приведен обзор результатов нелинейной теории упругости, связанных с подходом Болла.

Обозначим через $\mathbb{M}^n$ пространство вещественных $n \times n$-матриц. Функция $W : D \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ называется *поливыпуклой*, если найдется выпуклая функция $G : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times (0;\infty) \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$ с положительным определителем равенство

$$G(x, F, \operatorname{Adj} F, \det F) = W(x, F)$$

справедливо для п. в. $x \in D$.

Говорят, что функция $G : D \times \mathbb{R}^{\mathrm{T}} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Каратеодори*, если функция $G(x, \cdot)$ непрерывна для п. в. $x \in D$ и функция $G(\cdot, a)$ измерима для всех $a \in \mathbb{R}^{\mathrm{T}}$.

Известно, что если функция $G : D \times \mathbb{R}^{\mathrm{T}} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори, а отображение $f : D \to \mathbb{R}^{\mathrm{T}}$ измеримо, то функция $x \mapsto G(x, f(x))$ измерима на D.

Фиксируем области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$. Определим следующий класс допустимых деформаций:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(p,q,M) = \{\varphi : D \to D' \mid \varphi &\text{ — гомеоморфизм с конечным искажением},\\ &\varphi \in W_1^1(D),\ I(\varphi) < \infty,\ \det D\varphi \geq 0 \text{ п. в. в } D,\\ &K_O(\cdot,\varphi) \in L_p(D),\ \|K_I(\cdot,\varphi)\|_{L_q(D)} \leq M\},\end{aligned}$$

где

$$I(\varphi) = \int\limits_D W(x, D\varphi(x))\,dx,$$

$$K_O(x,\varphi)=\frac{|D\varphi(x)|^n}{|\det D\varphi(x)|},\quad K_I(x,\varphi)=\frac{|\operatorname{Adj}D\varphi(x)|^n}{|\det D\varphi(x)|^{n-1}}.$$

Справедлива следующая теорема существования минимума функционала I.

Теорема 5 [25, теорема 11]. *Пусть $D,D'\subset\mathbb{R}^n$ — области с липшицевыми границами, $\alpha>0$, $g\in L_1(D)$ и поливыпуклая функция $W:D\times\mathbb{M}^n\to\mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству коэрцитивности*

$$W(x,F)\geq\alpha|F|^n+g(x).$$

Если класс $\mathscr{H}(n-1,s,M)$ непустой, $s>1$, $M>0$, то существует гомеоморфизм $\varphi_0\in\mathscr{H}(n-1,s,M)$ такой, что

$$I(\varphi_0)=\inf\{I(\varphi)\mid\varphi\in\mathscr{H}(n-1,s,M)\}.$$

Сформулируем условия, при которых теоремы 3, 4 могут быть применены для изучения граничного поведения экстремальных деформаций.

Для фиксированных $q\in(n-1;n]$, $K>0$, ограниченных областей $D,D'\subset\mathbb{R}^n$ с липшицевыми границами и гомеоморфизма $\psi:\overline{D}\to\overline{D'}$ класса $W_1^1(D)$ рассмотрим классы допустимых деформаций

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(q,K,D,D')=\big\{\varphi:D\to D'\mid\varphi\in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)&-\text{гомеоморфизм}\\ \text{с конечным искажением, }I(\varphi)<\infty,\ \det D\varphi\geq0\text{ п. в. в }D,&\\ \|K_{q,n}(\cdot,\varphi)\|_{L_\sigma(D)}\leq K\big\},&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(q,K,D,D';\psi)=\{\varphi:\varphi:\overline{D}\to\overline{D'}\mid\varphi&-\text{гомеоморфизм},\\ \varphi|_D\in\mathscr{A}(q,K,D,D'),\ \varphi|_{\partial D}=\psi|_{\partial D}\},&\end{aligned}$$

где $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$ при $q<n$ и $\sigma=\infty$ при $q=n$.

Пусть даны гомеоморфизмы $\psi_j:\overline{D}\to\overline{D'_j}$ класса $W_1^1(D)$, где D, D'_j — ограниченные области с липшицевыми границами, $j=0,1,2,\dots$. Пусть еще последовательность граничных данных $(\psi_j|_{\partial D})_j$ сходится равномерно к $\psi_0|_{\partial D}$. Отметим, что при указанных предположениях последовательность областей $\mathscr{D}'=(D'_j)$ оказывается равномерно ограниченной. Также нетрудно вывести, что из равномерной сходимости $(\psi_j|_{\partial D})$ к $\psi_0|_{\partial D}$ следует, что D'_0 есть ядро последовательности $\mathscr{D}'$[7)]. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\varliminf_j\inf\{I(\varphi)\mid\varphi\in\mathscr{A}(q,K,D,D'_j;\psi_j)\}.\tag{10}$$

Очевидная модификация доказательства теоремы 5 приводит к тому, что если соответствующие классы допустимых деформаций непустые, то для каждого $j=1,2,\dots$ существует гомеоморфизм $\varphi_j\in\mathscr{A}(q,K,D,D'_j;\psi_j)$ такой, что

$$I(\varphi_j)=\inf\{I(\varphi)\mid\varphi\in\mathscr{A}(q,K,D,D'_j;\psi_j)\}.$$

После перехода к подпоследовательности можно считать, что $(I(\varphi_j))$ сходится к величине (10). Пусть нижний предел (10) конечен. Тогда в силу неравенства коэрцитивности последовательность (φ_j) ограничена в $W_n^1(D)$. Отсюда в силу липшицевости границы области D вытекает, что отображения φ_j имеют в $\overline{D}$

7) Более того, D'_0 является ядром любой подпоследовательности (D'_{j_k}) последовательности $\mathscr{D}'$.

общий модуль непрерывности [27, § 4] и потому (φ_j) можно считать равномерно сходящейся к непрерывному отображению $\varphi_0 : \overline{D} \to \overline{D_0'}$.

С другой стороны, последовательность обратных отображений $(\theta_j = \varphi_j^{-1})$ ограничена в $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D_0')$: по теореме 4 работы [28] обратные отображения θ_j имеют конечное искажение, каждое из них принадлежит $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D_j')$ и выполнена оценка

$$\|K_{n,q'}(\cdot,\theta_j) \mid L_{\sigma'}(D_j')\| \le \|K_{q,n}(\cdot,\varphi_j) \mid L_\sigma(D)\|^{n-1},$$

где $q' = \frac{q}{q-n+1}$, $\frac{1}{\sigma'} = \frac{1}{n} - \frac{1}{q'}$; применяя теорему 1, можно вывести отсюда ограниченность последовательности обобщенных дифференциалов $D\theta_j$ в $L_{n,\mathrm{loc}}(D_0')$. Так как область D ограничена, (θ_j) тоже можно считать локально равномерно сходящейся в ядре D_0' к некоторому непрерывному отображению $\theta_0 : D_0' \to \overline{D}$. Из равномерной сходимости (φ_j) к φ_0 на $\overline{D}$ и из соотношений $\varphi_j(\theta_j(y)) = y$, $y \in D_0'$, следует равенство $\varphi_0(\theta_0(y)) = y$, т. е. θ_0 — непрерывная инъекция. По теореме о сохранении области [26, теорема 1.2-6] θ_0 есть гомеоморфизм ядра D_0' на некоторую подобласть области D, которая согласно теореме 2 совпадает с D. Отсюда ввиду равенства $\varphi_0(\theta_0(y)) = y$ выводим, что $\varphi_0(x) \in D_0'$, $x \in D$. Поскольку (θ_j) сходится к θ_0 локально равномерно на D_0', то, переходя к пределу в равенствах $\theta_j(\varphi_j(x)) = x$, получаем $\theta_0(\varphi_0(x)) = x$. Таким образом, $\varphi_0 : D \to D_0'$ — гомеоморфизм, обратный к θ_0.

Итак, к последовательности гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j)$ применимы теоремы о граничном соответствии. Фиксируем замкнутый шар $B \subset D$. Тогда $\mathscr{F} = (F_j) = (\varphi_j(B))$ — мультиконтинуум в последовательности $\mathscr{D}'$, удовлетворяющий условиям теоремы 3. В силу липшицевости границ областей все граничные элементы каждой отдельно взятой области обладают одноточечными носителями, причем разным граничным элементам соответствуют разные носители. Так, предельное отображение θ_0 допускает продолжение по непрерывности до отображения $\overline{\theta}_0 : \overline{D_0'} \to \overline{D}$. Также для всякого граничного элемента $h \in \mathscr{C}^{\ker}\mathscr{D}_n'$ с одноточечным носителем $\{y_h\}$ и всех $(y_j) \in i_{\mathscr{D}'}(h)$ справедливо

$$\theta_j(y_j) \to \overline{\theta}_0(y_h).$$

Проводя рассуждения в духе доказательства следствия 1, при условии типа *компактности* отсюда можно вывести равномерную сходимость в следующей форме:

$$\sup_{y \in D_0' \cap D_j'} d(\theta_0(y), \theta_j(y)) \to 0.$$

Условие компактности состоит в том, что *для любой последовательности* $(y_j \in D_j' \setminus F_j)$ *существует последовательность чисел* (j_l) *такая, что* (y_{j_l}) *представляет некоторый граничный элемент в последовательности областей* (D_{j_l}') *с мультиконтинуумом* (F_{j_l}).

Благодарность. Авторы выражают искреннюю признательность анонимному рецензенту за конструктивные предложения по улучшению первоначального варианта рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carathéodory C.* Über die Bergenzung einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. 1913. V. 73, N 3. P. 323–370.
2. *Зорич В. А.* Соответствие границ при q-квазиконформных отображениях шара // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 6. С. 1209–1212.

3. *Зорич В. А.* Определение граничных элементов посредством сечений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 4. С. 736–739.

4. *Водопьянов С. К.* О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 630–633.

5. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи. мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 17–65.

6. *Кругликов В. И.* Простые концы пространственных областей с переменными границами // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 5. С. 1047–1050.

7. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* Простые концы и классы Орлича — Соболева // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 5. С. 81–116.

8. *Суворов Г. Д.* Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 73–100.

9. *Суворов Г. Д.* Простые концы и последовательности плоских отображений. Киев: Наук. думка, 1986.

10. *Vodopyanov S. K., Molchanova A. O.* The boundary behavior of $\mathscr{Q}_{q,p}$-homeomorphisms // Изв. РАН. 2023. V. 87, N 4. P. 47–90.

11. *Суворов Г. Д.* Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965.

12. *Gehring F. W.* The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1963. V. 336, N 11. P. 1–21.

13. *Водопьянов С. К.* Об эквивалентности двух подходов к задачам квазиконформного анализа // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1252–1270.

14. *Водопьянов С. К.* Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 63–112.

15. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Euras. Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58–96.

16. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

17. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.

18. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

19. *Решетняк Ю. Г.* О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5. С. 1109–1138.

20. *Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А.* Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1016–1036.

21. *Мазья В. Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы математического анализа. Л.: ЛГУ, 1972. Вып. 3. С. 33–68.

22. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов, простые концы и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Донецк, 1987.

23. *Näkki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1970. V. 484. P. 1–50.

24. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1971.

25. *Molchanova A., Vodopyanov S.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calc. Var. 2019. V. 59, N 17. P. 1–25.

26. *Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. V. 1. Three-dimensional elasticity. Amsterdam: North-Holland; Elsevier Sciю B.V., 1988.

27. *Mostow G. D.* Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques. 1968. V. 34. P. 53–104.

28. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб.

2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.

Поступила в редакцию 5 декабря 2023 г.
После доработки 18 марта 2024 г.
Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Водопьянов Сергей Константинович,
Павлов Степан Валерьевич,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, s.pavlov4254@gmail.com