Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2024. Том 65, № 3

УДК 517.983:517.986

СЛЕД И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КОММУТАТОРЫ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$, I — единица $\mathscr{M}$, $S(\mathscr{M},\tau)$ — *-алгебра τ-измеримых операторов, $L_1(\mathscr{M},\tau)$ — банахово пространство τ-интегрируемых операторов. Получено новое доказательство следующего обобщения теоремы Путнама (1951): положительный самокоммутатор $[A^*,A]$ ($A \in S(\mathscr{M},\tau)$) не может иметь обратного в $\mathscr{M}$. Если след τ бесконечен, то положительный самокоммутатор $[A^*,A]$ ($A \in S(\mathscr{M},\tau)$) не может иметь вид $\lambda I + K$, где λ — ненулевое комплексное число и оператор K τ-компактен. Пусть $A,B \in S(\mathscr{M},\tau)$ и $[A,B] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$. Вопрос: при каких условиях $\tau([A,B]) = 0$? Если $X \in S(\mathscr{M},\tau)$, $Y = Y^3 \in \mathscr{M}$ и $[X,Y] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $\tau([X,Y]) = 0$. Если $A^2 = A \in S(\mathscr{M},\tau)$ и $[A^*,A] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $\tau([A^*,A]) = 0$. Если частичная изометрия U принадлежит $\mathscr{M}$ и $U^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, то оператор U^{n-1} является коммутатором, и если $U^{n-1} \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $\tau(U^{n-1}) = 0$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.303

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, коммутатор, самокоммутатор, идемпотент.

Посвящается Анатолию Николаевичу Шерстневу
(27.01.1938–25.05.2023)

1. Введение

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, I — тождественный оператор в $\mathscr{H}$, $\mathfrak{S}_p$ ($0 < p < +\infty$) — идеал Шаттена — фон Неймана в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Оператор $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *коммутатором*, если $X = [A,B] = AB - BA$ для некоторых $A,B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Если $\dim \mathscr{H} < +\infty$, то для $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ следующие условия эквивалентны:

(i) X имеет нулевую диагональ в некотором базисе в $\mathscr{H}$;

(ii) $\operatorname{tr}(X) = 0$;

(iii) X — коммутатор.

Доказательство эквивалентности (i)$\Leftrightarrow$(ii) см. в [1, гл. I, задача 209], эквивалентности (ii)$\Leftrightarrow$(iii) — в [2] или [3, задача 182]. Дальнейшие исследования в направлении эквивалентности (ii)$\Leftrightarrow$(iii) см. в [4, 5]. Интересные приложения матриц с нулевым следом см. в [6, 7]. В [8] показано, что в эквивалентности (ii)$\Leftrightarrow$(iii) в матрицы A и B в представлении $X = [A,B]$ можно выбрать нильпотентными.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-994).

Если пространство $\mathscr{H}$ сепарабельно и $\dim \mathscr{H} = +\infty$, то оператор $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является коммутатором тогда и только тогда, когда X не представляется в виде суммы $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ компактен [9, теорема 3; 3, следствие из задачи 182] (похожая картина и в несепарабельном случае, только вместо компактных операторов используется максимальный по включению идеал $\mathbb{J}$ в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, см. [9] и [10]). Поэтому каждый компактный оператор $K \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеет вид $K = [A, B]$ с некоторыми $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Выбрав подходящий оператор K из класса $\mathfrak{S}_1$ операторов со следом, получаем $[A, B] \in \mathfrak{S}_1$ с $\operatorname{tr}([A, B]) \neq 0$. Любопытно, что для $X \in \mathfrak{S}_1$ по-прежнему имеем (i)$\Leftrightarrow$(ii), см. [11, следствие 1]. В [12] показано, что эрмитов компактный оператор $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является самокоммутатором $[A^*, A]$ компактного оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ в том и только в том случае, если выполнено (i). В [13, теорема 2] для эрмитова оператора $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ установлено, что (i) $\Leftrightarrow \operatorname{tr}(X_+) = \operatorname{tr}(X_-)$, где $X_+ = (|X| + X)/2$, $X_- = |X| - X_+$. В [14] с применением результатов из [13] для $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ показано, что

$$(i) \ \Leftrightarrow \operatorname{tr}(\operatorname{Re}(e^{i\theta}X)_+) = \operatorname{tr}(\operatorname{Im}(e^{i\theta}X)_-) \text{ для всех } \theta,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$. Пусть $S(\mathscr{M}, \tau)$ — *-алгебра всех τ-измеримых операторов, $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ — банахово пространство всех τ-интегрируемых операторов. Пусть $\tau(I) = +\infty$ и $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Если $B = B^3$ или $B = C + X$, где $C = C^2 \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и X τ-компактен, то коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор K τ-компактен (см. [15, теорема 3] (или [16, теорема 3]) и [17, предложение 4]) соответственно. Коммутаторы τ-измеримых операторов являются значениями внутренних *дифференцирований* алгебры $S(\mathscr{M}, \tau)$ [18–20].

Пусть $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $[A, B] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$. Вопрос: при каких условиях $\tau([A, B]) = 0$? Если $\tau(I) < +\infty$, то $\tau([A, B]) = 0 \Leftrightarrow \|I + z[A, B]\|_1 \ge \tau(I)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. [21, теорема 4.8]). В [22–24] указаны некоторые случаи равенства $\tau([A, B]) = 0$.

Если $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ — неунитарная изометрия и пространство $(I - UU^*)\mathscr{H}$ конечномерно, то канонический след от самокоммутатора $[U^*, U] = I - UU^*$ также не равен нулю. Если $U = X + iY$ — декартово разложение оператора U с $X, Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$, то $[U^*, U] = 2i[X, Y]$, т. е. существуют ограниченные самосопряженные операторы, коммутатор которых лежит в $\mathfrak{S}_1$ и имеет ненулевой канонический след. Но если $X \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$ и оператор $Y \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ компактен с $[X, Y] \in \mathfrak{S}_1$, то $\operatorname{tr}([X, Y]) = 0$ [25, лемма 1.3]. В [26, лемма 8] для нормального оператора $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $X \in \mathfrak{S}_2$ с $[T, X] \in \mathfrak{S}_1$ показано, что $\operatorname{tr}([T, X]) = 0$. В [27] этот результат был обобщен на некоторые не нормальные операторы. В [28, теоремы 4, 5] для $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $X \in \mathfrak{S}_2$ с $[T, X] \in \mathfrak{S}_1$ доказано, что $\operatorname{tr}([T, X]) = 0$ при выполнении одного из условий: а) T^2 нормален или б) T^n нормален для некоторого целого $n > 2$ и $[T^*, T] \in \mathfrak{S}_1$.

Основные результаты статьи получены в контексте полуконечных алгебр фон Неймана $\mathscr{M}$; некоторые из них являются новыми даже в случае алгебры $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, снабженной следом $\tau = \operatorname{tr}$. Если $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, $Y = Y^3 \in \mathscr{M}$ и $[X, Y] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau([X, Y]) = 0$ (теорема 2). Получено обобщение классической теоремы Путнама для ограниченного гипонормального оператора [29] (см. также [3, задача 188]) на случай τ-измеримого неограниченного гипонормального оператора: положительный самокоммутатор $[A^*, A]$ ($A \in S(\mathscr{M}, \tau)$) не может иметь обратного в $\mathscr{M}$ (теорема 6). Если $\tau(I) = +\infty$, то положительный самокоммутатор $[A^*, A]$ ($A \in S(\mathscr{M}, \tau)$) не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор K τ-компактен (теорема 7). Если $A^2 = A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $[A^*, A] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau([A^*, A]) = 0$ (теорема 8). Если частичная изометрия $U \in \mathscr{M}$ и $U^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, то оператор U^{n-1} является коммутатором, и если $U^{n-1} \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau(U^{n-1}) = 0$ (теорема 11). Если $U \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и проекторы $P = U^*U$, $Q = UU^*$ взаимно ортогональны, то $U^2 = 0$. Поэтому U является коммутатором и $\tau(U) = 0$ (следствие 13).

2. Определения и обозначения

Пусть $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathscr{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Оператор $A \in \mathscr{M}$ называется *унитарным*, если $A^*A = AA^* = I$; *изометрией*, если $A^*A = I$; *частичной изометрией*, если $A^*A \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.

Отображение $\varphi : \mathscr{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathscr{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathscr{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathscr{M}^+$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathscr{M}^+$) $\Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *конечным*, если $\varphi(I) < +\infty$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : \ Y \in \mathscr{M}^+, \ Y \leq X, \ \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathscr{M}^+$ (см. [30, гл. V, § 2]).

Оператор в $\mathscr{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathscr{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathscr{M}'$ алгебры $\mathscr{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathscr{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathscr{H}$ область определения $\mathscr{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathscr{H} \subset \mathscr{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathscr{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [31, гл. IX]. Для семейства $\mathscr{L} \subset S(\mathscr{M}, \tau)$ обозначим через $\mathscr{L}^+$ и $\mathscr{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathscr{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X, то $U \in \mathscr{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$. Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$. Напомним, что формула $S_P = 2P - I$ устанавливает биекцию между множествами идемпотентов ($P^2 = P$) и симметрий ($S^2 = I$) из $S(\mathscr{M}, \tau)$. Пусть $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор операторов $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$. *Самокоммутатор* оператора $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ есть оператор $[A^*, A] = A^*A - AA^*$. Операторы $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ *антикоммутируют*, если $AB = -BA$.

Через $\mu(t; X)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X) : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}, \ \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Лемма 1 [32]. *Пусть $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$, $A, B \in \mathscr{M}$ и $U, V \in \mathscr{M}$ унитарны. Тогда*

(i) $\mu(t; X) = \mu(t; |X|) = \mu(t; X^*) = \mu(t; UXV)$ *для всех* $t > 0$;

(ii) *если* $|X| \le |Y|$, *то* $\mu(t; X) \le \mu(t; Y)$ *для всех* $t > 0$;

(iii) $\mu(t; AXB) \le \|A\| \, \|B\| \, \mu(t; X)$ *для всех* $t > 0$;

(iv) $\mu(s + t; X + Y) \le \mu(s; X) + \mu(t; Y)$ *для всех* $s, t > 0$;

(v) $\mu(t; f(|X|)) = f(\mu(t; X))$ *для всех непрерывных функций* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *с* $f(0) = 0$ *и* $t > 0$.

Пусть m — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0 < p < +\infty$), ассоциированное с $(\mathscr{M}, \tau)$, может быть определено как

$$L_p(\mathscr{M}, \tau) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \mu(\cdot; X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F-нормой (нормой для $1 \le p < +\infty$) $\|X\|_p = \|\mu(\cdot; X)\|_p$, $X \in L_p(\mathscr{M}, \tau)$. Продолжение τ до единственного линейного функционала на все пространство $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ обозначаем той же буквой τ.

Если $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, то $S(\mathscr{M}, \tau)$ и $S_0(\mathscr{M}, \tau)$ совпадают с $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и с идеалом $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов в $\mathscr{H}$ соответственно. Имеем

$$\mu(t; X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность s-чисел компактного оператора X; χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$ [33, гл. II]. Тогда пространство $L_p(\mathscr{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена — фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < +\infty$.

Если $\mathscr{M}$ абелева (т. е. коммутативна), то $\mathscr{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f \, d\nu$, где (Ω, Σ, ν) — локализуемое пространство с мерой, *-алгебра $S(\mathscr{M}, \tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, ν), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. Функция $\mu(t; f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$; свойства перестановок см. в [34]. Алгебра $\mathscr{M}$ не содержит ненулевых компактных операторов тогда и только тогда, когда мера ν не имеет атомов [35, теорема 8.4].

3. Основные результаты

Лемма 2 [31, гл. IX, теорема 2.13]. *Если $X \in \mathscr{M}$ и $Y \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $XY, YX \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$.*

Лемма 3 [36, теорема 17]. *Если $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $XY, YX \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau(XY) = \tau(YX)$.*

Теорема 1. *Если $X \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и $U \in \mathscr{M}$ является изометрией, то $\tau(X) = \tau(UXU^*)$.*

Доказательство. Шаг 1. Заметим, что $\mu(t; X) = \mu(t; UXU^*)$ для всех $t > 0$. Действительно, имеем $U^*UXU^*U = X$ и

$$\mu(t; X) = \mu(t; U^*UXU^*U) \le \|U^*\| \|U\| \mu(t; UXU^*) = \mu(t; UXU^*) \le \|U\| \|U^*\| \mu(t; X) = \mu(t; X)$$

для всех $t > 0$ в силу п. (iii) леммы 1 и равенства $\|U^*\| = \|U\| = 1$. Для $X \ge 0$ в силу [37, п. (c) предложения 3.9] получаем

$$\tau(X) = \int_0^{+\infty} \mu(t; X) \, dt = \int_0^{+\infty} \mu(t; UXU^*) \, dt = \tau(UXU^*).$$

Шаг 2. Для $X = X^*$ рассмотрим разложение Жордана $X = X_+ - X_-$. Тогда $X_+, X_- \in L_1(\mathscr{M}, \tau)^+$ и в силу линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и шага 1 получаем

$$\tau(X) = \tau(X_+) - \tau(X_-) = \tau(UX_+U^*) - \tau(UX_-U^*) = \tau(UXU^*).$$

Шаг 3. Если $X \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ — произвольный оператор и $X = \operatorname{Re} X + i \operatorname{Im} X$ — его декартово представление, то операторы $\operatorname{Re} X = (X + X^*)/2$, $\operatorname{Im} X = (X - X^*)/(2i)$ лежат в $L_1(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ и в силу линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и шага 1 получаем

$$\tau(X) = \tau(\operatorname{Re} X) + i\tau(\operatorname{Im} X) = \tau(U \cdot \operatorname{Re} X \cdot U^*) + i\tau(U \cdot \operatorname{Im} X \cdot U^*) = \tau(UXU^*). \quad \square$$

Следствие 1. *Если $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$, $U \in \mathscr{M}$ унитарный и $A - UAU^* \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $U^*AU - A \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и $\tau(U^*AU - A) = \tau(A - UAU^*)$.*

Доказательство. Имеем $\tau(U^*AU - A) = \tau(U^*(A - UAU^*)U)$. $\square$

Следствие 2. *Пусть $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, $U \in \mathscr{M}$ унитарный и $U^2 = -I$. Имеем $X - UXU^* \in L_1(\mathscr{M}, \tau) \Leftrightarrow [X, U] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и при этом $\tau(X - UXU^*) = \tau([X, U]) = 0$.*

Доказательство. Заметим, что $U^* = -U$. Если $X - UXU^* \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $[X, U] = (X - UXU^*)U \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$; если $[X, U] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $X - UXU^* = [X, U]U^* \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ в силу леммы 2. При выполнении этих условий из теоремы 1 получаем

$$\begin{aligned}\tau(X - UXU^*) = \tau(X + UXU) = \tau(U(X + UXU)U^*) = -\tau(U(X + UXU)U) \\ = -\tau(UXU + X) = -\tau(X - UXU^*),\end{aligned}$$

поэтому $\tau(X - UXU^*) = 0$. Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}\tau(XU - UX) = \tau(U(XU - UX)U^*) = -\tau(U(XU - UX)U) \\ = -\tau(-UX + XU) = -\tau(XU - UX),\end{aligned}$$

поэтому $\tau(XU - UX) = 0$. $\square$

Следствие 3. *Пусть $U \in \mathscr{M}$ и оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ такие, что $[U^*, A] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$. Тогда для проектора $P = UU^*$ имеем*

$$\tau(U^*AU - A) = \tau(PA - UAU^*) = \tau(PAP - UAU^*).$$

Доказательство. В силу леммы 3 с $X = U^*A - AU^*$ и $Y = U$ получаем

$$\tau(U^*AU - A) = \tau((U^*A - AU^*)U) = \tau(U(U^*A - AU^*)) = \tau(PA - UAU^*),$$

и силу теоремы 1 имеем

$$\tau(U^*AU - A) = \tau(U(U^*AU - A)U^*) = \tau(PAP - UAU^*).$$

Так как операторы $PA - UAU^*$ и $PAP - UAU^*$ лежат в $L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $PAP^{\perp} \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и $\tau(PAP^{\perp}) = 0$.

Теорема 2. *Если* $X \in S(\mathscr{M},\tau)$, $Y = Y^3 \in \mathscr{M}$ *и* $[X,Y] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, *то* $\tau([X,Y]) = 0$.

Доказательство. Шаг 1. Пусть $Y = Y^2 \in \mathscr{M}$. Поскольку

$$2YXY - YX - XY = Y[X,Y] - [X,Y]Y \in L_1(\mathscr{M},\tau),$$

утверждение следует из представления

$$[X,Y] = Y(2YXY - YX - XY) - (2YXY - YX - XY)Y$$

и леммы 3 с парой Y и $B = 2YXY - YX - XY$.

Шаг 2. Пусть $Y = Y^3 \in \mathscr{M}$ и $Y = P - Q$, где идемпотенты P, Q принадлежат $\mathscr{M}$ с $PQ = QP = 0$ (см. [38, предложение 1]). Тогда оператор $Y^2 = P + Q$ является идемпотентом и

$$[X,P] + [X,Q] = [X,Y^2] = [X,Y]Y + Y[X,Y] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$$

По условию $[X,P]-[X,Q] = [X,Y] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$. Из двух последних соотношений имеем $[X,P],[X,Q] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, и в силу шага 1 и линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathscr{M},\tau)$ получаем

$$\tau([X,Y]) = \tau([X,P]) - \tau([X,Q]) = 0 - 0 = 0. \quad \square$$

Следствие 4. *Пусть* $X \in S(\mathscr{M},\tau)$, $S \in \mathscr{M}$ *и* $S^2 = I$. *Имеем* $X - SXS \in L_1(\mathscr{M},\tau) \Leftrightarrow [X,S] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$ *и при этом* $\tau(X - SXS) = \tau([X,S]) = 0$.

Доказательство. Если $X - SXS \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $[X,S] = (X - SXS)S \in L_1(\mathscr{M},\tau)$; если $[X,S] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $X - SXS = [X,S]S \in L_1(\mathscr{M},\tau)$ в силу леммы 2. При выполнении этих условий из соотношения

$$(XS - SX)S - S(XS - SX) = 2(X - SXS)$$

и леммы 3 с парой $[X,S]$ и S получаем $\tau(X - SXS) = 0$. Равенство $\tau([X,S]) = 0$ вытекает из теоремы 2, поскольку $S^3 = S$. $\square$

Следствие 5. *Если* $A, B \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$, $C = C^3 \in \mathscr{M}^{\mathrm{sa}}$ *и* $A - BC \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, *то* $[B,C] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, $\tau([B,C]) = 0$ *и* $\tau(A - BC) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Имеем $[B,C] = (A - BC)^* - (A - BC) \in L_1(\mathscr{M},\tau)$ и $\tau([B,C]) = 0$ в силу теоремы 2. Далее (черта сверху означает комплексное сопряжение),

$$\begin{aligned}\tau(A - BC) &= \tau(A - BC + CB - CB) = \tau(A - CB) - \tau([B,C]) \\ &= \tau(A - CB) = \overline{\tau(A - BC)},\end{aligned}$$

поэтому $\tau(A - BC) \in \mathbb{R}$. $\square$

Теорема 3. *Если* $A, B, C \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ *и* $A - BC \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, *то* $[B,C] \in L_1(\mathscr{M},\tau)$. *Если еще* $A - AC \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, *то* $\tau(A - BC), \tau(A - AC) \in \mathbb{R}$ *и* $\tau([B,C]) = 0$.

Доказательство. Имеем $[B,C] = (A-BC)^* - (A-BC) \in L_1(\mathscr{M},\tau)$. Если еще $A - AC \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $A - BC = A(I - C) + (A - B)C$ и $(A-B)C \in L_1(\mathscr{M},\tau)$. В силу теоремы 3.1 из [39] получаем $\tau(A(I - C)), \tau((A - B)C) \in \mathbb{R}$. Поэтому $\tau(A - BC) \in \mathbb{R}$.

Поскольку $\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$ для всех $X \in L_1(\mathscr{M},\tau)$, имеем

$$\begin{aligned}\tau([B,C]) &= \tau(A - CB - A + BC) = \tau(A - CB) - \tau(A - BC) \\ &= \overline{\tau(A - BC)} - \tau(A - BC) = 0,\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 4. *Пусть* $Y, P \in S(\mathscr{M}, \tau)$, $P^2 = P$ *и* $X = [Y, P]$, $S_P = 2P - I$. *Тогда*

(i) $S_P X = -X S_P$;

(ii) *если* $X^k, S_P X^k S_P \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ *для некоторого нечетного* $k \in \mathbb{N}$, *то* $\tau(X^k) = \tau(S_P X^k S_P) = 0$;

(iii) *если* $P = P^*$, *то* $X^k \in L_1(\mathscr{M}, \tau) \Leftrightarrow S_P X^k S_P \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ *и при этом* $[|X|, P] = 0$.

Доказательство. (ii). Пусть $k = 1$. Из (i) получаем $X = -S_P X S_P$ и в силу леммы 3 с парой $S_P X$ и S_P имеем

$$\tau(S_P X S_P) = \tau(AB) = \tau(BA) = \tau(X),$$

т. е. $\tau(X) = \tau(-X) = -\tau(X) = 0$. Для $k = 2n + 1 \geq 3$ в силу соотношения $X^2 = X S_P \cdot S_P X = -S_P X \cdot -X S_P = S_P X^2 S_P$ получаем

$$X^{2n+1} = \underbrace{X^2 \cdot X^2 \cdot \dots \cdot X^2}_{n} \cdot X = \underbrace{S_P X^2 S_P \cdot S_P X^2 S_P \cdot \dots \cdot S_P X^2 S_P}_{n} \cdot X$$
$$= S_P X^{2n} \cdot S_P X = -S_P X^{2n+1} S_P.$$

В силу леммы 3 с парой $S_P X^{2n}$ и $X S_P$ имеем

$$\tau(S_P X^{2n+1} S_P) = \tau(AB) = \tau(BA) = \tau(X^{2n+1}),$$

т. е. $\tau(X^{2n+1}) = -\tau(X^{2n+1}) = 0$.

(iii). Если $P = P^*$, то $X^k \in L_1(\mathscr{M}, \tau) \Leftrightarrow S_P X^k S_P \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ в силу леммы 2. Переходя к сопряженным, из п. (i) получаем $X^* S_P = -S_P X^*$ и $S_P X^* S_P = -X^*$. Поэтому

$$|X|^2 = X^* X = -S_P X^* S_P \cdot -S_P X S_P = S_P |X|^2 S_P$$

и $|X|^2 S_P = S_P |X|^2$, т. е. $|X|^2 P = P |X|^2$. Следовательно, $|X| P = P |X|$ в силу спектральной теоремы. $\square$

Из теоремы 4.8 в [21] получаем

Следствие 6. *Пусть* $\tau(I) = 1$. *Тогда*

(i) *в условиях теоремы* 3 *имеем* $\|I + z[B, C]\|_1 \geq 1$ *для всех* $z \in \mathbb{C}$;

(ii) *в условиях п.* (ii) *теоремы* 4 *имеем*

$$\|I + z X^{2n-1}\|_1 \geq 1, \quad \|I + z S_P X^{2n-1} S_P\|_1 \geq 1$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ *и* $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 5. *Пусть* $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ *и* $A = A^3 \in \mathscr{M}^{\mathrm{sa}}$. *Если* $AX - YA \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, *то* $\tau(AX - YA) \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $A = P - Q$, где $P, Q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ с $PQ = QP = 0$ (см. [38, предложение 1]). Тогда оператор $A^2 = P + Q$ является проектором. Операторы

$$PXP - PYP = P(AX - YA)P, \quad QXQ - QYQ = -Q(AX - YA)Q$$

лежат в $L_1(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ в силу леммы 2. Операторы

$$QXP + QYP = -Q(AX - YA)P, \quad PXQ + PYQ = (QXP + QYP)^*$$

также лежат в $L_1(\mathscr{M},\tau)$. В силу леммы 3 с парой $I-A^2$, $AX-YA$ и с парой $2A^2$, $AX-A^2YA-AXA^2$ и линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathscr{M},\tau)$ имеем

$$\begin{aligned}\tau(AX-YA)&=\tau(A^2(AX-YA)+(I-A^2)(AX-YA))\\&=\tau(A^2(AX-YA))+\tau((I-A^2)(AX-YA))\\&=\tau(A^2(AX-YA))+\tau((AX-YA)(I-A^2))\\&=\tau(2AX-A^2YA-AXA^2)=\tau(2A^3X-A^2YA-A^3XA^2)\\&=\tau(2A^2(AX-A^2YA-AXA^2))=\tau((AX-A^2YA-AXA^2)2A^2)\\&=\tau(AXA^2-A^2YA)=\tau((P-Q)X(P+Q)-(P+Q)Y(P-Q))\\&=\tau(PXP-PYP)+\tau(-QXQ+QYQ)+\tau(PXQ+PYQ)-\tau(QXP+QYP)\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

поскольку $\tau(PXP-PYP),\tau(QXQ-QYQ)\in\mathbb{R}$ и

$$\tau(PXQ+PYQ)=\tau(P(PXQ+PYQ))=\tau((PXQ+PYQ)P)=\tau(0)=0;$$

аналогично $\tau(QXP+QYP)=0$. □

Следствие 7. *В условиях теоремы* 5 *имеем*

$$[A,X+Y]\in L_1(\mathscr{M},\tau),\quad \tau([A,X+Y])=0.$$

Доказательство. Поскольку $XA-AY=(AX-YA)^*\in L_1(\mathscr{M},\tau)$, то $\tau(XA-AY)=\tau(AX-YA)\in\mathbb{R}$. Заметим, что

$$[A,X+Y]=AX-YA-(XA-AY).\quad \square$$

Следующее утверждение обобщает классическую теорему Путнама для ограниченного гипонормального оператора [29] (см. также [3, задача 188]) на случай τ-измеримого неограниченного гипонормального оператора.

Теорема 6. *Положительный самокоммутатор A^*A-AA^* ($A\in S(\mathscr{M},\tau)$) не может иметь обратного в $\mathscr{M}$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $A\in S(\mathscr{M},\tau)$ оператор A^*A-AA^* имеет обратный в $\mathscr{M}$, т. е.

$$A^*A-AA^*\geq\varepsilon I \tag{1}$$

для некоторого $\varepsilon>0$. Умножив обе части (1) слева на оператор A и справа на оператор A^*, получим

$$A^2A^{*2}\leq(AA^*)^2-\varepsilon AA^*.$$

Поэтому для каждого числа $t>0$ имеем

$$\begin{aligned}\mu(t;A^2)^2=\mu(t;A^{*2})^2=\mu(t;A^2A^{*2})&\leq\mu(t;(AA^*)^2-\varepsilon AA^*)\\&\leq\mu(t;(AA^*)^2)=\mu(t;AA^*)^2=\mu(t;A)^4\end{aligned}\tag{2}$$

в силу пп. (v), (ii) леммы 1.

Умножив обе части (1) слева на оператор A^* и справа на оператор A, получаем

$$A^{*2}A^2\geq(A^*A)^2+\varepsilon A^*A. \tag{3}$$

Введем функцию $f(x) = x^2 + \varepsilon x$, $x \in \mathbb{R}^+$. Тогда для всех $t > 0$

$$\begin{aligned}\mu(t; A^2)^2 &= \mu(t; A^{*2}A^2) \geq \mu(t; (A^*A)^2 + \varepsilon A^*A) = \mu(t; f(A^*A)) \\ &= f(\mu(t; A^*A)) = \mu(t; A^*A)^2 + \varepsilon\mu(t; A^*A) = \mu(t; A)^4 + \varepsilon\mu(t; A)^2 \quad (4)\end{aligned}$$

в силу (3) и пп. (v), (ii) леммы 1. Теперь из (2) и (4) получаем

$$\mu(t; A)^4 \geq \mu(t; A^2)^2 \geq \mu(t; A)^4 + \varepsilon\mu(t; A)^2 \quad \text{для всех } t > 0.$$

Получили противоречие. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что утверждение теоремы 6 другим методом было получено автором в теореме 2 из [15] (см. также [16]).

Теорема 7. *Если $\tau(I) = +\infty$, то положительный самокоммутатор $A^*A - AA^*$ ($A \in S(\mathscr{M}, \tau)$) не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор K τ-компактен.*

Доказательство. Предположим, что $A^*A - AA^* = \lambda I + K \geq 0$ для некоторого $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ с подходящими $\lambda > 0$ и $K \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$. Не ограничивая общности, считаем $\lambda = 1$. Тогда

$$A^*A - K = AA^* + I.$$

Поскольку функция $\mu(t; A)$ не возрастает и $A \notin S_0(\mathscr{M}, \tau)$, существует

$$\lim_{t \to +\infty} \mu(t; A) = a > 0.$$

Заметим, что $\mu(t; AA^* + I) = 1 + \mu(t; AA^*)$ для каждого числа $t > 0$ в силу представления

$$\mu(t; X) = \inf\{s > 0 : \tau(P^{|X|}(s, +\infty)) \leq t\}$$

для каждого оператора $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, где $|X| = \int\limits_0^{+\infty} uP^{|X|}(du)$ — спектральное разложение оператора $|X|$ и указанный инфимум достигается [32, предложение 2.2]. Поэтому для каждого числа $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned}1 + \mu(t; A)^2 &= 1 + \mu(t; AA^*) = \mu(t; AA^* + I) = \mu(t; A^*A - K) \\ &\leq \mu(t/2; A^*A) + \mu(t/2; K) = \mu(t/2; A)^2 + \mu(t/2; K)\end{aligned}$$

в силу пп. (iv), (v) леммы 1. Переходя в полученном неравенстве

$$1 + \mu(t; A)^2 \leq \mu(t/2; A)^2 + \mu(t/2; K), \quad t > 0,$$

к пределу при $t \to +\infty$, получаем $1 + a^2 \leq a^2 + 0 = a^2$; противоречие. $\square$

Из теорем 6, 7 вытекает

Следствие 8. *Если $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ и $B := i[X, Y] \geq 0$, то оператор B не может иметь* (а) *обратного в $\mathscr{M}$ и* (б) *при $\tau(I) = +\infty$ вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $K \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$.*

Доказательство. Легко видеть, что $B = \frac{1}{2}(A^*A - AA^*)$ для оператора $A = X + iY$. $\square$

Самокоммутатор произвольного оператора $Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$ имеет вид $A - UAU^*$, где $A = Y^*Y$ и U — частичная изометрия из полярного разложения $Y = U|Y|$.

Теорема 8. *Если $A \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$ и $U \in \mathscr{M}$ является изометрией, то оператор $X := A - UAU^*$ является самокоммутатором. Для $\tau(I) < +\infty$ каждый самокоммутатор имеет такой вид.*

Доказательство. Если $X = A - UAU^*$, то $A^{1/2}U^* = (UA^{1/2})^*$ и $X = [A^{1/2}U^*, UA^{1/2}]$.

Пусть $\tau(I) < +\infty$ и оператор $X \in S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ является самокоммутатором, т. е. $X = Y^*Y - YY^*$ для некоторого оператора $Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Если $Y = V|Y|$ — полярное разложение Y, то частичная изометрия V может быть «продолжена» до унитарного оператора $U \in \mathscr{M}$ со свойством $Y = U|Y|$ (см. доказательство теоремы 2 в [40]). Тогда $YY^* = U|Y|^2U^* = UY^*YU^*$ и можно выбрать $A := Y^*Y$. $\square$

Из теорем 6–8 получаем

Следствие 9. *Пусть $A \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$ и $U \in \mathscr{M}$ является изометрией и $X := A - UAU^* \geq 0$. Тогда X не может иметь* (а) *обратного в $\mathscr{M}$ и* (б) *при $\tau(I) = +\infty$ вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $K \in S_0(\mathscr{M}, \tau)$.*

Лемма 4. *Если $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$, оператор B нормален и $AB = BA$, то $[A^* - B^*, A - B] = [A^*, A]$.*

Доказательство. В силу теоремы Фуглида — Путнама для τ-измеримых операторов [41, теорема 6] имеем $AB^* = B^*A$. Поэтому

$$BA^* = (AB^*)^* = (B^*A)^* = A^*B.$$

Заметим, что для алгебры $LS(\mathscr{M})$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$ типа I и типа III, теорема Фуглида — Путнама была установлена в [42, теорема 1] и [43, теорема 1]. $\square$

Теорема 9. *Если $A^2 = A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $[A^*, A] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau([A^*, A]) = 0$.*

Доказательство. Для $A = A^2 \in S(\mathscr{M}, \tau)$ существует единственное разложение $A = P + Z$, где $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и нильпотент Z принадлежит $S(\mathscr{M}, \tau)$ с $Z^2 = 0$ и $ZP = 0$, $PZ = Z$ [44, теорема 2.23]. По предположению оператор

$$Z + Z^* + Z^*Z - ZZ^* = [A^*, A] \tag{5}$$

лежит в $L_1(\mathscr{M}, \tau)$. В силу равенств $Z^*P = (PZ)^* = Z^*$ операторы

$$Z^* - ZZ^* = [A^*, A]P, \quad Z + Z^*Z = [A^*, A]P^{\perp} \tag{6}$$

также лежат в $L_1(\mathscr{M}, \tau)$. Поэтому $Z^* + Z^*Z = (Z + Z^*Z)^* \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и в силу первого равенства в (6) получаем $ZZ^* + Z^*Z \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$. Тогда $Z^*Z \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и в силу второго равенства в (6) имеем $Z \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$. В силу леммы 3 с $X = P$ и $Y = Z$ получаем

$$\tau(Z) = \tau(PZ) = \tau(ZP) = \tau(0) = 0.$$

Поэтому $\tau(Z^*) = \overline{\tau(Z)} = 0$. В силу равенства

$$\tau(X) = \int_0^{+\infty} \mu(t; X)\, dt \quad (X \in S(\mathscr{M}, \tau)^+)$$

(см. [37, п. (c) предложения 3.9]) и пп. (i), (v) леммы 1 имеем

$$\tau(A^*A - AA^*) = \tau(Z + Z^* + Z^*Z - ZZ^*) = \tau(Z) + \tau(Z^*) + \tau(Z^*Z) - \tau(ZZ^*)$$

$$= 0 + 0 + \int\limits_0^{+\infty} \mu(t; Z^*Z)\,dt - \int\limits_0^{+\infty} \mu(t; ZZ^*)\,dt$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (\mu(t;Z)^2 - \mu(t;Z^*)^2)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} 0\,dt = 0.$$

Теорема доказана. □

Следствие 10. *Если $X = X^3 \in S(\mathscr{M}, \tau)$, оператор $X^2 - X$ эрмитов и $[X^*, X] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau([X^*, X]) = 0$.*

Доказательство. В силу [38, предложение 1] имеем представление $X = A - B$, где идемпотенты $A = (X^2 + X)/2$ и $B = (X^2 - X)/2$ с $AB = BA = 0$. Поскольку $B = B^*$, в силу леммы 4 получаем $[X^*, X] = [A^*, A]$ и применяем теорему 8. □

Следствие 11. *Если $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ с $X^2 = I$ и $[X^*, X] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau([X^*, X]) = 0$.*

Доказательство. Для оператора $A := (I + X)/2$ имеем $A^2 = A$ и $X^*X - XX^* = 4(A^*A - AA^*)$. Поэтому $\tau([X^*, X]) = 0$. □

Следствие 12. *Пусть $\tau(I) = 1$ и $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$. Если $[A^*, A] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и $A^2 \in \{A, I\}$, то $\|I + z[A^*, A]\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$.*

Предложение 1. *Если $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$, $XY = \lambda YX$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ и $[X, Y] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau([X, Y]) = 0$.*

Доказательство. Если $\lambda = 1$, то утверждение выполнено. Пусть $\lambda \neq 1$. Имеем $(\lambda - 1)YX = [X, Y] \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, поэтому $YX, XY \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$. В силу леммы 3 получаем $\tau(YX) = \tau(XY) = \lambda\tau(YX) = 0$, поэтому $\tau([X, Y]) = 0$. □

Примеры операторов $X, Y \in S(\mathscr{M}, \tau)$ с $XY = \lambda YX$ были даны в п. (i) теоремы 4 (см. также [45]).

Теорема 10. *Пусть $A, B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $A^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, пусть $k, m \in \mathbb{N}$ и $k + m \geq n$. Тогда оператор A^kBA^m является коммутатором и если $A^kBA^m \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau(A^kBA^m) = 0$.*

Доказательство. Имеем $A^kBA^m = A^kB \cdot A^m - A^m \cdot A^kB = [A^kB, A^m]$. Если $A^kBA^m \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то в силу леммы 3 с операторами $X = A^kB$ и $Y = A^m$ получаем

$$\tau(A^kB \cdot A^m) = \tau(A^m \cdot A^kB) = \tau(0) = 0, \quad k + m \geq n.$$

Заметим, что при $2k \geq n$ операторы $[A^k, B]$ и A^k антикоммутируют, а операторы $A^kB + BA^k$ и A^k коммутируют. В частности, при $\tau(I) = 1$ имеем $\|I + zA^kBA^m\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $k, m \in \mathbb{N}$ с $k + m \geq n$. □

Теорема 11. *Если частичная изометрия U принадлежит $\mathscr{M}$ и $U^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, то оператор U^{n-1} является коммутатором, и если $U^{n-1} \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$, то $\tau(U^{n-1}) = 0$.*

Доказательство. Поскольку $U = UU^*U$ [3, следствие 3 из задачи 98], при $n \geq 2$ имеем

$$U^{n-1} = U^{n-2} \cdot UU^*U = U^{n-1} \cdot U^*U - U^*U \cdot U^{n-1} = [U^{n-1}, U^*U];$$

если $n=2$, то $U = U \cdot U^*U - U^*U \cdot U = [U, U^*U]$.

Пусть $U^{n-1} \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$. При $n \geq 2$ в силу леммы 3 с $X = U^*U^{n-1}$, $Y = U$ и равенства $U = UU^*U$ получаем

$$0 = \tau(0) = \tau(U^*U^n) = \tau(U \cdot U^*U \cdot U^{n-2}) = \tau(U^{n-1});$$

если $n = 2$, то аналогичным образом имеем

$$0 = \tau(0) = \tau(U^*U^2) = \tau(UU^*U) = \tau(U).$$

В частности, если $\tau(I) = 1$, то $\|I + zU^{n-1}\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Следствие 13. *Если частичная изометрия $U \in L_1(\mathscr{M}, \tau)$ и проекторы $P = U^*U$, $Q = UU^*$ взаимно ортогональны, то $U^2 = 0$. Поэтому U является коммутатором и $\tau(U) = 0$.*

Доказательство. В силу леммы 3 с $X = U$ и $Y = U^{*2}U$ имеем

$$0 = \tau(0) = \tau(QP) = \tau(UU^{*2}U) = \tau(U^{*2}U^2) = \tau(U^{2*}U^2) = \tau(|U^2|^2).$$

Отсюда в силу точности следа τ получаем $|U^2|^2 = 0$, поэтому $|U^2| = 0$ и $U^2 = 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969.
2. *Albert A. A., Muckenhoupt B.* On matrices of trace zeros // Michigan Math. J. 1957. V. 4, N 1. P. 1–3.
3. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
4. *Johnson W. B., Ozawa N., Schechtman G.* A quantitative version of the commutator theorem for zero trace matrices // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2013. V. 110, N 48. P. 19251–19255.
5. *Angel O., Schechtman G.* The Hilbert–Schmidt version of the commutator theorem for zero trace matrices // Bull. Lond. Math. Soc. 2015. V. 47, N 4. P. 715–719.
6. *Wang D.-G., Zhang J. J., Zhuang G.* Coassociative Lie algebras // Glasgow Math. J. 2013. V. 55, N A. P. 195–215.
7. *Ravichandran M., Srivastava N.* Asymptotically optimal multi-paving // Int. Math. Res. Not. 2021. V. 2021, N 14. P. 10908–10940.
8. *Robinson D. W.* Matrices with zero trace as commutators of nilpotents // Linear multilinear algebra. 1977. V. 5, N 1. P. 45–51.
9. *Brown A., Pearcy C.* Structure of commutators of operators // Ann. Math. (2). 1965. V. 82, N 1. P. 112–127.
10. *Bikchentaev A.* Commutators in C^*-algebras and traces // Ann. Funct. Anal. 2023. V. 14, N 2. Paper No. 42, 14 pp.
11. *Fan P.* On the diagonal of an operator // Trans. Am. Math. Soc. 1984. V. 283, N 1. P. 239–251.
12. *Fan P., Fong C. K.* Which operators are the self-commutators of compact operators? // Proc. Am. Math. Soc. 1980. V. 80, N 1. P. 58–60.
13. *Fan P., Fong C. K., Che K., Herrero D. A.* On zero-diagonal operators and traces // Proc. Am. Math. Soc. 1987. V. 99, N 3. P. 445–451.
14. *Fan P., Fong C. K., Che K.* An intrinsic characterization for zero-diagonal operators // Proc. Am. Math. Soc. 1994. V. 121, N 3. P. 803–805.
15. *Бикчентаев А. М.* К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II // Математика и теоретические компьютерные науки. 2023. Т. 1, № 2. С. 3–11.
16. *Bikchentaev A. M.* Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 10. P. 4507–4511.
17. *Бикчентаев А. М.* Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 272–282.

18. *Weigt M.* Derivations of τ-measurable operators // Operator algebras, operator theory and applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 2010. P. 273–286. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 195).

19. *Бер А. Ф., Кудайбергенов К. К., Сукочев Ф. А.* Дифференцирования на алгебрах Мюррея — фон Неймана // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 5. С. 183–184.

20. *Huang J., Kudaybergenov K. K., Sukochev F. A.* Ring derivations of Murray–von Neumann algebras // Linear Algebra Appl. 2023. V. 672, N 1. P. 28–52.

21. *Бикчентаев А. М.* О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 73–82.

22. *Бикчентаев А. М.* След и коммутаторы измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Квантовая вероятность. Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. М.: ВИНИТИ РАН, 2018. С. 10–20. (Тематические обзоры; Т. 151).

23. *Bikchentaev A. M.* Trace and commutators of measurable operators affiliated to a von Neumann algebra // J. Math. Sci. (New York). 2021. V. 252, N 1. P. 8–19.

24. *Бикчентаев А. М., Фауаз Х.* Разности и коммутаторы идемпотентов в C^*-алгебрах // Изв. вузов. Математика. 2021. № 8. С. 16–26.

25. *Helton J., Howe R.* Traces of commutators of integral operators // Acta Math. 1975. V. 135, N 3–4. P. 271–305.

26. *Weiss G.* The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert–Schmidt class and generating functions for matrix operators. I // Trans. Am. Math. Soc. 1978. V. 246. P. 193–209.

27. *Kittaneh F.* On zero-trace commutators // Bull. Austral. Math. Soc. 1986. V. 34, N 1. P. 119–126.

28. *Kittaneh F.* Some trace class commutators of trace zero // Proc. Am. Math. Soc. 1991. V. 113, N 3. P. 655–661.

29. *Putnam C. R.* On commutators of bounded matrices // Am. J. Math. 1951. V. 73, N 1. P. 127–131.

30. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5. Berlin: Springer-Verl., 2002.

31. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of mathematical sciences, 125. Operator algebras and non-commutative geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.

32. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.

33. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

34. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

35. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Минск: Университетское, 1988.

36. *Brown L. G., Kosaki H.* Jensen's inequality in semifinite von Neumann algebra // J. Operator Theory. 1990. V. 23, N 1. P. 3–19.

37. *Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., Pagter de B.* Noncommutative Köthe duality // Trans. Am. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750.

38. *Bikchentaev A. M., Yakushev R. S.* Representation of tripotents and representations via tripotents // Linear Algebra Appl. 2011. V. 435, N 9. P. 2156–2165.

39. *Бикчентаев А. М.* К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 337–348.

40. *Бикчентаев А. М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.

41. *Ber A., Chilin V., Sukochev F., Zanin D.* Fuglede–Putnam theorem for locally measurable operators // Proc. Am. Math. Soc. 2018. V. 146, N 4. P. 1681–1692.

42. *Ahramovich M. V., Chilin V. I., Muratov M. A.* Fuglede–Putnam theorem in the algebra of locally measurable operators // Indian J. Math. 2013. V. 55, N suppl. P. 13–20.

43. *Ахрамович М. В., Муратов М. А., Чилин В. И.* Теорема Фуглида — Путнама для локально измеримых операторов // Динамические системы (Симферополь). 2014. Т. 4, № 1-2. С. 3–8.

44. *Бикчентаев А. М.* Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 492–503.

45. *Akhmadiev M., Alhasan H., Bikchentaev A., Ivanshin P.* Commutators and hyponormal operators on a Hilbert space // J. Iran Math. Soc. 2023. V. 4, N 1. P. 67–78.

Поступила в редакцию 21 ноября 2023 г.
После доработки 21 ноября 2023 г.
Принята к публикации 25 января 2024 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID 0000-0001-5992-3641)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Airat.Bikchentaev@kpfu.ru`