

## ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ОБЪЕМОВ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

А. Ю. Веснин, А. А. Егоров

**Аннотация.** Многогранник в трехмерном гиперболическом пространстве называется обобщенным, если его вершины могут быть конечными, идеальными или усеченными. В силу теоремы Беллетти (2021) верхняя точная грань объемов обобщенных гиперболических многогранников, имеющих один и тот же одномерный скелет  $\Gamma$ , достигается на идеальном прямоугольном многограннике, который называют ректификацией графа  $\Gamma$ . В работе получены верхние оценки для произвольных обобщенных гиперболических многогранников. Эти оценки линейно зависят от числа ребер многогранника. Более того, показано, что оценки могут быть улучшены, если многогранник имеет треугольные грани и трехвалентные вершины. В качестве приложения получены новые верхние оценки объемов гиперболических зацеплений, имеющих более восьми скручиваний в диаграмме.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.304

**Ключевые слова:** геометрия Лобачевского, объемы гиперболических многогранников, гиперболические узлы и зацепления.

### 1. Введение

В работе рассматриваются выпуклые многогранники конечного объема, лежащие в пространстве Лобачевского (гиперболическом пространстве)  $\mathbb{H}^3$ . Многогранник в пространстве постоянной секционной кривизны  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{E}^3$  или  $\mathbb{H}^3$  будем называть *остроугольным*, если все его двугранные углы не превосходят  $\pi/2$ . В частности, будем называть многогранник *прямоугольным*, если все его двугранные углы равны  $\pi/2$ . Хорошо известно, что в сферическом пространстве  $\mathbb{S}^n$  любой остроугольный многогранник является симплексом [1, теорема 1], а в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^n$  любой остроугольный многогранник является прямым произведением некоторого числа симплексов и симплицального конуса [1, теорема 2] (см. также [2, гл. 6, теорема 1.5]).

Необходимые и достаточные условия реализации многогранника заданного комбинаторного типа с предписанными двугранными углами как остроугольного многогранника в  $\mathbb{H}^3$  конечного объема описываются теоремами Андреева [3, 4] (см. также [5]). Эти условия формулируются в виде линейных уравнений и неравенств, которые определяются комбинаторикой одномерного скелета (1-скелета) многогранника. Более того, если реализация многогранника в  $\mathbb{H}^3$  существует, то она единственна с точностью до изометрии пространства.

---

Работа выполнена при поддержке гранта Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» и госзадания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0004).

Таким образом, объем остроугольного гиперболического многогранника полностью определяется комбинаторикой его 1-скелета и двугранными углами. Положим  $\mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ . Вершину гиперболического многогранника будем называть *идеальной*, если она принадлежит абсолюту  $\partial\mathbb{H}^3$ . Многогранник будем называть *идеальным*, если все его вершины являются идеальными. В силу теоремы Андреева [4] если  $P$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник, то каждая его вершина является 4-валентной, т. е. инцидентна ровно четырем ребрам. Вычисление объема гиперболического многогранника по его комбинаторике и двугранным углам является достаточно трудной задачей. Частные примеры решения этой задачи восходят к Лобачевскому. Некоторые современные результаты и методы решения этой задачи представлены в работах Милнора [6], Винберга [7], Келлерхалса [8], Кашаева [9], Чо и Кима [10], Мураками и Яно [11], где рассматривались многогранники с конечными, идеальными и усеченными вершинами, имеющие фиксированную комбинаторику, такие как тетраэдры и пирамиды. В силу теоремы жесткости Мостова, вычисления объемов и оценки объемов имеют приложения в теории гиперболических 3-многообразий и в теории узлов [12].

Ниже в формулах для объемов трехмерных гиперболических многогранников и многообразий будем использовать *функцию Лобачевского*, введенную Милнором в [6]:

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin(t)| dt.$$

Ниже результаты о верхних и нижних оценках объемов будут сформулированы с использованием констант, которые с точностью до шести знаков имеют следующие значения:

$$v_{tet} = 3\Lambda(\pi/3) = 1,014941 \quad \text{и} \quad v_{oct} = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663863.$$

Приближенные численные значения величин, выражаемых через функцию Лобачевского, будут приводиться с точностью до шести знаков.

В данной работе будут получены верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников, где оценки линейно зависят от числа ребер. В разд. 2 напомним понятие обобщенного гиперболического многогранника. В [13] Белетти показал, что максимум объемов обобщенных гиперболических многогранников с одним и тем же 1-скелетом достигается на соответствующем идеальном прямоугольном гиперболическом многограннике (см. теорему 2.1). Оценки объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников через число вершин были ранее получены в [14–17]. Основываясь на этих результатах, мы даем в теореме 2.2 верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников через число ребер. В разд. 3 рассматривается случай, когда имеется дополнительная информация о комбинаторике обобщенного многогранника. А именно, в теореме 3.4 получены более сильные верхние оценки объемов, учитывающие число треугольных граней и трехвалентных вершин в многограннике. В разд. 4 приведены примеры использования оценок из теорем 2.2 и 3.4 для трех бесконечных семейств обобщенных гиперболических многогранников: пирамид, призм и пирамид с двумя вершинами. В разд. 5 описана связь между объемами гиперболических многогранников и оценками объемов гиперболических узлов и зацеплений через число скручиваний в их диаграммах. Связи такого типа ранее обсуждались в [18–21]. В теореме 5.1 получена

верхняя оценка для объемов гиперболических узлов и зацеплений, имеющих более восьми скручиваний в диаграмме.

## 2. Объем обобщенного гиперболического многогранника

Для определения обобщенного гиперболического многогранника будем использовать проективную модель пространства Лобачевского (см. подробнее в [22, 13, 12, 23]). Рассмотрим определенную на  $\mathbb{R}^4$  симметричную билинейную форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

При стандартном вложении  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{RP}^3$ , которое сопоставляет точке  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  точку  $\mathbb{RP}^3$  с однородными координатами  $(1, x_1, x_2, x_3)$ , подмножество  $\mathbb{H}^3$  соответствует открытому единичному шару в  $\mathbb{R}^3$ . При этом геодезические в  $\mathbb{H}^3$  — это пересечения  $\mathbb{H}^3$  с проективными прямыми из  $\mathbb{RP}^3$  или, эквивалентно, с прямыми из  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{RP}^3$ . Аналогично (вполне геодезические) гиперболические плоскости  $\mathbb{H}^3$  соответствуют непустым пересечениям  $\mathbb{H}^3$  с проективными плоскостями из  $\mathbb{RP}^3$  или, эквивалентно, с аффинными плоскостями из  $\mathbb{R}^3$ .

В проективной модели гиперболического пространства  $\mathbb{H}^3$  имеет место следующее свойство двойственности. Для  $k$ -мерного,  $0 \leq k \leq 2$ , проективного подпространства  $\ell \subset \mathbb{RP}^3$  рассмотрим соответствующее ему  $(k+1)$ -мерное линейное подпространство  $L \subset \mathbb{R}^4$ . Тогда подпространство  $L^\perp$ , ортогональное  $L$  относительно введенной выше формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , является  $(3-k)$ -мерным линейным подпространством в  $\mathbb{R}^4$  и задает  $(2-k)$ -мерное проективное подпространство  $\ell^\perp \subset \mathbb{RP}^3$ . В частности, если  $x \in \mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{H}^3$ , то  $x^\perp$  — плоскость, которая пересекает  $\mathbb{H}^3$ , а точка  $x$  называется *гиперидеальной*.

Реализацию выпуклого евклидова многогранника в проективной модели пространства  $\mathbb{H}^3$  будем называть *обобщенным гиперболическим многогранником*, если каждая его вершина является конечной, идеальной или гиперидеальной. При этом каждое ребро многогранника должно содержать внутренние точки пространства Лобачевского. Каждой гиперидеальной точке  $p$  сопоставим *полярную плоскость*  $\Pi_p \subset \mathbb{H}^3$ , которая является плоскостью, ортогональной всем прямым, проходящим через  $\mathbb{H}^3$  и  $p$ . Плоскость  $\Pi_p$  делит  $\mathbb{H}^3$  на два полупространства; обозначим через  $H_p \subset \mathbb{H}^3$  то из них, которое содержит  $0 \in \mathbb{R}^3$ . Обобщенный гиперболический многогранник  $P$  будем называть *собственным*, если для каждой гиперидеальной вершины  $v$  многогранника  $P$  внутренность полупространства  $H_v$  содержит все конечные вершины многогранника  $P$ .

Пусть  $P$  — обобщенный гиперболический многогранник, а  $U(P)$  — множество всех его гиперидеальных вершин. Определим *усечение* обобщенного гиперболического многогранника  $P$  как следующее множество:

$$P_{tr} = P \bigcap_{v \in U(P)} H_v.$$

*Объемом обобщенного многогранника  $P$*  будем считать объем его усечения  $P_{tr}$ . Отметим, что если многогранник  $P$  собственный, то двугранные углы при новых ребрах, появляющихся после усечения, равны  $\pi/2$ .

Следуя [13], будем говорить, что многогранник  $\bar{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{RP}^3$  является *ректификацией* трехсвязного графа  $\Gamma$ , если 1-скелет многогранника  $\bar{\Gamma}$  совпадает с графом  $\Gamma$  и все ребра  $\bar{\Gamma}$  касаются  $\partial H^3$ . Заметим, что  $\bar{\Gamma}$  не является обобщенным гиперболическим многогранником, так как его ребра не пересекают

внутренность  $\mathbb{H}^3$ . Тем не менее для  $\bar{\Gamma}$  можно так же, как и выше, определить усечение  $\bar{\Gamma}_{tr}$ , которое будет являться идеальным прямоугольным многогранником, граф которого является срединным графом для  $\Gamma$ . Под объемом  $\text{vol}(\bar{\Gamma})$  ректификации  $\bar{\Gamma}$  будем понимать объем  $\text{vol}(\bar{\Gamma}_{tr})$  ее усечения  $\bar{\Gamma}_{tr}$ .

В [24, следствие 7.4] Аткинсон получил следующую верхнюю оценку. Пусть  $P$  — остроугольный гиперболический многогранник, имеющий  $V_3$  трехвалентных вершин и  $V_4$  четырехвалентных вершин. Тогда

$$\text{vol}(P) < \frac{2V_4 + 3V_3 - 2}{4} \cdot v_{oct} + \frac{15V_3 + 20V_4}{16} \cdot v_{tet}. \quad (1)$$

В [13] Белетти установил, что объем произвольного обобщенного гиперболического многогранника можно оценить сверху объемом построенного по его 1-скелету идеального прямоугольного гиперболического многогранника.

**Теорема 2.1** [13, теорема 2.3]. *Для любого 3-связного планарного графа  $\Gamma$  имеет место равенство*

$$\sup_P \text{vol}(P) = \text{vol}(\bar{\Gamma}),$$

где  $P$  пробегает множество всех собственных обобщенных гиперболических многогранников, для которых  $\Gamma$  является 1-скелетом, а  $\bar{\Gamma}$  — ректификация графа  $\Gamma$ .

По определению объем ректификации  $\bar{\Gamma}$  равен объему многогранника  $\bar{\Gamma}_{tr}$ , т. е. такого идеального прямоугольного гиперболического многогранника, что его 1-скелет является срединным графом для  $\Gamma$ . По построению все вершины  $\bar{\Gamma}_{tr}$  четырехвалентны. Напомним, что если  $G$  — плоский граф, то *срединным* для него называется граф  $M(G)$  такой, что вершины  $M(G)$  взаимно однозначно соответствуют ребрам  $G$  и для каждой грани  $G$  если два ребра в ней идут последовательно, то соответствующие вершины из  $M(G)$  соединяются ребром.

Начальный список идеальных прямоугольных многогранников приведен в работе [15], где также вычислены первые 248 значений объемов таких многогранников. Известным бесконечным семейством идеальных прямоугольных многогранников является семейство  $n$ -антипризм для целых  $n \geq 3$ . В частности, 3-антипризма является октаэдром. Формула для объемов идеальных  $n$ -антипризм с циклической симметрией получена Терстоном [12] в связи с вычислением объемов семейства цепных зацеплений. Арифметичность групп, порожденных отражениями в гранях идеальных прямоугольных антипризм (и, следовательно, арифметичность групп соответствующих цепных зацеплений), исследована в работах [25, 26].

Двусторонние оценки для объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников через число их вершин были получены Аткинсоном [14, теорема 2.2]. А именно, если  $P$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V$  вершинами, то

$$\frac{v_{oct}}{4} \cdot V - \frac{v_{oct}}{2} \leq \text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - 2v_{oct}. \quad (2)$$

При этом оба неравенства превращаются в равенства тогда, когда  $P$  является идеальным прямоугольным октаэдром, т. е. при  $V = 6$ .

Идеальный прямоугольный октаэдр является единственным идеальным прямоугольным многогранником с  $V = 6$  и его объем равен  $v_{oct}$ . Следующие идеальные прямоугольные многогранники имеют  $V \geq 8$  вершин, для них верхнюю оценку можно улучшить. А именно, в [16, теорема 2.3] показано, что если  $P$  —

идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V \geq 8$  вершинами, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - \frac{5v_{oct}}{2}. \quad (3)$$

Объемы многогранников с числом вершин  $V \leq 21$  были табулированы в [15]. Затем в [17] было показано, что верхнюю оценку из формулы 2 можно уточнить, если не рассматривать многогранники, имеющие  $V \leq 24$  вершин. А именно, в силу [17, теорема 1.1], если  $P$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V > 24$  вершинами, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - 3v_{oct}. \quad (4)$$

**Теорема 2.2.** Пусть  $\Gamma$  — 3-связный планарный граф с  $E$  ребрами, а  $P$  — обобщенный гиперболический многогранник, для которого  $\Gamma$  является 1-скелетом. Тогда имеют место следующие неравенства:

- (а) если  $P$  является тетраэдром, то  $\text{vol}(P) \leq v_{oct}$ ;
- (б) если  $P$  отличен от тетраэдра, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - \frac{5v_{oct}}{2};$$

- (с) если число ребер  $E > 24$ , то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - 3v_{oct}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 2.1 и формул (2)–(4).  $\square$

Хорошо известно (см., например, [27]), что для каждого идеального прямоугольного многогранника его скелет является срединным графом для двух многогранников, комбинаторно двойственных друг другу.

### 3. Многогранники с трехвалентными вершинами и треугольными гранями

Заметим, что в случаях, когда многогранник  $P$  имеет некоторые специальные комбинаторные свойства, верхнюю оценку его объема можно улучшить. В этом разделе улучшим оценки, используя информацию о числе трехвалентных вершин и треугольных граней.

Прежде всего рассмотрим *регулярную* идеальную  $n$ -угольную бипирамиду  $B_n^r$ ,  $n \geq 3$  (см. [20]). Регулярность означает, что  $B_n^r$  получена склеиванием вместе  $n$  копий идеального тетраэдра  $T_n$  вокруг общего ребра, где  $T_n$  задается двугранными углами  $\frac{2\pi}{n}$ ,  $\frac{(n-2)\pi}{2n}$  и  $\frac{(n-2)\pi}{2n}$  при ребрах, инцидентных одной из вершин, и требованием, что двугранные углы при противоположащих ребрах тетраэдра равны. Следуя обозначениям для идеальных гиперболических тетраэдров из [6], можем записать, что  $T_n = T(\frac{2\pi}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})$ . Как показано в [20, теорема 2.1], максимальный объем идеальной  $n$ -угольной бипирамиды достигается тогда, когда она регулярна. Формула для объема тетраэдра  $T_n$  приведена в [20] в следующем виде:

$$\text{vol}(T_n) = \int_0^{2\pi/n} -2 \ln(\sin \theta) d\theta + 2 \int_0^{\pi(n-1)/2n} -2 \ln(\sin \theta) d\theta.$$

Согласно [6] этот объем может быть записан в терминах функции Лобачевского в следующем виде:

$$\text{vol}(T_n) = \Lambda\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где использованы тождества  $\Lambda(2x) = 2\Lambda(x) + 2\Lambda(x + \frac{\pi}{2})$  и  $\Lambda(-\theta) = -\Lambda(\theta)$ . Таким образом,

$$\text{vol}(B_n^r) = 2n\Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ниже мы воспользуемся этим равенством для оценки объема идеального прямоугольного многогранника.

**Лемма 3.1.** Пусть  $P$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник. Обозначим через  $p_n$ ,  $n \geq 3$ , число его  $n$ -угольных граней. Тогда

$$\text{vol}(P) \leq \sum_{n \geq 3} \Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right) p_n n - 4v_{tet}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\partial P$  поверхность многогранника  $P$ , которая естественным образом разбивается на многоугольники, соответствующие граням  $P$ . Выберем вершину  $v \in \partial P \subset P$  и соединим ее с остальными вершинами геодезическими линиями. Получим разбиение  $P$  на пирамиды с вершиной  $v$  над многоугольниками, разбивающими  $\partial P$ . Для каждой полученной  $n$ -угольной пирамиды рассмотрим ее дубль, который является идеальной бипирамидой. Поскольку максимальный объем идеальной  $n$ -угольной бипирамиды достигается тогда, когда она регулярна [20, теорема 2.1], объем каждой из рассматриваемых пирамид ограничен сверху величиной  $\frac{1}{2} \text{vol}(B_n^r)$ , где, как и выше, через  $B_n^r$  обозначена регулярная  $n$ -угольная бипирамида. Учитывая, что  $\text{vol}(B_n^r) = 2n\Lambda(\frac{\pi}{n})$ , получим

$$\text{vol}(P) \leq \sum_{n \geq 3} \Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right) p_n n.$$

При указанном построении четыре пирамиды, основаниями которых являются грани, инцидентные  $v$ , вырождаются. Их вклад в оценку объемов был не менее чем сумма объемов четырех регулярных идеальных тетраэдров:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \text{vol}(B_3^r) = 4 \cdot 3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot v_{tet}.$$

Таким образом, неравенство (5) установлено.  $\square$

Как показано в [20, теорема 2.2], имеет место оценка  $\text{vol}(B_n^r) \leq 2\pi \ln(n/2)$  для  $n \geq 3$ , причем  $\text{vol}(B_n^r)$  при  $n \rightarrow \infty$  растет асимптотически как  $2\pi \ln(n/2)$ . Используя эту оценку для объема регулярной бипирамиды, наряду с неравенством (5) получаем следующий результат.

**Следствие 3.2.** Пусть  $P$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник. Обозначим через  $p_n$ ,  $n \geq 3$ , число его  $n$ -угольных граней. Тогда

$$\text{vol}(P) \leq \pi \sum_{n \geq 3} \ln\left(\frac{n}{2}\right) p_n - 4v_{tet}. \quad (6)$$

Пусть  $P$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник, а  $p_n$ ,  $n \geq 3$ , обозначает число его  $n$ -угольных граней. Из формулы Эйлера для

многогранников и из четырехвалентности вершин многогранника  $P$  следует (см. например [16]), что

$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k.$$

Таким образом,  $P$  имеет по крайней мере восемь треугольных граней. Приведем оценку объема многогранника, учитывающую число его треугольных граней.

**Лемма 3.3.** Пусть  $P$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V$  вершинами. Обозначим через  $p_n$ ,  $n \geq 3$ , число  $n$ -угольных граней в  $P$ . Тогда

(а) имеет место неравенство

$$\text{vol}(P) \leq 2v_{tet} \left( V - \frac{p_3 + 8}{4} \right),$$

(b) если  $V > 24$ , то

$$\text{vol}(P) \leq 2v_{tet} \left( V - \frac{p_3 + 13}{4} \right).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** (а) Пусть число граней многогранника  $P$  равно  $F$ . Грани многогранника обозначим через  $f_1, \dots, f_F$ . Как и в доказательстве леммы 3.1, рассмотрим разбиение многогранника  $P$  на такие идеальные пирамиды  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, F$ , что основанием  $\tau_i$  является грань  $f_i$  и все пирамиды имеют общую вершину  $v$ . Для каждой идеальной пирамиды  $\tau_i$  рассмотрим ее удвоение — идеальную бипирамиду  $\beta_i$ . Имеем

$$\text{vol}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^F \text{vol}(\beta_i).$$

Пусть для определенности  $\tau_i$  является  $n$ -угольной пирамидой для некоторого  $n \geq 3$ . Тогда  $\beta_i$  является идеальной  $n$ -угольной бипирамидой. Разобьем  $\beta_i$  на идеальные тетраэдры. Если  $n = 3$ , то пирамида  $\tau_i$  является тетраэдром и  $\beta_i$  является объединением двух идеальных тетраэдров вдоль общей грани. Следовательно,  $\text{vol}(\beta_i) \leq 2v_{tet}$ . Если  $n \geq 4$ , то  $\beta_i$  разбивается на  $n$  идеальных тетраэдров, которые имеют общее ребро, содержащее вершину  $v$  и ее дубль  $v'$  (см. пример для  $n = 4$ , приведенный на рис. 1). Таким образом, объем  $n$ -угольной бипирамиды не превосходит  $2v_{tet}$ , если  $n = 3$ , и не превосходит  $nv_{tet}$ , если  $n \geq 4$ .

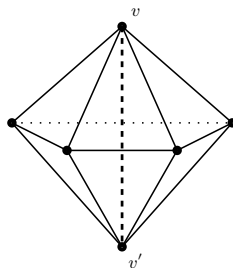


Рис. 1. Разбиение идеальной 4-бипирамиды на 4 идеальных тетраэдра.

Обозначим через  $E$  число ребер многогранника  $P$ . Поскольку все двугранные углы многогранника  $P$  равны  $\pi/2$ , каждое ребро  $e \in E$  инцидентно двум бипирамидам. Таким образом, сумма инцидентных ребер по всем бипирамидам будет равна удвоенному числу ребер  $2E$  (каждое ребро, инцидентное основанию пирамиды в разбиении  $P$ , посчитано дважды). Поскольку сумма инцидентных ребер по 3-бипирамидам равна  $3p_3$ , сумма инцидентных ребер, соответствующих  $n$ -бипирамидам, для  $n \geq 4$  равна  $2E - 3p_3$ . Таким образом,

$$2 \operatorname{vol}(P) \leq 2v_{tet} \cdot p_3 + v_{tet} \cdot (2E - 3p_3) = v_{tet} \cdot (4V - p_3), \quad (7)$$

где использовано то, что  $E = 2V$  в силу четырехвалентности всех вершин многогранника  $P$ .

При получении оценки из формулы (7) не принималось во внимание, что вершина  $v$  инцидентна четырем граням, значит соответствующие четыре пирамиды, а следовательно, и четыре бипирамиды, вырождаются в плоские. Вклад четырех бипирамид в построение оценки формулы (7) не менее чем  $4 \cdot (2v_{tet})$  (случай, когда все они 3-бипирамиды). С учетом этого

$$2 \operatorname{vol}(P) \leq v_{tet} \cdot (4V - p_3 - 8),$$

откуда

$$\operatorname{vol}(P) \leq 2v_{tet} \cdot \left( V - \frac{p_3 + 8}{4} \right).$$

(b) Выберем общую вершину пирамид специальным образом. Очевидно, каждая вершина многогранника  $P$  имеет четыре смежные вершины. Следуя [17], будем говорить, что две вершины *квазисмежны*, если они лежат в одной грани, но не смежны. В [17, лемма 2.1] показано, что для любого идеального прямоугольного многогранника с  $V > 24$  вершинами найдется вершина  $v_0$ , которая квазисмежна не менее чем четырем вершинам. С учетом того, что у  $v_0$  есть 4 смежные вершины, получаем, что  $v_0$  смежна с четырьмя гранями, сумма числа сторон которых не меньше, чем 16. Выберем именно такую вершину  $v_0$  в качестве вершины всех пирамид разбиения многогранника  $P$ . В этом случае количество вырожденных тетраэдров будет не менее 13. Повторяя рассуждения из доказательства п. (a), получаем требуемую оценку.  $\square$

Проведем оценки объемов, которые улучшают теорему 2.2 в случае, когда имеется дополнительная информация о числе трехвалентных вершин и треугольных граней.

**Теорема 3.4.** Пусть  $\Gamma$  — 3-связный планарный граф с  $E$  ребрами,  $P$  — обобщенный гиперболический многогранник, для которого  $\Gamma$  является 1-скелетом.

(a) Если  $P$  имеет  $V_3$  трехвалентных вершин и  $p_3$  треугольных граней, то

$$\operatorname{vol}(P) \leq 2v_{tet} \cdot \left( E - \frac{p_3 + V_3 + 8}{4} \right).$$

(b) Если все вершины  $P$  трехвалентны и он имеет  $p_3$  треугольных граней, то

$$\operatorname{vol}(P) \leq \frac{5v_{tet}}{3} \left( E - \frac{3p_3 + 24}{10} \right).$$

**Доказательство.** (a) Введем обозначения  $V$ ,  $E$  и  $F$  для числа вершин, ребер и граней графа  $\Gamma$  и аналогично  $\bar{V}$ ,  $\bar{E}$  и  $\bar{F}$  для числа вершин, ребер и



граней 1-скелета многогранника  $\bar{\Gamma}_{tr}$ . Поскольку 1-скелет многогранника  $\bar{\Gamma}_{tr}$  является срединным графом для  $\Gamma$ , имеем  $\bar{V} = E$ ,  $\bar{E} = 2\bar{V} = 2E$  и  $\bar{F} = V + F$ . Если грань в  $\bar{\Gamma}_{tr}$  соответствует вершине графа  $\Gamma$ , то число ее сторон равно валентности вершины. Если грань в  $\bar{\Gamma}_{tr}$  соответствует грани графа  $\Gamma$ , то число ее сторон равно числу сторон в исходной грани. Следовательно,  $\bar{\Gamma}_{tr}$  имеет  $V_3 + p_3$  треугольных граней. Применяя лемму 3.1 к многограннику  $\bar{\Gamma}_{tr}$ , получаем требуемое неравенство.

(b) Если все вершины графа трехвалентны, то  $2E = 3V = 3V_3$ . Подставляя  $V_3 = \frac{2}{3}E$  в оценку из п. (a), получаем

$$\text{vol } P \leq 2v_{tet} \cdot \left( E - \frac{p_3 + V + 8}{4} \right) = \frac{5v_{tet}}{3} \left( E - \frac{3p_3 + 24}{10} \right),$$

что завершает доказательство.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.** Для сравнения оценок, полученных в теореме 2.2 и теореме 3.4, отметим, что имеет место неравенство  $\frac{5}{3}v_{tet} < \frac{1}{2}v_{oct}$ . Таким образом, если все вершины многогранника трехвалентны, то оценки из теоремы 3.4 дают лучшую асимптотику. Более того, неравенство

$$\frac{5v_{tet}}{3} \left( E - \frac{3p_3 + 24}{10} \right) < \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - 3v_{oct}$$

эквивалентно неравенству

$$E + \frac{3v_{tet}}{3v_{oct} - 10v_{tet}} p_3 > \frac{6(3v_{oct} - 4v_{tet})}{3v_{oct} - 10v_{tet}}.$$

Используя приближенные значения  $v_{tet} = 1,014941$  и  $v_{oct} = 3,663863$ , получаем, что при

$$E + 3,615410 \cdot p_3 > 49,385163$$

оценка из теоремы 3.4 более сильная.

#### 4. Пирамиды, призмы и двухвершинные пирамиды

Приведем некоторые примеры вычисления верхних оценок на основе полученных выше формул и сравним их с известными значениями объемов.

**4.1. Пирамиды.** Заметим, что срединным графом для 1-скелета  $n$ -угольной пирамиды  $P_n$  является 1-скелет  $n$ -антипризмы  $A(n)$  (см. рис. 2 для  $n = 4$ ). Напомним, что  $n$ -антипризмой  $A(n)$  называют  $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним  $n$ -угольными основаниями и с боковой поверхностью из двух слоев по  $n$  треугольников, у которого в каждой вершине сходятся по четыре ребра.



Рис. 2. Пирамида  $P_4$  и антипризма  $A_4$ .

Пусть  $n = 3$ . Треугольная пирамида  $P_3$  является тетраэдром, имеет  $E = 6$  ребер,  $p_3 = 4$  треугольных граней,  $V_3 = 4$  трехвалентных вершин. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем

$$\text{vol}(P_3) \leq 2v_{tet} \left( 6 - \frac{4 + 4 + 8}{4} \right) = 4v_{tet}.$$

Напомним, что формула для объема обобщенного гиперболического тетраэдра приведена в [23]. Хорошо известно, что срединным графом для 1-скелета тетраэдра является 1-скелет октаэдра. Объем идеального прямоугольного октаэдра равен  $v_{oct} = 3,663863$ . Таким образом, объем любого обобщенного тетраэдра не превосходит  $v_{oct}$ . Этот факт отмечен в [23]. Поскольку  $v_{oct} < 4v_{tet}$ , то оценка, полученная из теоремы 3.4, верна, хотя и не является точной.

При  $n \geq 4$  пирамида  $P_n$  имеет  $E = 2n$  ребер,  $p_3 = n$  треугольных граней,  $V_3 = n$  трехвалентных вершин. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем

$$\text{vol}(P_n) \leq 2v_{tet} \left( 2n - \frac{2n + 8}{4} \right) = 3v_{tet} \cdot n - 4v_{tet}.$$

Отметим, что  $3v_{tet} = 3,044823$ .

Напомним, что формула объема идеальной прямоугольной гиперболической антипризмы  $A(n)$ ,  $n \geq 3$ , известна. Она была получена Терстоном в [12]:

$$\text{vol}(A(n)) = 2n \left[ \Lambda \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

Таким образом, для  $n \geq 4$  объем обобщенной гиперболической  $n$ -пирамиды  $P_n$  удовлетворяет следующему неравенству:

$$\text{vol}(P_n) \leq 2n \left[ \Lambda \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

Правая сторона неравенства асимптотически эквивалентна  $\frac{1}{2}v_{oct} \cdot n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**4.2. Призмы.** Обозначим через  $\Pi_n$  обобщенную гиперболическую  $n$ -угольную призму для  $n \geq 3$ , т. е. многогранник, имеющий верхнее и нижнее  $n$ -угольные основания и  $n$  четырехугольных граней на боковой поверхности. Вершины многогранника могут быть конечными, идеальными или гиперидеальными, а двугранные углы предполагаются такими, что многогранник реализуется в  $\mathbb{H}^3$ .

Пусть  $n = 3$ . Призма  $\Pi_3$  является треугольной призмой, которая имеет  $E = 9$  ребер,  $p_3 = 2$  треугольных граней и  $V_3 = 6$  трехвалентных вершин. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем, что

$$\text{vol}(\Pi_3) \leq 2v_{tet} \cdot \left( 9 - \frac{2 + 6 - 8}{4} \right) = 18v_{tet}.$$

В то же время ректификацией  $\Pi_3$  является многогранник, составленный из двух октаэдров, откуда  $\text{vol}(\Pi_3) \leq 2v_{oct}$ . Поскольку  $2v_{oct} < 18v_{tet}$ , оценка, полученная из теоремы 3.4, верна, хотя и не является точной.

Пусть  $n = 4$ . Призма  $\Pi_4$  является кубом. Нетрудно видеть, что срединным графом для 1-скелета куба является 1-скелет идеального прямоугольного

Рис. 3. Призма  $\Pi_4$  и многогранник  $Q_{14}$ .

многогранника  $Q_{14}$  с 8 треугольными и 6 четырехугольными гранями, изображенного на рис. 3.

Его объем вычислен в [15] и приближенно равен 12,046092. Этот многогранник является объединением двух экземпляров идеальной антипризмы  $A(4)$  вдоль четырехугольной грани. Заметим также, что этот многогранник имеет максимальный объем среди всех девяти идеальных прямоугольных гиперболических многогранников с 14 гранями.

Проведем единое обсуждение случая  $n \geq 4$ . В [24, следствие 11] приведена следующая оценка объема призмы  $\Pi_n$ :

$$\text{vol}(\Pi_n) < \frac{3}{2}v_{oct} \cdot n - 2v_{oct}. \quad (8)$$

Отметим, что  $\frac{3}{2}v_{oct} = 5,495794$ .

Поскольку все вершины призмы  $\Pi_n$  трехвалентны и ее 1-скелет имеет  $E = 3n$  ребер, из случая (b) теоремы 3.4 получаем

$$\text{vol}(\Pi_n) < 5v_{tet} \cdot n - 4v_{tet}. \quad (9)$$

Отметим, что  $5v_{tet} = 5,074705$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Неравенство

$$5v_{tet} \cdot n - 4v_{tet} < \frac{3}{2}v_{oct} \cdot n - 2v_{oct}$$

имеет место при

$$n > \frac{2v_{oct} - 4v_{tet}}{\frac{3}{2}v_{oct} - 5v_{tet}}.$$

Подставляя вместо указанных констант их приближенные значения, получаем, что оценка из формулы (9) улучшает оценку из формулы (8) при  $n > 7,760616$ , т. е. при  $n \geq 8$ .

Формула объема идеальной прямоугольной гиперболической  $n$ -антипризмы  $A(n)$  установлена в [12]. Используя эту формулу, получаем

$$\text{vol}(\Pi_n) < 2 \text{vol}(A(n)) = 4n \left[ \Lambda \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

При этом  $\text{vol}(A(n))$  асимптотически эквивалентен  $\frac{1}{2}v_{oct} \cdot n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**4.3. Двухвершинные пирамиды.** Рассмотрим многогранник  $W_n$ ,  $n \geq 4$ , который получается из пирамиды  $P_n$  следующим образом. Раздвоим вершину пирамиды  $P_n$ , заменив ее на две новые и соединив их ребром. Затем одну из новых вершин соединим с двумя смежными между собой вершинами основания, а вторую новую вершину соединим с оставшимися  $n - 2$  вершинами основания. В результате основанием  $W_n$  по-прежнему остается  $n$ -угольник, а его боковая

поверхность состоит из двух четырехугольников и  $n-2$  треугольников, как изображено на рис. 4 для  $n = 6$ . Многогранник  $W_n$  будем называть *двухвершинной пирамидой*. Очевидно,  $W_4$  является треугольной призмой  $\Pi_3$ . В этом смысле семейство двухвершинных пирамид  $W_n$  можно рассматривать как обобщение рассмотренных выше семейств пирамид и призм.

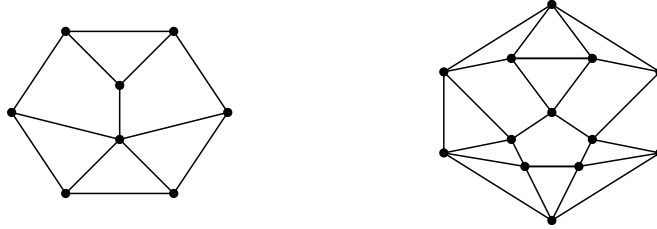


Рис. 4. Двухвершинная пирамида  $W_6$  и скрученная антипризма  $A(6)^*$ .

Срединным графом для 1-скелета двухвершинной пирамиды  $W_n$  является 1-скелет многогранника  $A(n)^*$ , который был введен в работе [15] и назван *скрученной антипризмой* (см. рис. 4 для  $n = 6$ ). Арифметичность скрученных антипризм была исследована в недавнем препринте [28]. В частности, скрученная антипризма  $A(6)^*$  неарифметична. При  $n \geq 5$  двухвершинная пирамида  $W_n$  имеет  $E = 2n + 1$  ребер,  $V_3 = n + 1$  трехвалентных вершин и  $p_3 = n - 2$  треугольных граней. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем следующую оценку:

$$\text{vol}(W_n) \leq 2v_{tet} \left( 2n + 1 - \frac{(n-2) + (n+1) + 8}{4} \right) = 3v_{tet} \cdot n - \frac{3}{2}v_{tet}.$$

Поскольку ректификацией многогранника  $W_n$  является многогранник  $A(n)^*$ , то

$$\text{vol}(W_n) \leq \text{vol}(A(n)^*)$$

Как показано в [15], объем скрученной антипризмы выражается через объем антипризмы следующим образом:

$$\text{vol}(A(n)^*) = \text{vol}(A(n-1)) + A(3),$$

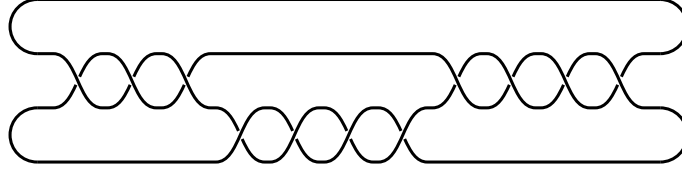
и значит,  $\text{vol}(A(n)^*)$  асимптотически эквивалентен  $\frac{1}{2}v_{oct} \cdot n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### 5. Оценка объема зацепления через число скручиваний

*Объемом гиперболического узла* или зацепления  $K \subset S^3$  будем называть объем гиперболического многообразия  $S^3 \setminus K$ . В этом разделе построим новые верхние оценки объемов узлов и зацеплений через комбинаторные параметры его диаграммы.

Прежде всего напомним ранее известные оценки, иллюстрируя их на примере двухмостового узла  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ , диаграмма которого приведена на рис. 5. Эта диаграмма соответствует разложению в цепную дробь  $\frac{55}{17} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}$  и является *нормальной формой Конвея* двухмостового узла  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$  [29, 30]. Вычисляя объем с помощью компьютерной программы *SnapPy* [31], получаем  $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) = 10,117141$ .

По-видимому, первая известная оценка объема гиперболического узла  $K$  через число перекрестков  $c(K)$  в его диаграмме была получена в диссертации

Рис. 5. Диаграмма двухмостового узла  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ .

Адамса [32]. Там было показано, что если узел  $K$  отличен от узла восьмерка  $4_1$ , то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{tet} \cdot (4c(K) - 16). \quad (10)$$

Напомним, что  $\text{vol}(S^3 \setminus 4_1) = 2v_{tet}$ . Поскольку  $c(\mathbf{b}(\frac{55}{17})) = 11$ , неравенство в формуле (10) дает оценку  $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) \leq 28 \cdot v_{tet} = 28,418348$ .

В [33] Адамс улучшил оценку из формулы (10) следующим образом: если  $c(K) \geq 5$ , то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{oct} \cdot (c(K) - 5) + 4 \cdot v_{tet}. \quad (11)$$

Из неравенства (11) получаем  $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) \leq 26,078932$ .

Следующее семейство оценок объемов узлов и зацеплений связано с числом скручиваний в его диаграмме. *Скручиванием* в диаграмме  $D$  узла или зацепления  $K$  будем называть максимальную по длине цепочку из последовательно идущих двугольных областей (рис. 6).



Рис. 6. Скручивание длины пять в диаграмме.

Эквивалентно, скручивание можно понимать как цепочку из нескольких последовательных полуоборотов на двух нитях, причем все полуобороты направлены в одну сторону: либо положительную, либо отрицательную. Количество полуоборотов в скручивании будем называть *длиной скручивания*. Число скручиваний в диаграмме  $D$  обозначим через  $t(D)$ . Например, для диаграммы, изображенной на рис. 5, число скручиваний  $t = 3$ .

В приложении к статье Лакенби [18] Агол и Терстон показали, что объем любого гиперболического зацепления  $K$  можно оценить через число скручиваний  $t(D)$  в его диаграмме  $D$  следующим образом:

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot (t(D) - 1). \quad (12)$$

Более того, данная оценка является асимптотически точной. Из неравенства (12) получаем  $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) \leq 20 \cdot v_{tet} = 20,29882$ .

В работе [19] Дасбах и Цветкова использовали дополнительную информацию о скручиваниях для улучшения оценки Агола и Терстона. Для диаграммы  $D$  зацепления  $K$  обозначим через  $t_i = t_i(D)$  число скручиваний длины  $i$ ,  $i \geq 1$ . Отметим, что  $t(D) = \sum_{i \geq 1} t_i(D)$ . Обозначим через  $g_i = g_i(D)$  число скручиваний длины не менее  $i$ ,  $i \geq 1$ . Согласно [19, теорема 2.3], если  $D$  — приведенная альтернированная диаграмма гиперболического альтернированного зацепления  $K$ , то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{tet} \cdot (4t_1 + 6t_2 + 8t_3 + 10g_4 - a), \quad (13)$$

где  $a = 10$ , если  $g_4 \neq 0$ ,  $a = 7$ , если  $t_3 \neq 0$ ,  $a = 6$  иначе. Позднее в работе [34] Дасбах и Цветкова доказали, что оценка из формулы (13) верна и для случая, когда диаграмма не является альтернированной.

Адамс [20, теорема 3.1] улучшил результат Дасбаха и Цветковой следующим образом. Пусть  $K$  — гиперболическое зацепление, допускающее альтернированную приведенную  $D$  диаграмму, у которой  $c(D) \geq 5$  и  $t(D) \geq 3$ . Предположим также, что  $K$  отлично от зацепления Борромеевы кольца  $6_3^3$ . Тогда

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < t_1 \cdot v_{oct} + t_2 \cdot 6v_{tet} + t_3 \cdot 16\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right) + t_4 \cdot 20\Lambda\left(\frac{\pi}{10}\right) + g_5 \cdot 10v_{tet} - a, \quad (14)$$

где

$$a = \begin{cases} 7v_{oct} - 10v_{tet}, & \text{если } g_2 = 0, \\ 11v_{tet}, & \text{если } g_3 = 0 \text{ и } t_2 \geq 1, \\ 32\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right) + 5v_{tet} - v_{oct} - 14\Lambda\left(\frac{\pi}{7}\right), & \text{если } g_4 = 0 \text{ и } t_3 \geq 1, \\ 40\Lambda\left(\frac{\pi}{10}\right) + 12\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2v_{tet} - 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) - 18\Lambda\left(\frac{\pi}{9}\right), & \text{если } g_5 = 0 \text{ и } t_4 \geq 1, \\ 4v_{tet} + 12\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) + 60\Lambda\left(\frac{\pi}{10}\right) - 54\Lambda\left(\frac{\pi}{9}\right), & \text{если } g_5 \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Вычислив указанные в формулах (14) и (15) значения функции Лобачевского с точностью до шести знаков, получим неравенство

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < 3,663863 \cdot t_1 + 6,089646 \cdot t_2 + 7,854977 \cdot t_3 + 9,237551 \cdot t_4 + 10,149416 \cdot g_5 - a, \quad (16)$$

где величина  $a$  принимает следующие значения:

$$a = \begin{cases} 15,497263, & \text{если } g_2 = 0, \\ 11,164351, & \text{если } g_3 = 0 \text{ и } t_2 \geq 1, \\ 10,088228, & \text{если } g_4 = 0 \text{ и } t_3 \geq 1, \\ 10,287338, & \text{если } g_5 = 0 \text{ и } t_4 \geq 1, \\ 12,111063, & \text{если } g_5 \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что из формул (14)–(17) следует оценка  $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) < 16,0426$ .

Следующие оценки объема альтернированного узла через коэффициенты его полинома Джонса получили Дасбах и Ли [35]. Пусть  $K$  — простой альтернированный узел, не являющийся торическим. Пусть его полином Джонса имеет вид

$$V_K(t) = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} \dots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m.$$

Тогда

$$v_{oct} \cdot \max\{|a_{m-1}|, |a_{n+1}| - 1\} \leq \text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot (|a_{n+1}| + |a_{m-1}| - 1). \quad (18)$$

Согласно [36] полином Джонса для  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$  имеет вид

$$V(t) = t^3 - t^4 + 3t^5 - 5t^6 + 7t^7 - 8t^8 + 9t^9 - 8t^{10} + 6t^{11} - 4t^{12} + 2t^{13} - t^{14}.$$

Следовательно, имеют место оценки

$$2 \cdot v_{oct} \leq \text{vol}\left(S^3 \setminus \mathbf{b}\left(\frac{55}{17}\right)\right) \leq 20 \cdot v_3.$$

Рассматриваемый в качестве примера узел  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$  принадлежит к классу двухмостовых зацеплений, который достаточно хорошо изучен. Напомним [30],

что для взаимно простых целых чисел  $p$  и  $q$  таких, что  $p \geq 2$  и  $0 < q < p$ , определено двухмостовое зацепление  $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$ . Если  $p$  нечетное, то  $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$  является узлом. Если  $p$  четное, то  $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$  является 2-компонентным зацеплением. Диаграмма зацепления  $\mathbf{b}(p, q)$  строится по разложению рационального числа  $\frac{p}{q}$  в цепную дробь. А именно, если  $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_k]$ , где

$$[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}},$$

то  $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$  имеет диаграмму, как на рис. 7, в зависимости от четности или нечетности  $k$ , где  $a_1, \dots, a_k$  указывают число полуоборотов на двух нитях. Диаграммы двухмостовых узлов и зацеплений, приведенные на рис. 7, называются *диаграммами Конвея*.

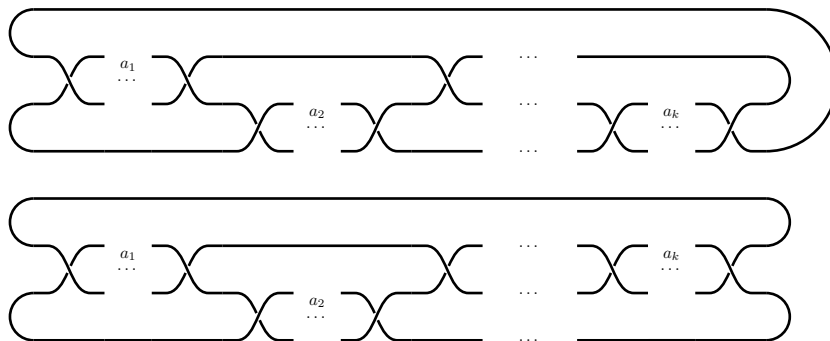


Рис. 7. Диаграммы Конвея для случаев четного и нечетного  $k$ .

Для объемов двухмостовых зацеплений в [37, теорема В.3] были получены следующие верхняя и нижняя оценки. Пусть  $D$  — приведенная альтернированная диаграмма двухмостового зацепления  $K$ , тогда

$$2v_{tet} \cdot t(D) - 2,7066 \leq \text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 2v_{oct} \cdot (t(D) - 1). \tag{19}$$

Эти оценки использовались в [38] для оценки сложности по Матвееву для гиперболических трехмерных многообразий, представляемых как разветвленные накрытия двухмостовых узлов и зацеплений. Доказательство верхней оценки основано на методе из [18], состоящем в переходе к аугментации двухмостового зацепления (см. подробнее в доказательстве теоремы 5.1). Применяя оценки из формулы (18) к  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ , получаем

$$6 \cdot v_{tet} - 2,7066 \leq \text{vol}\left(S^3 \setminus \mathbf{b}\left(\frac{55}{17}\right)\right) \leq 4 \cdot v_{oct}.$$

Вернемся к рассмотрению произвольных гиперболических узлов и зацеплений. В теореме 5.1 получим неравенство, которое улучшает оценки из формул (12) и (14), если число скручиваний в диаграмме зацепления достаточно велико.

**Теорема 5.1.** Пусть  $D$  — диаграмма гиперболического зацепления  $K$ , имеющая  $t(D)$  скручиваний, и каждое скручивание имеет длину не менее двух. Если  $t(D) > 8$ , то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10 \cdot v_{tet} \cdot (t(D) - 1, 4). \tag{20}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим по  $K$  такое зацепление  $L$ , что  $\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L)$ , и оценим объем многообразия  $S^3 \setminus L$ , разбив его на идеальные прямоугольные многогранники.

ШАГ 1. Пусть  $D$  — диаграмма зацепления  $K$ , имеющая  $t = t(D)$  скручиваний. Обозначим длины скручиваний через  $n_1, n_2, \dots, n_t$ . Аналогично [18] и [21, гл. 7] построим по диаграмме  $D$  новое зацепление следующим образом. Если  $|n_i| \geq 2$ , то заменим максимально возможное число полных оборотов  $\lfloor \frac{|n_i|}{2} \rfloor$  в  $i$ -м скручивании,  $i = 1, \dots, t$ , новой компонентой зацепления, которая охватывает это скручивание. Если  $|n_i| = 1$ , то просто добавим новую компоненту, которая охватывает скручивание. Полученное зацепление  $J$  называют *полной аугментацией* зацепления  $K$  (см. [39]). Таким образом,  $J$  имеет на  $t(D)$  компонент больше, чем исходное зацепление  $K$ . Новые компоненты в  $J$  будем далее называть *вертикальными*. Отметим, что исходное зацепление  $K$  может быть получено хирургиями Дена на вертикальных компонентах. Например, диаграмма узла  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ , приведенная на рис. 5, имеет скручивания длины 3, 4 и 4. Соответствующее ему зацепление  $J_4$  имеет четыре компоненты, оно изображено на рис. 8.

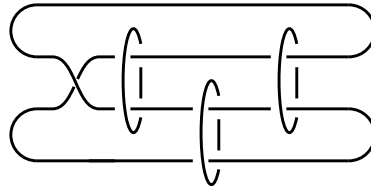


Рис. 8. Четырехкомпонентное зацепление  $J_4$ .

Три из четырех компонент зацепления  $J_4$  вертикальны, и хирургии на этих компонентах дают узел  $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ . Следовательно,  $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) < \text{vol}(S^3 \setminus J_4)$ .

ШАГ 2. Если скручивание в  $D$  имело нечетную длину, то в диаграмме зацепления  $J$  от него останется один полуоборот. Перейдем от зацепления  $J$  к зацеплению  $L$ , не имеющему таких полуоборотов. Для этого применим нужное число раз *преобразование Адамса*, приведенное на рис. 9. Полученное зацепление  $L$  называют *полной аугментацией без полуоборотов* зацепления  $K$  (см., например, [40]).



Рис. 9. Преобразование Адамса.

Как показал Адамс [41, следствие 5.1], применение этого преобразования сохраняет свойство зацепления быть гиперболическим и не изменяет объем, следовательно,  $\text{vol}(S^3 \setminus J) = \text{vol}(S^3 \setminus L)$ . Отметим, что зацепления  $J$  и  $L$  имеют одинаковое число вертикальных компонент и  $L$  не имеет полуоборотов в диаграмме. Например, зацепление  $L_5$ , полученное преобразованием Адамса из зацепления  $J_4$ , приведено на рис. 10, оно имеет 5 компонент, три из которых вертикальные.



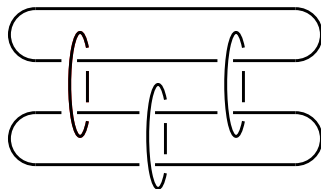


Рис. 10. Пятикомпонентное зацепление  $L_5$ .

ШАГ 3. Следуя методу из [18], представим  $S^3 \setminus L$  как объединение двух экземпляров идеального прямоугольного гиперболического многогранника. Сначала заменим каждую вертикальную компоненту зацепления  $L$  парой треугольников с общей вершиной, как указано на рис. 11 для зацепления  $L_5$ . При этом назовем красными ребра, соответствующие треугольникам, а черными — ребра, соединяющие треугольники.

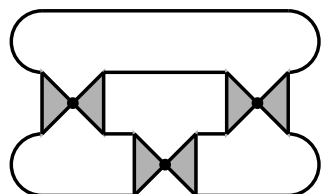


Рис. 11. Замена вертикальных компонент зацепления  $L_5$  парами треугольников.

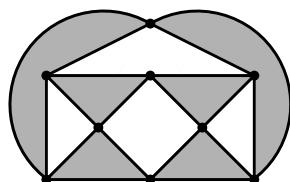


Рис. 12. Многогранник  $P_5$  для  $L_5$ .

Стянем каждое черное ребро в точку и обозначим полученный многогранник через  $P$ . Поскольку каждое черное ребро инцидентно двум 3-валентным вершинам, после стягивания черных ребер появятся новые 4-валентные вершины, которые будем называть *черными*. В итоге все вершины многогранника  $P$  4-валентны, из них  $t(D)$  являются красными и  $2t(D)$  — черными. Таким образом,  $P$  имеет  $V = 3t(D)$  вершин и не менее чем  $2t(D)$  треугольных граней, которые при двухцветной шахматной раскраске граней многогранника окажутся покрашенными в один цвет. Как отмечено в [18], многогранник  $P$  является идеальным прямоугольным и  $\text{vol}(S^3 \setminus L) = 2 \text{vol}(P)$ . Многогранник  $P_5$ , соответствующий диаграмме зацепления  $L_5$ , приведен на рис. 12.

Как и в доказательстве леммы 3.1, рассмотрим объединение  $DP$  бипирамид, полученных удвоением пирамид с общей вершиной  $v$ , разбивающих  $P$ . Объем  $DP$  в два раза больше объема  $P$  и поэтому совпадает с  $\text{vol}(S^3 \setminus L)$ . Для  $n \geq 4$  каждая  $n$ -угольная бипирамида является объединением  $n$  идеальных тетраэдров. Каждую 3-угольную бипирамиду, соответствующую одной из  $2t(D)$  треугольных граней одного цвета, разобьем на два тетраэдра. Остальные 3-угольные бипирамиды будем считать разбитыми на 3 тетраэдра. Так как число вершин  $V = 3t(D) > 24$ , то (см. доказательство п. (b) леммы 3.3) точку  $v$  можно выбрать так, что сумма размеров четырех граней, смежных с  $v$ , будет не

меньше чем 16. Получим оценку

$$\text{vol}(DP) \leq 4v_{tet} \cdot \left( V - \frac{2t(D) + k}{4} \right),$$

где  $k$  — число тетраэдров, соответствующих вырожденным бипирамидам. Оценим величину  $k$ . Вершина  $v$  смежна двум треугольникам, которые раскрашены в один цвет в двухцветной шахматной раскраске граней многогранника  $P$ . Двум бипирамидам, которые имеют в качестве оснований эти треугольники, соответствуют 4 вырожденных тетраэдра. Две другие грани, смежные с  $v$ , могут быть любого размера, но их общее количество сторон не меньше 10. Значит, две бипирамиды, которые имеют в качестве оснований данные две грани, соответствуют не менее чем 10 вырожденным тетраэдрам. Отсюда получаем, что  $k \geq 4 + 10 = 14$ , следовательно,

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L) = \text{vol}(DP) \leq 4v_{tet} \cdot \left( 3t(D) - \frac{2t(D) + 14}{4} \right),$$

что завершает доказательство теоремы.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В [19] получена оценка, учитывающая число  $\Delta$  треугольников в многограннике  $P$ , построенном по зацеплению  $K$ :

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{tet} \cdot (4t_1 + 6t_2 + 8t_3 + 10g_4 - a - \Delta).$$

Уточним аналогичным образом формулу (19). Пусть многогранник  $P$ , построенный по зацеплению  $K$ , имеет  $\Delta + 2t(D)$  треугольников, тогда

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot \left( t(D) - 1, 3 - \frac{\Delta}{10} \right). \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Пусть зацепление  $K$  имеет диаграмму  $D$  с  $t(D) > 8$  скручиваниями. Тогда оценка из формулы (21) улучшает оценку из формулы (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пусть зацепление  $K$  имеет такую альтернированную приведенную диаграмму  $D$ , что  $t(D) > 8$  и все скручивания имеют длину не менее 5, т. е.  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$ . Тогда оценка из формулы (21) улучшает оценку из формулы (14). В самом деле, сравнивая эти оценки, получаем

$$10v_{tet}(t(D) - 1, 4) < 10v_{tet}t(D) - 12,111063,$$

поскольку  $14v_{tet} = 14,209174$ .

Отметим, что кроме верхних оценок объемов гиперболических зацеплений через число скручиваний существует несколько нижних оценок. В качестве примера приведем оценку, установленную в [42]. Пусть зацепление  $K$  имеет такую простую альтернированную приведенную диаграмму  $D$ , что  $t(D) \geq 2$  и все скручивания имеют длину не менее 7, т. е.  $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = 0$ . Тогда

$$0,70735 \cdot (t(D) - 1) < \text{vol}(S^3 \setminus K). \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Оценку из теоремы 5.1 можно уточнить, если имеется информация о том, каких грани, кроме  $2t(D)$  треугольных, имеются в многограннике  $P$ , построенном по диаграмме  $D$ . Напомним, что при двухцветной шахматной раскраске  $2t(D)$  треугольников имеют один цвет, назовем его *темным*, а остальные многоугольники — другой цвет, назовем его *светлым*. Обозначим через  $f_n$ ,  $n \geq 3$ , число светлых  $n$ -угольников в  $P$ . Например, для многогранника  $P$ , приведенного на рис. 12,  $f_3 = 3$ ,  $f_4 = 2$ ,  $f_n = 0$ ,  $n \geq 5$ .

**Следствие 5.2.** Пусть  $D$  — диаграмма гиперболического зацепления  $K$ . Пусть  $f_n$  — число светлых  $n$ -угольников в идеальном прямоугольном многограннике  $P$ , построенном по полной аугментации без полуоборотов для зацепления  $K$ . Тогда

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq (4t(D) - 8)v_{tet} + 2 \sum_{n \geq 3} n f_n \Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 3.1, воспользуемся тем, что объем  $n$ -угольной бипирамиды не превосходит  $2n\Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right)$ .  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. V. 35, N 2. P. 588–621.
2. Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Геометрия–2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 29. С. 5–146.
3. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 3. С. 456–478.
4. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 2. С. 256–260.
5. Roeder R. K. W., Hubbard J. H., Dunbar W. D. Andreev’s theorem on hyperbolic polyhedra // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 2007. V. 57, N 3. P. 825–882.
6. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bul. Am. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9–24.
7. Винберг Э. Б. Объемы неевклидовых многогранников // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 2. С. 17–46.
8. Kellerhals R. On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
9. Kashaev R. M. The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm // Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 269–275.
10. Cho Y., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 22. P. 347–366.
11. Murakami J., Yano M. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Commun. Anal. Geom. 2005. V. 13, N 2. P. 379–400.
12. Thurston W. P. The geometry and topology of three-manifolds. Collected works of William Thurston P. with commentary. V. IV. With a preface by Kerckhoff S. P. Ed. by Farb B., Gabai D. and Kerckhoff S. P. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2022.
13. Belletti G. The maximum volume of hyperbolic polyhedra // Trans. Am. Math. Soc. 2021. V. 374. P. 1125–1153.
14. Atkinson C. Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra // Algebraic & geometric topology. 2009. V. 9. P. 1225–1254.
15. Egorov A., Vesnin A. Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space // Chebyshevskii Sb. 2020. V. 21, N 2. P. 65–83.
16. Egorov A., Vesnin A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 2020. V. 52. P. 565–576.
17. Александров С. А., Богачев Н. В., Веснин А. Ю., Егоров А. А. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 2. С. 3–22.
18. Lackenby M. The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston // Proc. London Math. Soc. 2004. V. 88. P. 204–224.
19. Dasbach O., Tsvietkova A. A refined upper bound for the hyperbolic volume of alternating links and the colored Jones polynomial // Math. Res. Lett. 2015. V. 22. P. 1047–1060.
20. Adams C. Bipyramids and bounds on volumes of hyperbolic links // Topology Appl. 2017. V. 222. P. 100–114.
21. Purcell J. S. Hyperbolic knot theory. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2020. (Graduate Stud. Math.; V. 209).
22. Bao X., Bonahon F. Hyperideal polyhedra in hyperbolic 3-space // Bull. Soc. Math. France. 2002. V. 130, N 3. P. 457–491.
23. Ushijima A. A volume formula for generalized hyperbolic polyhedra // Math. Appl. 2006. V. 581. P. 249–265.

24. Atkinson C. Two-sided combinatorial volume bounds for non-obtuse hyperbolic polyhedra // *Geometriae Dedicata*. 2011. V. 153. P. 177–211.
25. Kellerhals R. A polyhedral approach to the arithmetic and geometry of hyperbolic chain link complements // *J. Knot Theory Ramif.* 2023. V. 32, N 7. 2350052.
26. Meyer J.S., Millichap C., Trapp R. Arithmeticity and hidden symmetries of fully augmented pretzel link complements // *New York J. Math.* 2020. V. 26. P. 149–183.
27. Brinkmann G., Greenberg S., Greenhill C., McKay B. D., Thomas R., Wollan P. Generation of simple quadrangulations of the sphere // *Discrete Math.* 2005. V. 305. P. 33–54.
28. Bogachev N., Guschin D., Vesnin A. Arithmeticity of ideal hyperbolic right-angled polyhedra and hyperbolic link complements. <https://arxiv.org/abs/2307.07000>.
29. Rolfsen D. *Knots and links*. Houston, TX, 1976. (Math. Lecture Ser.; V. 7).
30. Kawachi A. *A survey of knot theory*. Basel: Birkhäuser, 1996.
31. SnapPy, a computer program available at <https://snappy.math.uic.edu>.
32. Adams C. *Hyperbolic structures on link complements*. Ph.D. thesis. University of Wisconsin, 1983.
33. Adams C. Triple crossing number of knots and links // *J. Knot Theory Ramif.* 2013. V. 22, N 2. 1350006.
34. Dasbach O., Tsvietkova A. Simplicial volume of links from link diagrams // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2019. V. 166, N 1. P. 75–81.
35. Dasbach O. T., Lin X.-S. A volumish theorem for the Jones polynomial of alternating knots // *Pacific J. Math.* 2007. V. 231, N 2. P. 279–291.
36. Livingston C., Moore A. H. *KnotInfo: table of knot invariants*. Available at <http://knotinfo.math.indiana.edu>.
37. Guéritaud F., Futer D. On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements // *Geom. Topol.* 2006. V. 10. P. 1239–1284.
38. Petronio C., Vesnin A. Two-sided bounds for the complexity of cyclic branched coverings of two-bridge links // *Osaka J. Math.* 2009. V. 46. P. 1077–1095.
39. Purcell J. S. An introduction to fully augmented links // *Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory. Contemp. Math.* 2011. V. 541. P. 205–220.
40. Kwon A. Fully augmented links in the thickened torus. Preprint version available at <https://arxiv.org/abs/2007.12773>.
41. Adams C. Thrice-punctured spheres in hyperbolic 3-manifolds // *Trans. Am. Math. Soc.* 1985. V. 287. P. 645–656.
42. Futer D., Kalfagianni E., Purcell J. S. Dehn filling, volume, and the Jones polynomial // *Trans. Am. Math. Soc.* 2008. V. 78, N 3. P. 429–464.

*Поступила в редакцию 18 июля 2023 г.*

*После доработки 26 февраля 2024 г.*

*Принята к публикации 8 апреля 2024 г.*

Веснин Андрей Юрьевич (ORCID 0000-00001-7553-1269),  
Егоров Андрей Александрович (ORCID 0009-0007-8795-8148),  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
[vesnin@math.nsc.ru](mailto:vesnin@math.nsc.ru), [a.egorov2@g.nsu.ru](mailto:a.egorov2@g.nsu.ru)