*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2024. Том 65, № 3*

*УДК 512.57*

# КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ $\mathbf{SP}(L_6)$. II. РЕЗУЛЬТАТ О ДУАЛЬНОСТИ

**А. О. Башеева, М. В. Швидефски**

**Аннотация.** Показано, что категория полных биалгебраических $(0,1)$-решеток, принадлежащих квазимногообразию, порожденному конкретной конечной решеткой, с полными гомоморфизмами решеток, рассматриваемая как конкретная категория, дуально эквивалентна категории специальных пространств с дополнительной структурой.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.302

**Ключевые слова:** дуальность, биалгебраическая решетка, квазимногообразие.

## 1. Введение

Настоящая работа продолжает работу [1]. Рассматривается категория $\mathbb{B}_6$ полных биалгебраических $(0,1)$-решеток, принадлежащих квазимногообразию $\mathbf{SP}(L_6)$, порожденному конечной решеткой $L_6$ (рис. 1) с полными гомоморфизмами $(0,1)$-решеток в качестве морфизмов. (Отметим, что решетка $L_6$ изоморфна решетке подпорядков трехэлементной цепи.) Далее определяется категория $\mathbb{L}_6$ так называемых $L_6$-пространств с $L_6$-морфизмами (см. определение 2 в разд. 3).

В [1] установлено, что квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$ образует (конечно базируемое) многообразие. Более того, был найден конкретный конечный базис тождеств для $\mathbf{SP}(L_6)$. Используя этот конечный базис тождеств, мы доказываем, что категории $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$ дуально эквивалентны (см. теорему 15). Для доказательства теоремы 15 существенно используются методы и идеи работ [2–5].

Отметим, что категория $\mathbb{N}_5$ из [4, 5] является полной подкатегорией в $\mathbb{L}_6$. Рассматривая ограничение дуальности, представленной здесь, на $\mathbb{N}_5$, получаем дуальность из работ [4, 5]. В частности, рассматривая ограничение нашей дуальности на категорию конечных дистрибутивных решеток, получаем известную дуальность Биркгофа.

Все понятия и обозначения, не определенные здесь, соответствуют [1, 4–6].

## 2. Основные понятия и вспомогательные результаты

Следующее определение использует некоторые понятия из [6, 3].

Определение 1. Рассмотрим $J$-решетку $L$, где $J \subseteq \mathrm{J}(L)$. Для элемента $x \in \mathrm{J}$ полагаем

$$\mathfrak{M}(x) = \Big\{A \subseteq J \mid 1 < |A| < \omega,\ x \leq \bigvee A\Big\},$$

Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0012. Первый автор поддержан Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, проект AP13268735.

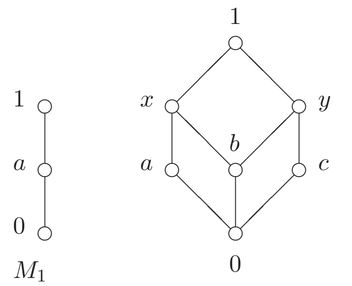


Рис. 1. Ч.у. множество $M_1$ и решетка $L_6 \cong \mathrm{O}(M_1)$.

где $\bigvee A$ — минимальное нетривиальное покрытие $x$. Для множества $S \subseteq J$ полагаем

$$S^{[0]} = S; \quad S^{[n+1]} = \bigcup \{A \in \mathfrak{M}(x) \mid x \in S^{[n]}\},\ n < \omega; \quad \langle S\rangle_{\mathfrak{M}} = \bigcup_{i<\omega} S^{[i]}.$$

Для элемента $x \in J$ будем писать $\langle x\rangle_{\mathfrak{M}}$ вместо $\langle\{x\}\rangle_{\mathfrak{M}}$. Непосредственно видно, что

$$\langle S\rangle_{\mathfrak{M}} = \bigcup_{x\in S} \langle x\rangle_{\mathfrak{M}} \subseteq J,$$

поэтому $\langle\ \rangle_{\mathfrak{M}}$ является алгебраическим оператором замыкания на $J$. Множество $S \subseteq J$ называется $\mathfrak{M}$-*замкнутым*, если $S = \langle S\rangle_{\mathfrak{M}}$.

Ясно, что $\mathfrak{M}(x) = \varnothing$, поэтому $\langle x\rangle_{\mathfrak{M}} = \{x\}$ для каждого элемента $x \in J$, который является простым. Более того, если $L$ является биалгебраической решеткой, то для любого $x \in \mathrm{CJ}(L)$ множество $\langle x\rangle_{\mathfrak{M}} = \{x\}$ состоит из вполне неразложимых элементов.

Полагаем $\Sigma_6 = \big\{(\mathrm{C}), (\mathrm{D}_2), \big(\mathrm{N}_5^1\big)\big\}$, где рассматриваемые тождества (C), $(\mathrm{D}_2)$, и $\big(\mathrm{N}_5^1\big)$ определены в [1]. Согласно [1, теорема 12], $\mathbf{SP}(L_6)$ является многообразием, а $\Sigma_6$ образует его базис тождеств.

**Предложение 1** [1, предложение 10]. *Пусть решетка $L$ коалгебраическая, причем $L \models \Sigma_6$. Тогда для каждого элемента $x \in \mathrm{J}(L)$, который не является простым, имеем*

$$\langle x\rangle_{\mathfrak{M}} = \{x, a, b\} \text{ для некоторых } a, b \in \mathrm{J}_P(L).$$

*Более того, $L \in \mathbf{SP}(L_6)$.*

**Следствие 2** [1, следствие 11]. *Пусть решетка $L$ коалгебраическая, причем $L \models \Sigma_6$. Тогда для каждого элемента $x \in \mathrm{CJ}(L)$, который не является простым, имеем*

$$\langle x\rangle_{\mathfrak{M}} = \{x, a, b\} \text{ для некоторых } a, b \in \mathrm{C}J_P(L).$$

*В частности, $L \in \mathbf{SP}(L_6)$.*

## 3. Категории $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$

Следующее определение является аналогом определения $N_5$-пространства из [5, определение 2.1].

Определение 2. Система $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f\rangle$ называется $L_6$-*пространством*, если (s1) $X \cup Y \neq \varnothing$ и $X \cap Y = \varnothing$;

(s2) $\leq$ является частичным порядком на $X \cup Y$;

(s3) $f\colon Y \to X^2$ — функция и для любого $y \in Y$ такого, что $f(y) = (a, b)$, выполнены следующие условия:

(a) $y \nleq a, b$ и $\{a, b\}$ — антицепь;

(b) если $a, b \leq z$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то $y \leq z$;

(c) если $z \leq y$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то либо $z \leq a$, либо $z \leq b$, либо $z \in Y$ и $\{u, v\} \ll \{a, b\}$, где $f(z) = (u, v)$.

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f\rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f\rangle$ являются $L_6$-пространствами. Тогда $\varphi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ называется $L_6$-*морфизмом*, если выполняются следующие условия:

(m1) $\varphi$ отображает $X \cup Y$ в $X' \cup Y' \cup \{(a, b) \mid a, b \in X'\}$;

(m2) если $u, v \in X \cup Y$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in X' \cup Y'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$;

(m3) $\varphi(x) \in X'$ для всех $x \in X$;

(m4) для $y \in Y$ с условием $f(y) = (a, b)$ выполнено следующее:

(a) если $\varphi(y) \in X'$, то $\varphi(y) \leq \varphi(a)$ или $\varphi(y) \leq \varphi(b)$;

(b) если $\varphi(y) \in Y'$, то $f(\varphi(y)) = (\varphi(a)\varphi(b))$;

(c) если $\varphi(y) \notin X' \cup Y'$, то $\varphi(y) = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ является антицепью, а $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \ll \varphi(z)$ для всех $z \in X \cup Y$ таких, что $y \leq z$.

Пусть $\mathbb{S}_0$, $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ являются $L_6$-пространствами с носителями $X_0$; $Y_0$, $X_1$; $Y_1$ и $X_2$; $Y_2$ соответственно, и пусть $\varphi_0\colon \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}_1$, $\varphi_1\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2$ — $L_6$-морфизмы. Определим *композицию* $\varphi_0 \circ \varphi_1\colon \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}_2$ морфизмов $\varphi_0$ и $\varphi_1$ следующим образом. Пусть $u \in X_0 \cup Y_0$.

(c1) Если $\varphi_0(u) \in X_1 \cup Y_1$, то $\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \varphi_1\varphi_0(u)$.

(c2) Если $\varphi_0(u) \notin X_1 \cup Y_1$ и $\varphi(u) = (a, b)$ в $\mathbb{S}_0$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1\varphi_0(a), & \text{если } \varphi_1\varphi_0(b) \leq \varphi_1\varphi_0(a), \\ \varphi_1\varphi_0(b), & \text{если } \varphi_1\varphi_0(a) \leq \varphi_1\varphi_0(b), \\ \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\}, & \text{если } \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \text{ — антицепь.} \end{cases}$$

**Лемма 3.** *Если $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ — $L_6$-пространства, а $\varphi_0\colon \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}_1$ и $\varphi_1\colon \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_2$ — $L_6$-морфизмы, то $\varphi_0 \circ \varphi_1$ является $L_6$-морфизмом.*

*Объектами* категории $\mathbb{L}_6$ являются $L_6$-пространства; *морфизмами* этой категории являются $L_6$-морфизмы. *Объектами* категории $\mathbb{B}_6$ являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(L_6)$; *морфизмами* этой категории являются полные гомоморфизмы $(0, 1)$-решеток. Основная цель данной работы — установить, что категории $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$ дуально эквивалентны.

## 4. Контравариантный функтор из $\mathbb{L}_6$ в $\mathbb{B}_6$

Определение 3 [5, определение 3.1]. Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f\rangle$ — $L_6$-пространство. Подмножество $I \subseteq X \cup Y$ называется *идеалом* $L_6$-*пространства* $\mathbb{S}$, если $I$ — нижний конус в $\langle X \cup Y, \leq\rangle$, причем выполняется следующее свойство для всех $y \in Y$:

$$\text{если } f(y) = (a, b) \text{ и } a, b \in I, \text{ то } y \in I.$$

Ясно, что множество $\mathsf{F}(\mathbb{S})$ всех идеалов в $\mathbb{S}$ частично упорядочено относительно $\subseteq$. Для подмножества $Z \subseteq X \cup Y$ пусть $\overline{Z}$ — наименьший идеал в $\mathbb{S}$, который содержит $Z$; другими словами,

$$\overline{Z} = \bigcap\{I \in \mathsf{F}(\mathbb{S}) \mid Z \subseteq I\}.$$

Доказательство следующего утверждения вытекает из доказательства [7, предложение 3.2].

**Предложение 4.** *Пусть* $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f\rangle$ – $L_6$*-пространство, а* $\{Z_i \in \mathsf{F}(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ — *семейство идеалов в* $\mathbb{S}$. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если множество* $Z \subseteq X \cup Y$ *таково, что* $Z = \downarrow Z$, *то* $\overline{Z} = Z \cup \{y \in Y \mid f(y) = (a, b)$ *и* $a, b \in Z\}$.

(ii) $\bigvee\limits_{i\in I} Z_i = \overline{\bigcup\limits_{i\in I} Z_i} = \bigcup\limits_{i\in I} Z_i \cup \bigl\{y \in Y \mid f(y) = (a, b)$ *и* $a, b \in \bigcup\limits_{i\in I} Z_i\bigr\}$.

(iii) *Если семейство* $\{Z_i \in \mathsf{F}(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ *направлено вверх относительно* $\subseteq$, *то* $\bigvee\limits_{i\in I} Z_i = \bigcup\limits_{i\in I} Z_i$.

(iv) $Z$ *является вполне неразложимым элементом в* $\mathsf{F}(\mathbb{S})$ *тогда и только тогда, когда* $Z = \downarrow z$ *для некоторого* $z \in X \cup Y$.

(v) $Z$ *является вполне простым элементом в* $\mathsf{F}(\mathbb{S})$ *тогда и только тогда, когда* $Z = \downarrow z$ *для некоторого* $z \in X$.

(vi) *Если* $z \in X \cup Y$, *то* $\downarrow z$ *является простым элементом в* $\mathsf{F}(\mathbb{S})$ *тогда и только тогда, когда* $z \in X$.

(vii) $\mathsf{F}(\mathbb{S})$ *является полной биалгебраической решеткой.*

**Теорема 5.** *Если* $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f\rangle$ *является* $L_6$*-пространством, то* $\mathsf{F}(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_6)$.

Доказательство. Поскольку $\mathsf{F}(\mathbb{S})$ — биалгебраическая решетка по предложению 3(vii), 2-дистрибутивная в силу предложения 3(ii), $\mathsf{F}(\mathbb{S})$ является $CJ$-решеткой в силу [5, предложение 1.2]. По следствию 2 $\mathsf{F}(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_6)$. $\square$

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f\rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f\rangle$ — $L_6$-пространства и $\varphi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ — $L_6$-морфизм. Для $Z' \subseteq X' \cup Y'$ полагаем

$$\varphi^{-1}(Z') = \{z \in X \cup Y \mid \varphi(x) \in Z'\} \cup \{z \in Y \mid \varphi(z) \subseteq Z'\}.$$

Рассмотрим следующее отображение:

$$\mathsf{F}(\varphi)\colon \mathsf{F}(\mathbb{S}') \to \mathsf{F}(\mathbb{S}), \quad \mathsf{F}(\varphi)\colon Z' \mapsto \varphi^{-1}(Z').$$

**Предложение 6.** *Если* $\mathbb{S}$ *и* $\mathbb{S}'$ — $L_6$*-пространства, а* $\varphi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ — $L_6$*-морфизм, то* $\mathsf{F}(\varphi)\colon \mathsf{F}(\mathbb{S}') \to \mathsf{F}(\mathbb{S})$ — *полный гомоморфизм* $(0, 1)$*-решеток.*

Доказательство. Несложные вычисления доказывают

**Утверждение 1.** $\mathsf{F}(\varphi)(Z') \in \mathsf{F}(\mathbb{S})$ *для каждого* $Z' \in \mathsf{F}(\mathbb{S})$.

Из утверждения выше следует, что $\mathsf{F}(\varphi)$ определено корректно. Очевидно, что $\mathsf{F}(\varphi)(\varnothing) = \varphi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ и $\mathsf{F}(\varphi)(X' \cup Y') = \varphi^{-1}(X' \cup Y') = X \cup Y$. Следовательно, $\mathsf{F}(\varphi)$ сохраняет наибольший и наименьший элементы. Остается установить, что $\mathsf{F}(\varphi)$ сохраняет произвольные непустые решеточные объединения и пересечения.

**Утверждение 2.** $\mathsf{F}(\varphi)$ *является полным решеточным гомоморфизмом.*

Доказательство утверждения. Рассмотрим семейство $\{Z'_i \mid i \in I\} \subseteq \mathsf{F}(\mathbb{S}')$ идеалов в $\mathbb{S}'$. Ясно, что

$$\varphi^{-1}\Bigl(\bigcap_{i\in I} Z'_i\Bigr) = \bigcap_{i\in I} \varphi^{-1}(Z'_i),$$

поэтому $\mathsf{F}(\varphi)$ сохраняет все непустые пересечения. В частности, $\mathsf{F}(\varphi)$ сохраняет порядок. Таким образом,

$$\bigvee_{i\in I}\varphi^{-1}(Z'_i)\subseteq\varphi^{-1}\Bigl(\bigvee_{i\in I}Z'_i\Bigr).$$

Для доказательства того, что $\mathsf{F}(\varphi)$ сохраняет произвольные решеточные объединения, мы должны установить обратное включение. Действительно, пусть

$$z\in\varphi^{-1}\Bigl(\bigvee_{i\in I}Z'_i\Bigr)=\varphi^{-1}\Bigl(\overline{\bigcup_{i\in I}Z'_i}\Bigr).$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $\varphi(z)\in X'\cup Y'$. В этом случае $\varphi(z)\in\overline{\bigcup_{i\in I}Z'_i}$. Если $\varphi(z)\in\bigcup_{i\in I}Z'_i$, то $\varphi(z)\in Z'_j$ для некоторого $j\in I$ и $z\in\varphi^{-1}(Z'_j)\subseteq\bigvee_{i\in I}\varphi^{-1}(Z'_i)$. Иначе получаем по предложению 4(ii), что $\varphi(z)\in Y'$ и $\varphi(f(z))=(a',b')$ для некоторых $a',b'\in\bigcup_{i\in I}Z'_i$. Из включения $\varphi(z)\in Y'$ в силу (m4-b) следует, что $z\in Y$ и $\varphi\bigl(f(z)\bigr)=(\varphi(a),\varphi(b))$, где $f(z)=(a,b)$. Следовательно, $\varphi(a)=a'\in\bigcup_{i\in I}Z'_i$ и $\varphi(b)=b'\in\bigcup_{i\in I}Z'_i$. Последнее включение влечет включение $a,b\in\bigcup_{i\in I}\varphi^{-1}(Z'_i)$. Поскольку $f(z)=(a,b)$, получаем, что $z\in\bigvee_{i\in I}\varphi^{-1}(Z'_i)$.

Случай 2: $\varphi(z)\notin X'\cup Y'$. В этом случае $z\in Y$, $f(z)=(a,b)$ в $\mathbb{S}$ и $\varphi(z)=\{\varphi(a),\varphi(b)\}\subseteq\overline{\bigcup_{i\in I}Z'_i}$. Поскольку $a,b\subseteq X$, заключаем в силу (m3) определения 2, что $\varphi(a),\varphi(b)\subseteq X'$. Стало быть, $\varphi(a),\varphi(b)\in\bigcup_{i\in I}Z'_i$ по предложению 4(ii), т. е. $a,b\in\bigcup_{i\in I}\varphi^{-1}(Z'_i)$ и $z\in\bigvee_{i\in I}\varphi^{-1}(Z'_i)$. □

Таким образом, $\mathsf{F}(\varphi)$ — полный гомоморфизм $(0,1)$-решеток, и доказательство предложения 6 завершено. □

**Следствие 7.** $\mathsf{F}\colon\mathbb{L}_6\to\mathbb{B}_6$ *является контравариантным функтором.*

Доказательство. Из предложений 4, 6 и теоремы 5 следует, что функтор $\mathsf{F}$ определен корректно. Ясно, что если $\mathbb{S}_0,\mathbb{S}_1,\mathbb{S}_2$ — $L_6$-пространства, а $\varphi_0\colon\mathbb{S}_0\to\mathbb{S}_1$, $\varphi_1\colon\mathbb{S}_1\to\mathbb{S}_2$ — $L_6$-морфизмы, то

$$\mathsf{F}(\varphi_0\circ\varphi_1)(Z)=\varphi_0^{-1}\varphi_1^{-1}(Z)=\mathsf{F}(\varphi_1)\circ\mathsf{F}(\varphi_0)(Z)$$

для всех $Z\in\mathsf{F}(\mathbb{S}_2)$, поэтому $\mathsf{F}$ сохраняет композиции морфизмов. □

## 5. Контравариантный функтор из $\mathbb{B}_6$ в $\mathbb{L}_6$

Для решетки $L\in\mathbb{B}_6$ полагаем

$$\mathsf{G}(L)=\langle X,Y,\le,f\rangle,$$

где $X=\mathrm{CJ}_P(L)$ — множество всех вполне неразложимых элементов решетки $L$, которые являются простыми, $Y=\mathrm{CJ}_{NP}(L)$ — множество всех вполне неразложимых элементов решетки $L$, которые не являются простыми, $\le$ — порядок в $L$, а $f(y)=(a,b)$ для элемента $y\in\mathrm{CJ}_{NP}(L)$ в том случае, когда $\langle y\rangle_{\mathfrak{M}}=\{y,a,b\}$.

Из этого определения и определения 2, получаем

**Предложение 8.** *Если* $L \in \mathbb{B}_6$, *то* $\mathsf{G}(L) \in \mathbb{L}_6$.

Доказательство. Единственное нетривиальное свойство в определении 2, которое требует доказательства, это (s3-c). Пусть $y \in \mathrm{CJ}_{NP}(L)$, а элемент $z \in \mathrm{C}J_P(L) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $f(y) = (a, b)$ и $z \le y$. Если $z \nleq a$ и $z \nleq b$, то $z \in \mathrm{CJ}_{NP}(L)$ и $z \le y \le a \vee b$ в $L$. Согласно следствию 2 $\langle z\rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in \mathrm{CJ}_P(L)$. Поскольку $z \le a \vee b$ является нетривиальным покрытием, получаем, что $\{c, d\} \ll \{a, b\}$. $\square$

Для решеток $L, M \in \mathbb{B}_6$ и полного гомоморфизма $(0, 1)$-решеток $g\colon M \to L$ рассмотрим следующее отображение:

$$\beta_g\colon L \to M, \quad \beta_g\colon a \mapsto \bigwedge\{b \in M \mid a \le g(b)\}.$$

Заметим, что $1_M \in \{b \in M \mid a \le g(b)\}$ для всех $a \in L$. Следующие три утверждения установлены в [5].

**Лемма 9** [5, лемма 4.2]. *Пусть* $L, M$ — *полные биалгебраические* $(0, 1)$-*решетки и* $g\colon M \to L$ — *полный гомоморфизм* $(0, 1)$-*решеток. Справедливы следующие утверждения.*

(i) $a \le g\beta_g(a)$ *для всех* $a \in L$ *и* $\beta_g g(b) \le b$ *для всех* $b \in M$.

(ii) $g\beta_g g(b) = g(b)$ *для всех* $b \in M$.

(iii) $\beta_g g\beta_g(a) = \beta_g(a)$ *для всех* $a \in L$.

(iv) $\beta_g\big(\bigvee\limits_{i\in I} a_i\big) = \bigvee\limits_{i\in I} \beta_g(a_i)$ *для всех* $a_i \in L$, $i \in I$.

(v) *Если* $x \in \mathrm{CJ}_P(L)$, *то* $\beta_g(x) \in \mathrm{CJ}_P(M)$.

(vi) *Для каждого* $b \in L$ *с условием* $\beta_g(b) \in \mathrm{CJ}(M)$ *найдется* $y \in \mathrm{CJ}(L)$ *такой, что* $\beta_g(b) = \beta_g(y)$. *Более того,* $y \in \mathrm{CJ}_{NP}(L)$, *если* $\beta_g(b) \in \mathrm{CJ}_{NP}(M)$.

(vi) *Если* $g$ *разнозначен, то для каждого* $b \in \mathrm{CJ}(M)$ *существует* $a \in \mathrm{CJ}(L)$ *такой, что* $\beta_g(a) = b$.

(vii) *Если* $g$ *является отображением «на», то* $\beta_g\colon \mathrm{CJ}(L) \to \mathrm{CJ}(M)$ *разнозначно.*

**Лемма 10** [5, лемма 4.3]. *Пусть* $L, M$ — *полные биалгебраические* $(0, 1)$-*решетки, и пусть* $g\colon M \to L$ — *полный гомоморфизм* $(0, 1)$-*решеток. Если* $y \in \mathrm{CJ}_{NP}(L)$ *таков, что* $\beta_g(y) \in \mathrm{CJ}_{NP}(M)$, *то*

$$\langle\beta_g(y)\rangle_{\mathfrak{M}} = \big\{\beta_g(y), \beta_g(a), \beta_g(b)\big\},$$

*где* $\langle y\rangle_{\mathfrak{M}} = \{y, a, b\}$.

**Лемма 11** [5, лемма 4.4]. *Пусть* $L, M$ — *полные биалгебраические* $(0, 1)$-*решетки и* $g\colon M \to L$ — *полный гомоморфизм* $(0, 1)$-*решеток. Если* $y \in \mathrm{CJ}_{NP}(L)$ *таков, что* $\beta_g(y) \notin \mathrm{CJ}_P(M) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(M)$, *то* $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\}$ *является антицепью и* $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$, *где* $\langle y\rangle_{\mathfrak{M}} = \{y, a, b\}$.

Для решеток $L, M \in \mathbb{B}_6$ и полного гомоморфизма $(0, 1)$-решеток $g\colon M \to L$ определим отображение $\mathsf{G}(g)\colon \mathsf{G}(L) \to \mathsf{G}(M)$ следующим образом. Для $z \in \mathrm{CJ}_P(L) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(L)$ полагаем

$$\mathsf{G}(g)(z) = \begin{cases} \beta_g(z), & \text{если } \beta_g(z) \in \mathrm{CJ}_P(M) \cup \mathrm{C}J_{NP}(M); \\ \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}, & \text{если } \beta_g(z) \notin \mathrm{CJ}_P(M) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(M),\ \langle z\rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, a, b\}. \end{cases}$$

**Предложение 12.** *Пусть $L, M \in \mathbb{B}_6$ и $g\colon M \to L$ является полным гомоморфизмом* $(0,1)$*-решеток. Тогда $\mathsf{G}(g)\colon \mathsf{G}(L) \to \mathsf{G}(M)$ является $L_6$-морфизмом.*

Доказательство. Требуется установить, что $\mathsf{G}(g)$ обладает свойствами (m1)–(m4) из определения 2. Свойство (m1) следует непосредственно из определения $\mathsf{G}(g)$. Свойство (m2) следует из леммы 9(iv), в то время как (m3) следует из леммы 9(v). Установим, что свойство (m4) также имеет место.

Действительно, пусть $y \in \mathrm{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $\langle y \rangle_{\mathfrak{M}} = \{y, a, b\}$, т. е. $f(y) = (a, b)$ в $\mathsf{G}(L)$. Если $\mathsf{G}(g)(y) \in \mathrm{CJ}_P(M)$, то $\mathsf{G}(g)(y) = \beta_g(y) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ влечет неравенство $\mathsf{G}(g)(y) \leq \beta_g(a)$ или неравенство $\mathsf{G}(g)(y) \leq \beta_g(b)$. Таким образом, (m4-a) выполнено. Свойство (m4-b) следует из леммы 10.

Наконец, если $\mathsf{G}(g)(y) \notin \mathrm{CJ}_P(M) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(M)$, то

$$\mathsf{G}(g)(y) = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \{\mathsf{G}(g)(a), \mathsf{G}(g)(b)\}.$$

Более того, $\mathsf{G}(g)(y)$ является антицепью, так как в этом случае $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ по лемме 11. Итак, пусть $z \in \mathrm{CJ}_P(L) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $y \leq z$. Тогда

$$\mathsf{G}(g)(a) \vee \mathsf{G}(g)(b) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(z).$$

Если $\beta_g(z) \in \mathrm{CJ}_P(M) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(M)$, то

$$\mathsf{G}(g)(a), \mathsf{G}(g)(b) \leq \beta_g(z) = \mathsf{G}(g)(z).$$

Если $\beta_g(z) \notin \mathrm{CJ}_P(M) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(M)$, то

$$\mathsf{G}(g)(z) = \{\beta_g(c), \beta_g(d)\},$$

где $\langle z \rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ в $L$. Имеем $y \leq z \leq c \vee d$. Если $y \leq c$, то

$$\beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(c).$$

Если $y \leq d$, то

$$\beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(d).$$

Если $y \leq c \vee d$ является нетривиальным покрытием, то $\{a, b\} \ll \{c, d\}$, откуда $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \ll \{\beta_g(c), \beta_g(d)\}$ по лемме 9. Таким образом, $\{\mathsf{G}(g)(a), \mathsf{G}(g)(b)\} \ll \mathsf{G}(g)(z)$, и свойство (m4-c) выполнено. □

**Предложение 13.** $\mathsf{G}\colon \mathbb{B}_6 \to \mathbb{L}_6$ *является контравариантным функтором.*

Доказательство. Из предложений 8 и 12 вытекает, что функтор $\mathsf{G}$ определен корректно. Пусть $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{B}_6$ и $g_0\colon L_0 \to L_1$, $g_1\colon L_1 \to L_2$ являются полными гомоморфизмами $(0,1)$-решеток. Тогда $\beta_{g_1 g_0} = \beta_{g_0}\beta_{g_1}$ в силу доказательства предложения 5.6 из [5]. Нужно показать, что $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \mathsf{G}(g_1) \circ \mathsf{G}(g_0)(z)$ для всех $z \in \mathrm{CJ}_P(L_2) \cup \mathrm{CJ}_{NP}(L_2)$. Для краткости полагаем

$$X_0 = \mathrm{CJ}_P(L_0), \quad Y_0 = \mathrm{CJ}_{NP}(L_0);$$

$$X_1 = \mathrm{CJ}_P(L_1), \quad Y_1 = \mathrm{CJ}_{NP}(L_1);$$

$$X_2 = \mathrm{CJ}_P(L_2), \quad Y_2 = \mathrm{CJ}_{NP}(L_2).$$

Согласно лемме 9(v),(vi) возможен один из следующих случаев.

Случай 1: $\mathsf{G}(g_1)(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. В этом случае

$$\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_1 g_0}(z) = \mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z).$$

Случай 2: $\mathsf{G}(g_1)(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$. В силу того, что $\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, по лемме 9(v) заключаем, что $z \in Y_2$ и $\mathsf{G}(g_1)(z) \in Y_1$. Тогда $\langle z\rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in X_2$. По лемме 10 получаем

$$\langle \mathsf{G}(g_1)(z)\rangle_{\mathfrak{M}} = \{\beta_{g_1}(z), \beta_{g_1}(c), \beta_{g_1}(d)\},$$

откуда

$$\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) = \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(c), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d)\} = \{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\},$$

поэтому $\beta_{g_1 g_0}(y) \notin X_0 \cup Y_0$. Отсюда следует, что $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$. Таким образом,

$$\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) = \{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\} = \mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z).$$

Случай 3: $\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$ и $\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$. В этом случае $z \in Y_2$ по лемме 9(v). Тогда $\langle z\rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in X_2$. Так как $\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$, заключаем, что $\mathsf{G}(g_1)(z) = \{\beta_{g_1}(c), \beta_{g_1}(d)\}$, а $\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_1}(d)$ является нетривиальной суммой по лемме 11. Так как $\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, заключаем, что

$$\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) = \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(c), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d)\} = \{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\}.$$

Тогда $\{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\}$ является антицепью в силу (c2) из определения 2. Если $\beta_{g_1 g_0}(z) \in X_0 \cup Y_0$, то равенство

$$\beta_{g_1 g_0}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d) = \beta_{g_1 g_0}(c) \vee \beta_{g_1 g_0}(d)$$

влекло бы включение $\beta_{g_1 g_0}(z) \in \{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\}$, а последнее множество не было бы антицепью; противоречие. Таким образом, $\beta_{g_1 g_0}(z) \notin X_0 \cup Y_0$. Отсюда следует, что $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, поэтому

$$\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) = \{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\} = \mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z).$$

Случай 4: $\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$ и $\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. Так как $\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$, получаем по лемме 9(v), что $z \in Y_2$ и $\langle z\rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in X_2$. Так как $\mathsf{G}(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$, имеем также $\mathsf{G}(g_1)(z) = \{\beta_{g_1}(c), \beta_{g_1}(d)\}$, а $\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_1}(d)$ является нетривиальной суммой по лемме 11. Вновь

$$\beta_{g_1 g_0}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d) = \beta_{g_1 g_0}(c) \vee \beta_{g_1 g_0}(d).$$

Если $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, то $\beta_{g_1 g_0}(z) = \beta_{g_1 g_0}(c) \vee \beta_{g_1 g_0}(d)$ является нетривиальной суммой по лемме 11. В частности, $\{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\}$ является антицепью. С другой стороны, $\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. Это влечет в силу (c2) из определения 2, что

$$\mathsf{G}(g_0)\mathsf{G}(g_1)(z) \in \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(c), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d)\} = \{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\}$$

и что множество $\{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\}$ является цепью. Получили противоречие, которое означает, что $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. Таким образом, $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1 g_0}(z)$ является вполне неразложимым элементом. Отсюда вытекает, что

$$\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) \in \{\beta_{g_1 g_0}(c), \beta_{g_1 g_0}(d)\}.$$

Возможны два случая.

Случай 4.1: $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1 g_0}(c)$. В этом случае $\beta_{g_1 g_0}(d) \leq \beta_{g_1 g_0}(c)$, поэтому $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1 g_0}(c)$ в силу (c2) из определения 2.

Случай 4.2: $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1 g_0}(d)$. В этом случае $\beta_{g_1 g_0}(c) \leq \beta_{g_1 g_0}(d)$, поэтому $\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1 g_0}(d)$ в силу (c2) из определения 2.

Таким образом, доказано, что

$$\mathsf{G}(g_0 \circ g_1)(z) = \mathsf{G}(g_0)(z)\mathsf{G}(g_1)$$

в каждом из возможных случаев. Отсюда следует, что

$$\mathsf{G}(g_0 \circ g_1) = \mathsf{G}(g_1) \circ \mathsf{G}(g_0),$$

поэтому $\mathsf{G}$ сохраняет композиции морфизмов. $\square$

## 6. Основные результаты

Для категории $\mathbb{C}$ пусть $1_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ обозначает функтор такой, что $1_{\mathbb{C}}(a) = a$ для каждого $\mathbb{C}$-объекта $a$ и $1_{\mathbb{C}}(f) = f$ для каждого $\mathbb{C}$-морфизма $f$.

Доказательство следующего предложения повторяет доказательство соответствующих утверждений из [5] (см. [5, предложения 5.1, 5.3]).

**Предложение 14.** *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Функторы* $\mathsf{GF}\colon \mathbb{L}_6 \to \mathbb{L}_6$ *и* $1_{\mathbb{L}_6}$ *изоморфны.*

(ii) *Функторы* $\mathsf{FG}\colon \mathbb{B}_6 \to \mathbb{B}_6$ *и* $1_{\mathbb{B}_6}$ *изоморфны.*

Из предложения 14 получаем

**Предложение 15.** *Категории* $\mathbb{L}_6$ *и* $\mathbb{B}_6$ *дуально эквивалентны.*

Пусть $(\mathbb{L}_6)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_6)_{fin}$ обозначают полные подкатегории в $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$ соответственно, объекты которых конечны. Из нашего определения функторов $\mathsf{F}$ и $\mathsf{G}$ и теоремы 15 получаем

**Следствие 16.** *Категории* $(\mathbb{L}_6)_{fin}$ *и* $(\mathbb{B}_6)_{fin}$ *дуально эквивалентны.*

В точности так же, как и в [5, следствие 5.5], из леммы 9 и теоремы 15 получаем

**Следствие 17.** *Имеют место следующие утверждения.*

(i) $\mathbb{L}_6$*-морфизмы, которые сюръективны, соответствуют в силу дуальности разнозначным гомоморфизмам в* $\mathbb{B}_6$ *и наоборот.*

(ii) $\mathbb{L}_6$*-морфизмы, которые являются вложениями, соответствуют в силу дуальности сюръективным гомоморфизмам в* $\mathbb{B}_6$ *и наоборот.*

(iii) *Раздельные объединения пространств в* $\mathbb{L}_6$ *соответствуют в силу дуальности декартовым произведениям в* $\mathbb{B}_6$ *и наоборот.*

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Basheyeva A. O., Schwidefsky M. V., Sultankulov K. D.* The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 2. P. 902–911.
2. *Adams M. E., Dziobiak W.* $Q$-universal quasivarieties of algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1994. V. 120, N 4. P. 1053–1059.
3. *Adams M. E., Dziobiak W., Kravchenko A. V., Schwidefsky M. V.* Complete homomorphic images of the quasivariety lattices of locally finite quasivarieties. Manuscript, 2024.
4. *Dziobiak W., Schwidefsky M. V.* Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract // Bull. Sec. Logic. 2022. V. 51, N 3. P. 329–344.
5. *Dziobiak W., Schwidefsky M. V.* Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0, 1)$-lattices generated by the pentagon // Algebra and Logic, accepted for publication in 2023.
6. *Freese R., Ježek J., Nation J. B.* Free lattices. New York, 1995. (Math. Surv. Monogr.; V. 42).


*Поступила в редакцию 7 апреля 2023 г.*
*После доработки 26 февраля 2024 г.*
*Принята к публикации 8 апреля 2024 г.*

Башеева Айнур Орынбасаровна (ORCID 0000-0002-9124-0055)
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Казымукан 13, Астана 010008, Казахстан
basheeva@mail.ru

Швидефски Марина Владимировна (ORCID 0000-0003-4804-8073)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
m.schwidefsky@g.nsu.ru