Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 517.962.2

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. А. Щеглова

Аннотация. Рассматривается нелинейная дескрипторная система с дискретным временем. Для такой системы построена структурная форма и доказана локальная теорема существования решений. Предположения теоремы обеспечивают для системы первого приближения наличие обратимого слева линейного оператора, преобразующего ее к удобной для анализа структурной форме. Получены достаточные условия устойчивости нелинейной системы по линейному приближению в предположениях приводимости и правильности соответствующей части системы первого приближения. Попутно рассмотрены вопросы о приводимости и правильности линейных дискретных дескрипторных систем.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.213

Ключевые слова: дескрипторные системы, дискретные системы, нестационарные, нелинейные, устойчивость, правильные системы, приводимые системы.

1. Введение

Рассматривается нестационарная нелинейная дискретная система

$$g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0, \quad k \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}, \tag{1.1}$$

где $x^{[k]} \in \mathbf{R}^n$ — искомые векторы; n-мерная вектор-функция $g(k, \alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$) определена на множестве $\mathbf{N} \times \mathscr{V}(0)$ ($\mathscr{V}(0)$ — некоторая окрестность точки $(\alpha, \beta) = 0$). Кроме того, на указанном множестве $g(k, \alpha, \beta)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным α и β:

$$g(k, \alpha, \beta) \in \mathbf{C}^1_{\alpha,\beta}(\mathbf{N} \times \mathscr{V}(0)).$$

Предполагается, что система (1.1) имеет тривиальное решение

$$g(k, 0, 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}. \tag{1.2}$$

Допускается случай

$$\det \frac{\partial g(k, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \equiv 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \;\; \forall (\alpha, \beta) \in \mathscr{V}(0). \tag{1.3}$$

Математические модели, построенные в виде вырожденных дискретных систем (1.1), (1.3) (называемых также дискретными дескрипторными системами), описывают природные и технические процессы во многих прикладных областях: биологии, экономике, робототехнике, астрофизике, моделировании летательных аппаратов, электрических сетях, механике и др. [1–7].

Большинство известных результатов по устойчивости вырожденных систем с дискретным временем получены для линейного случая (см. например, [8–12]).

Активно изучаются и нелинейные системы [13–19]. Обычно рассматриваются системы, представляющие собой сумму главной линейной части и нелинейного слагаемого, при различных предположениях относительно обеих составляющих. Во многих работах линейная часть полагается стационарной с регулярным пучком матричных коэффициентов [13–16]. В статьях [17, 18] анализ устойчивости нелинейных систем проводится с использованием линейных матричных неравенств. В работе [19] с этой целью применяется второй метод Ляпунова.

Данная статья посвящена исследованию устойчивости тривиального решения нелинейной системы вида (1.1) по ее линейному приближению. В п. 2 для системы (1.1) построена структурная форма как часть компонент неявной функции, удовлетворяющей уравнениям вида (1.1) при $k = \overline{\varkappa, \varkappa + r}$ $(0 \le r \le n)$. На этой основе доказана локальная теорема о существовании решений. В п. 3 рассматривается система линейного приближения. Показано, что предположения теоремы существования из п. 2 обеспечивают для системы первого приближения существование линейного оператора, преобразующего ее к структурной форме, удобной для анализа устойчивости. В пп. 4 и 5 изучаются приводимость и правильность линейных дескрипторных систем. В п. 6 доказаны теоремы об асимптотической устойчивости тривиального решения нелинейной системы (1.1) по линейному приближению в предположениях приводимости и правильности той части системы первого приближения, которая определяет ее асимптотическое поведение. В п. 7 приведен пример, иллюстрирующий построенную теорию.

2. Существование решения нелинейной дескрипторной системы

Этот раздел посвящен поиску условий существования решений системы (1.1).

Положим
$$B_k = \frac{\partial g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]})}{\partial x^{[k-1]}}, \quad A_k = \frac{\partial g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]})}{\partial x^{[k]}}.$$
Для некоторого фиксированного r, $1 \le r \le n$, определим $n(r+1) \times n$-матрицы
$$\mathscr{B}_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = \operatorname{col}(B_k, O, \dots, O), \tag{2.1}$$
$$\Gamma_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}, x^{[k+1]}) = \operatorname{col}(A_k, B_{k+1}, O, \dots, O), \tag{2.2}$$
$n(r+1) \times nr$-матрицу
$$\Lambda_r(k, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A_{k+1} & O & \dots & O & O \\ B_{k+2} & A_{k+2} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & B_{k+r} & A_{k+r} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$
и матрицу
$$\mathscr{D}_r(k, \overline{x}_{k,r}) = \big(\mathscr{B}_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) \;\; | \;\; \Gamma_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}, x^{[k+1]}) \;\; \| \;\; \Lambda_r(k, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}) \big) \tag{2.4}$$
размера $n(r+1) \times n(r+2)$, здесь и далее
$$\overline{x}_{k,r} = (x^{[k-1]}, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}). \tag{2.5}$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого* r, $1 \le r \le n$, *при всех значениях* $k \in \mathbf{N}$ *выполняются условия*

(1) $\operatorname{rank} \Lambda_r(k, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}) = \lambda = \mathrm{const}$ *при всех* $x^{[j]}$ *из соответствующих окрестностей* $\mathscr{V}_j(0)$ *точки* $0 \in \mathbf{R}^n$ $(j = \overline{k, k+r})$;

(2) *в матрице* $\mathscr{D}_r(k, 0)$ *имеется обратимая подматрица* $\mathscr{M}_r(k, 0)$ *порядка* $n(r+1)$, *включающая в себя все столбцы матрицы* $\Gamma_r(k, 0, 0)$ *и* λ *столбцов матрицы* $\Lambda_r(k, 0, \dots, 0)$;

(3) *в матрице* $\mathscr{D}_{r+1}(k, 0)$ *найдется обратимая подматрица* $\mathscr{M}_{r+1}(k, 0)$ *порядка* $n(r+2)$, *включающая в себя все столбцы, в которых расположены матрицы* $\mathscr{M}_r(k, 0)$ *и* $\mathscr{M}_r(k+1, 0)$[1].

Если величина $\|x_1^{[0]}\| \ne 0$[2] *достаточно мала (вектор* $x_1^{[0]}$ *определен ниже в* (2.8)), *то система* (1.1) *имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее уравнениям*

$$x_2^{[k-1]} = f_1\bigl(k, x_1^{[k-1]}\bigr), \tag{2.6}$$

$$x_1^{[k]} = f_2\bigl(k, x_1^{[k-1]}\bigr), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{2.7}$$

где

$$x^{[k]} = Q \operatorname{col}\bigl(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}\bigr), \quad x_1^{[k]} \in \mathbf{R}^{n-d},\ x_2^{[k]} \in \mathbf{R}^d,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \tag{2.8}$$

Q — *матрица перестановок строк;* $d = nr - \lambda$ — *число столбцов матрицы* $\mathscr{B}_r(k, 0, 0)$, *входящих в* $\mathscr{M}_r(k, 0)$;

$$f_i(k, 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}; \tag{2.9}$$

$$f_i\bigl(k, x_1^{[k-1]}\bigr) \in C^1_{x_1^{[k-1]}}(\mathbf{N} \times \mathscr{V}_{k,1}(0)), \quad i = 1, 2, \tag{2.10}$$

$\mathscr{V}_{k,1}(0)$ — *окрестность точки* $x_1^{[k-1]} = 0$.

Доказательство. Зафиксируем значение $k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим систему (1.1) на конечном горизонте

$$g(i, x^{[i-1]}, x^{[i]}) = 0, \quad i = \overline{k, k+r}. \tag{2.11}$$

В силу условия 2 теоремы найдется неявная функция [20, гл. 1, § 1.5, теорема 1.53]

$$x_2^{[k-1]} = f_1\bigl(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}\bigr), \tag{2.12}$$

$$x^{[k]} = \varphi_1\bigl(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}\bigr), \tag{2.13}$$

$$z_1^{[k]} = \varphi_2\bigl(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}\bigr) \tag{2.14}$$

(см. (2.8)), которая определена в некоторой окрестности точки $\bigl(x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}\bigr) = 0$ и удовлетворяет уравнениям (2.11). Здесь

$$Q_r \operatorname{col}\bigl(z_1^{[k]}, z_2^{[k]}\bigr) = \operatorname{col}(x^{[k+1]}, \dots, x^{[k+r]}), \tag{2.15}$$

Q_r — соответствующая матрица перестановок строк. При этом в указанной окрестности функции (2.12)–(2.14) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $x_1^{[k-1]}$ и $z_2^{[k]}$.

---

[1] $\mathscr{M}_r(k+1, 0)$ — обратимая подматрица порядка $n(r+1)$, которая в силу предположения 2 теоремы присутствует в матрице $\mathscr{D}_r(k+1, 0)$ и включает в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(k+1, 0, \dots, 0)$ и все столбцы матрицы $\Gamma_r(k+1, 0, 0)$.

[2] Здесь и далее под нормой вектора из пространства $\mathbf{R}^n$ понимается евклидова норма, а под нормой $n \times n$-матрицы — спектральная матричная норма.

Заметим, что матрица $\mathscr{M}_r(k, \overline{x}_{k,r})$, фигурирующая в предположении 2, остается обратимой и в некоторой окрестности $\overline{\mathscr{V}}_{k,r}(0)$ точки $\overline{x}_{k,r} = 0$, в силу чего

$$(\mathscr{M}_r(k, \overline{x}_{k,r}))^{-1}\mathscr{D}_r(k, \overline{x}_{k,r})\,\mathrm{diag}\{Q, Q, Q_r\} = \left(\begin{array}{cc|c||cc} J_1(k, \overline{x}_{k,r}) & E_d & O & O & \Psi_1(k, \overline{x}_{k,r}) \\ J_2(k, \overline{x}_{k,r}) & O & E_n & O & \Psi_2(k, \overline{x}_{k,r}) \\ J_3(k, \overline{x}_{k,r}) & O & O & E_\lambda & \Psi_3(k, \overline{x}_{k,r}) \end{array}\right),$$

где $J_j(k, \overline{x}_{k,r})$, $\Psi_j(k, \overline{x}_{k,r})$ $(j = 1, 2, 3)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров. По построению ранг матрицы $\Lambda_r(k, x^{[k]}, \ldots, x^{[k+r]})$ равен рангу матрицы, расположенной правее двойной вертикальной линии. С учетом последнего обстоятельства и в соответствии с предположением 1 теоремы $\Psi_1(k, \overline{x}_{k,r}) \equiv O$, $\Psi_2(k, \overline{x}_{k,r}) \equiv O$ при $\overline{x}_{k,r} \in \overline{\mathscr{V}}_{k,r}(0)$. Следовательно, по теореме о производной неявной функции [20, гл. 1, § 1.5, теорема 1.55] в некоторой окрестности нуля

$$\begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1^{[k-1]} & \partial f_1/\partial z_2^{[k]} \\ \partial \varphi_1/\partial x_1^{[k-1]} & \partial \varphi_1/\partial z_2^{[k]} \\ \partial \varphi_2/\partial x_1^{[k-1]} & \partial \varphi_2/\partial z_2^{[k]} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} J_1(k, \overline{x}_{k,r}) & O \\ J_2(k, \overline{x}_{k,r}) & O \\ J_3(k, \overline{x}_{k,r}) & \Psi_3(k, \overline{x}_{k,r}) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что функции (2.12) и (2.13) не зависят от переменной $z_2^{[k]}$:

$$x_2^{[k-1]} = f_1\bigl(k, x_1^{[k-1]}\bigr), \tag{2.16}$$

$$x^{[k]} = \varphi_1\bigl(k, x_1^{[k-1]}\bigr), \tag{2.17}$$

Добавим к системе (2.11) еще одно уравнение

$$g(k + r + 1, x^{[k+r]}, x^{[k+r+1]}) = 0. \tag{2.18}$$

Построим неявную функцию, удовлетворяющую системе (2.11), (2.18). Для этого подставим выражения (2.14), (2.16), (2.17) в (2.18), в результате чего получим уравнение

$$\widehat{g}\bigl(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}, x^{[k+r+1]}\bigr) = 0. \tag{2.19}$$

В соответствии со свойствами обратимых блочных матриц [21, гл. 11, § 5] в матрице $\bigl(\partial\widehat{g}/\partial z_2^{[k]} \quad \partial\widehat{g}/\partial x^{[k+r+1]}\bigr)$ при $\bigl(x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}, x^{[k+r+1]}\bigr) = 0$ в силу предположения 3 найдется обратимая подматрица порядка n. Тогда в некоторой окрестности нуля существует неявная функция

$$z_3^{[k]} = \varphi_3\bigl(k, x_1^{[k-1]}, z_4^{[k]}\bigr), \tag{2.20}$$

удовлетворяющая уравнению (2.19). В (2.20)

$$\widehat{Q}_r\,\mathrm{col}\bigl(z_3^{[k]}, z_4^{[k]}\bigr) = \mathrm{col}\bigl(z_2^{[k]}, x^{[k+r+1]}\bigr),$$

$\widehat{Q}_r$ — соответствующая матрица перестановок строк.

Таким образом, неявная функция (2.14), (2.16), (2.17), (2.20) определена в некоторой окрестности нуля и при подстановке обращает в тождества уравнения (2.11), (2.18).

Найдем другую неявную функцию, удовлетворяющую системе (2.11), (2.18). Для этого рассмотрим уравнения

$$g(i, x^{[i-1]}, x^{[i]}) = 0, \quad i = \overline{k+1, k+r+1}, \tag{2.21}$$

и построим для нее матрицы $\mathscr{B}_r(k + 1, x^{[k]}, x^{[k+1]})$, $\Gamma_r(k + 1, x^{[k]}, x^{[k+1]}, x^{[k+2]})$, $\Lambda_r(k + 1, x^{[k+1]}, \ldots, x^{[k+r+1]})$ и $\mathscr{D}_r(k + 1, \overline{x}_{k+1,r})$, аналогичные (2.1)–(2.4).

Так же, как это сделано выше, можно показать, что в соответствующей окрестности нуля определена неявная функция вида

$$x_2^{[k]} = f_1\big(k+1, x_1^{[k]}\big), \tag{2.22}$$

$$x^{[k+1]} = \varphi_1\big(k+1, x_1^{[k]}\big), \tag{2.23}$$

$$z_1^{[k+1]} = \varphi_2\big(k+1, x_1^{[k]}, z_2^{[k+1]}\big), \tag{2.24}$$

удовлетворяющая системе (2.21). В (2.22)–(2.24) векторы $x_1^{[k]}$, $x_2^{[k]}$ определяются соотношением (2.8), $Q_r \operatorname{col}\big(z_1^{[k+1]}, z_2^{[k+1]}\big) = \operatorname{col}(x^{[k+2]}, \dots, x^{[k+r+1]})$, Q_r — матрица перестановок из (2.15).

Добавим к системе (2.21) уравнение

$$g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0. \tag{2.25}$$

Подставив (2.22) в (2.25), получим уравнение

$$\widetilde{g}\big(k, x^{[k-1]}, x_1^{[k]}\big) = 0. \tag{2.26}$$

Существование в $\mathscr{D}_{r+1}(k,0)$ обратимой подматрицы $\mathscr{M}_{r+1}(k,0)$ порядка $n(r+2)$ гарантирует, что при $\big(x^{[k-1]}, x_1^{[k]}\big) = 0$

$$\operatorname{rank}\big(\, \partial\widetilde{g}/\partial x^{[k-1]} \quad \partial\widetilde{g}/\partial x_1^{[k]} \,\big) = n.$$

Согласно предположению 3 матрица $\mathscr{M}_{r+1}(k,0)$ включает в себя все столбцы матрицы $\mathscr{D}_{r+1}(k,0)$, в которых расположена матрица $\mathscr{M}_r(k,0)$. Отсюда в силу свойств обратимых блочных матриц следует, что в $\big(\, \partial\widetilde{g}/\partial x^{[k-1]} \quad \partial\widetilde{g}/\partial x_1^{[k]} \,\big)$ найдется обратимая в нуле подматрица порядка n такая, что соответствующая неявная функция, обращающая (2.26) в тождество, будет иметь вид

$$x_2^{[k-1]} = \varphi_0\big(k, x_1^{[k-1]}\big), \tag{2.27}$$

$$x_1^{[k]} = f_2\big(k, x_1^{[k-1]}\big). \tag{2.28}$$

Таким образом, построена неявная функция (2.22)–(2.24), (2.27), (2.28), удовлетворяющая системе (2.21), (2.25) или, что то же, (2.11), (2.18).

Известно, что неявные функции, отвечающие одной и той же системе уравнений, совпадают на пересечении областей определения. По этой причине в результате подстановки выражений (2.20) и (2.28) соответственно в равенства (2.14) и (2.22)–(2.24) из представлений (2.14), (2.16), (2.17), (2.20) и (2.22)–(2.24), (2.27), (2.28) получим одинаковые неявные функции. Это, в частности, означает, что в соответствующей окрестности нуля функции $f_1\big(k, x_1^{[k-1]}\big)$ и $\varphi_0\big(k, x_1^{[k-1]}\big)$ из (2.16) и (2.27) совпадают, а функции (2.22), (2.28) при подстановке обращают в тождество уравнение (2.17).

По построению функции (2.16), (2.17) удовлетворяют уравнению (2.25), поэтому это уравнение обращают в тождество и функции (2.16), (2.22), (2.28).

В сделанных предположениях функции $f_i\big(k, x_1^{[k-1]}\big)$ $(i = 1, 2)$ из (2.16), (2.28) обладают свойствами (2.9) и (2.10).

Полагая в (2.16), (2.28) $k = 1, 2, \dots$, можно получить систему (2.6), (2.7).

Из изложенного выше следует, что если существует решение системы (1.1), достаточно близкое к нулю, то оно удовлетворяет уравнениям (2.6), (2.7). С другой стороны, система (2.6), (2.7) в том случае, когда вектор $x_1^{[0]} \neq 0$ достаточно мал по норме, будет иметь нетривиальное решение, которое располагается в достаточно малой окрестности нулевого решения. Это решение будет обращать в тождество и все уравнения (1.1). □

Замечание 1. В предположениях теоремы 1 матрица перестановок Q из (2.8) находится следующим образом. Допустим, что обратимая подматрица $\mathscr{M}_r(k,0)$, фигурирующая в условии 2 теоремы, найдена. Рассмотрим матрицу $\mathscr{B}_r(k,0,0)$ (см. (2.1)), представляющую собой первые n столбцов матрицы $\mathscr{D}_r(k,0)$. Объединим все ее столбцы, входящие в $\mathscr{M}_r(k,0)$, в блок $\mathscr{B}_{r,2}(k,0,0)$, а столбцы, которые не входят в $\mathscr{M}_r(k,0)$, — в блок $\mathscr{B}_{r,1}(k,0,0)$. Тогда Q будет матрицей, которая переставляет столбцы матрицы $\mathscr{B}_r(k,0,0)$ так, что

$$\mathscr{B}_r(k,0,0)Q = \left(\mathscr{B}_{r,1}(k,0,0) \quad \mathscr{B}_{r,2}(k,0,0) \right).$$

Поставим для (1.1) задачу Коши

$$x^{[0]} = a, \tag{2.29}$$

где $a \in \mathbf{R}^n$ — заданный вектор.

Разобьем вектор a на подвекторы: $a = Q\operatorname{col}(a_1, a_2)$, где Q — матрица перестановок из (2.8), $a_1 \in \mathbf{R}^{n-d}$, $a_2 \in \mathbf{R}^d$.

Следствие 1. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1 *и величина* $\|a_1\| \neq 0$ *достаточно близка к нулю. Задача* (1.1), (2.29) *имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$a_2 = f_1(1, a_1), \tag{2.30}$$

где $f_1\big(k, x_1^{[k-1]}\big)$ *— функция из* (2.6).

Справедливость следствия вытекает непосредственно из доказательства теоремы 1. Условие (2.30) получается из (2.6) при $k = 1$.

Определение 1. Соотношение (2.30) будем называть *условием согласования* начальных данных (2.29) с системой (1.1). Начальные условия (2.29), удовлетворяющие условию (2.30), называются *согласованными с системой* (1.1).

3. Система линейного приближения

Введем обозначения

$$A(k) = \frac{\partial g}{\partial x^{[k]}}(k,0,0), \quad B(k) = \frac{\partial g}{\partial x^{[k-1]}}(k,0,0).$$

Линеаризуем уравнение (1.1) по переменным $x^{[k-1]}$ и $x^{[k]}$ в окрестности точки $(x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0$:

$$A(k)x^{[k]} + B(k)x^{[k-1]} + h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0. \tag{3.1}$$

Тогда система линейного приближения будет иметь вид

$$A(k)x^{[k]} + B(k)x^{[k-1]} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{3.2}$$

где в силу предположения (1.3) $\det A(k) \equiv 0$. Из свойства (1.2) следует

$$h(k,0,0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

В предположениях теоремы 1 исследуем внутреннюю структуру системы (3.2). Обозначим через $\mathbf{d}$ оператор «сдвига»

$$\mathbf{d}[f^{[k]}] = f^{[k+1]}, \quad k \in \mathbf{N},$$

так что

$$\mathbf{d}^j[f^{[k]}] = f^{[k+j]}, \quad k \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Лемма 1. *Пусть*

$$\operatorname{rank}\Lambda_r(k,0,\dots,0)=\lambda=\mathrm{const}\quad \forall k\in\mathbf{N} \tag{3.3}$$

и выполнено предположение 2 *теоремы* 1. *Тогда существует линейный оператор*

$$\mathscr{R}=R_0(k)+R_1(k)\mathbf{d}+\dots R_r(k)\mathbf{d}^r \tag{3.4}$$

такой, что

$$\mathscr{R}[A(k)x^{[k]}+B(k)x^{[k-1]}]=\begin{pmatrix} O & O\\ E_{n-d} & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{[k]}\\ x_2^{[k]}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} J_1(k) & E_d\\ J_2(k) & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{[k-1]}\\ x_2^{[k-1]}\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где $J_1(k)$, $J_2(k)$ — *некоторые матрицы соответствующих размеров, векторы* $x_1^{[k]}$ *и* $x_2^{[k]}$ *определены в* (2.8).

При этом $(n\times n)$*-матрицы* $R_j(k)$ *находятся по формуле*

$$\begin{pmatrix} R_0(k) & R_1(k) & \dots & R_r(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O\end{pmatrix}\mathscr{M}_r^{-1}(k,0). \tag{3.6}$$

Доказательство. Систему

$$\mathscr{D}_r(k,0)\operatorname{col}(x^{[k-1]},\,x^{[k]},\,\dots,\,x^{[k+r]})=0 \tag{3.7}$$

умножим слева на матрицу $\mathscr{M}_r^{-1}(k,0)$ и осуществим замену переменных (2.8), (2.15). Из доказательства теоремы 1 следует, что

$$\mathscr{M}_r^{-1}(k,0)\mathscr{D}_r(k,0)\operatorname{diag}\{Q,Q,Q_r\}=\begin{pmatrix} J_1(k) & E_d & O & O & O & O\\ J_2(k) & O & E_{n-d} & O & O & O\\ J_3(k) & O & O & E_d & O & O\\ J_4(k) & O & O & O & E_\lambda & \Psi(k)\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

где $J_j(k)$ $(j=\overline{1,4})$ и $\Psi(k)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров.

Действие оператора $\mathscr{R}$ (3.4) на систему (3.2) равносильно умножению (3.7) слева на матрицу $(R_0(k)\ R_1(k)\ \dots\ R_r(k))$. Будем вычислять коэффициенты оператора $\mathscr{R}$ по формуле (3.6). Тогда с учетом (2.8) из (3.8) вытекает тождество (3.5). □

Замечание 2. Условие (3.3) выполнено, если имеет место предположение 1 теоремы 1.

Теорема 2. *Допустим, что справедливо тождество* (3.3) *и выполнены предположения* 2 *и* 3 *теоремы* 1. *Тогда оператор* $\mathscr{R}$ *имеет левый обратный оператор*

$$\mathscr{L}=L_0(k)+L_1(k)\mathbf{d}, \tag{3.9}$$

где $L_0(k)$, $L_1(k)$ — *некоторые* $(n\times n)$*-матрицы.*

Доказательство. Коэффициенты операторов (3.4) и (3.9) должны удовлетворять тождеству

$$\begin{pmatrix} L_0(k) & L_1(k)\end{pmatrix}\overline{\mathscr{R}}_r(k)=\begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O\end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где

$$\overline{\mathscr{R}}_r(k)=\begin{pmatrix} R_0(k) & R_1(k) & \dots & R_r(k) & O\\ O & R_0(k+1) & \dots & R_{r-1}(k+1) & R_r(k+1)\end{pmatrix}.$$

Теорема справедлива, если алгебраическая система (3.10) имеет решение $L_0(k)$, $L_1(k)$ при всех $k\in\mathbf{N}$. Покажем это.

Согласно предположениям 2 и 3 теоремы 1

$$\overline{\mathscr{R}}_r(k)\mathscr{M}_{r+1}(k,0) = \left(\begin{array}{c|cc||cc} E_d & O & O & O & O \\ O & E_{n-d} & O & O & O \\ \hline O & J_1(k+1) & E_d & O & O \\ O & J_2(k+1) & O & E_{n-d} & O \end{array}\right), \tag{3.11}$$

где $\mathrm{col}(J_1(k+1),\ J_2(k+1)) = R_0(k+1)B_1(k+1)$,

$$B(k)Q = (\, B_1(k) \quad B_2(k)\,), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{3.12}$$

матрицы $B_2(k)$ и $B_1(k)$ состоят из d и $n-d$ столбцов соответственно. При этом блок $\mathrm{col}(B_2(k), O, \dots, O)$ входит, а блок $\mathrm{col}(B_1(k), O, \dots, O)$ не входит в матрицу $\mathscr{M}_r(k,0)$.

Из (3.11) вытекает представление

$$\overline{\mathscr{R}}_r(k) = (\, \mathscr{E}(k) \quad O\,)\, \mathscr{M}^{-1}_{r+1}(k), \tag{3.13}$$

$$\mathscr{E}(k) = \left(\begin{array}{c|cc|c} E_d & O & O & O \\ O & E_{n-d} & O & O \\ \hline O & J_1(k+1) & E_d & O \\ O & J_2(k+1) & O & E_{n-d} \end{array}\right). \tag{3.14}$$

Результатом подстановки (3.13) в (3.10) и последующего умножения обеих частей полученного уравнения справа на $\mathscr{M}_{r+1}(k,0)$ будет равенство

$$(\, L_1(k) \quad L_2(k)\,)\,(\, \mathscr{E}(k) \quad O\,) = (\, E_n \quad O \quad \dots \quad O\,)\, \mathscr{M}_{r+1}(k). \tag{3.15}$$

Принимая во внимание (3.12), нетрудно убедиться, что по построению правая часть уравнения (3.15) представляет собой матрицу $(\, B_2(k) \quad A(k)Q \quad O\,)$. Учитывая вид (3.14) матрицы $\mathscr{E}(k)$, легко видеть, что необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.15)

$$\mathrm{rank}\left(\begin{array}{c|c} \mathscr{E}(k) & O \\ \hline (\, B_2(k) \quad A(k)Q \quad O\,) & O \end{array}\right) = 2n$$

при каждом $k \in \mathbf{N}$ выполняется.

Из (3.15) можно найти коэффициенты оператора (3.9) по формуле

$$(\, L_0(k) \quad L_1(k)\,) = (\, B_2(k) \quad A(k)Q \quad O\,)\, \mathscr{E}^{-1}(k). \quad \square$$

Отметим, что из (3.10), в частности, вытекают соотношения

$$L_0(k)R_0(t) = E_n, \quad L_0(k)R_1(k) + L_1(k)R_0(k) = O,$$

откуда

$$L_0(k) = R_0(k)^{-1}, \quad L_1(k) = -R_0(k)^{-1}R_1(k)R_0(k)^{-1}.$$

Существование операторов $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ гарантирует, что любое решение системы (3.1) будет решением системы

$$x_2^{[k-1]} + J_1(k)x_1^{[k-1]} + h_1(k, \overline{x}_{k,r}) = 0, \tag{3.16}$$

$$x_1^{[k]} + J_2(k)x_1^{[k-1]} + h_2(k, \overline{x}_{k,r}) = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{3.17}$$

и наоборот. Здесь $\overline{x}_{k,r}$ определено в (2.5),

$$\mathrm{col}(J_1(k), J_2(k)) = R_0(k)B_1(k),$$

$$\begin{pmatrix} h_1(k,\overline{x}_{k,r}) \\ h_2(k,\overline{x}_{k,r}) \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{r} R_j(k) h(k+j, x^{[k+j-1]}, x^{[k+j]}),$$

$x_1^{[k]} \in \mathbf{R}^{n-d}$, $h_2(k,\overline{x}_{k,r}) \in \mathbf{R}^{n-d}$, $x_2^{[k]} \in \mathbf{R}^{d}$, $h_1(k,\overline{x}_{k,r}) \in \mathbf{R}^{d}$.

В свою очередь, система

$$x_2^{[k-1]} + J_1(k) x_1^{[k-1]} = 0, \tag{3.18}$$

$$x_1^{[k]} + J_2(k) x_1^{[k-1]} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{3.19}$$

эквивалентна в смысле решений системе (3.2). Строго говоря, решения систем (3.1) и (3.16), (3.17), а также (3.2) и (3.18), (3.19), связаны матрицей перестановок строк Q (см. (2.8)).

При $k = 1$ из (3.18) получаем условие согласования начальных данных для системы (3.2)

$$x_2^{[0]} + J_1(1) x_1^{[0]} = 0.$$

Для выделения единственного решения достаточно задать $x_1^{[0]} = a$, где $a \in \mathbf{R}^{n-d}$.

4. Приводимые системы

Напомним, квадратная матрица $V(k)$ является *матрицей Ляпунова* тогда и только тогда, когда она ограничена и ее определитель отделен от нуля, т. е. $|\det V(k)| \geq \delta = \mathrm{const} > 0$.

Определение 2. Будем говорить, что система (3.2) *приводима*, если существуют оператор (3.4), обладающий левым обратным оператором, и матрица Ляпунова $U(k)$ такие, что действие оператора $\mathscr{R}$ и замена переменной

$$x^{[k]} = U(k)\,\mathrm{col}\big(\xi_1^{[k]}, \xi_2^{[k]}\big)$$

преобразует систему (3.2) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{[k]} \\ \xi_2^{[k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & E_d \\ H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{[k-1]} \\ \xi_2^{[k-1]} \end{pmatrix} = 0, \tag{4.1}$$

где H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$-матрица.

Применительно к невырожденным системам вида $x^{[k]} + B(k) x^{[k-1]} = 0$ это определение переходит в определение приводимости относительно группы Ляпунова [22, гл. 2, § 6, 7], поскольку в этом случае $\mathscr{R} = E_n$, $d = 0$.

Лемма 2. *Для того чтобы система*

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k]} \\ x_2^{[k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(k) & E_d \\ J_2(k) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k-1]} \\ x_2^{[k-1]} \end{pmatrix} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{4.2}$$

была приводимой, необходимо и достаточно, чтобы

(1) *некоторая фундаментальная матрица решений $X_1(k,\varkappa)$ подсистемы*

$$x_1^{[k]} + J_2(k) x_1^{[k-1]} = 0 \tag{4.3}$$

была представима в виде

$$X_1(k,\varkappa) = V(k)(-H)^{k-\varkappa} V^{-1}(\varkappa), \quad k \geq \varkappa \geq 0, \tag{4.4}$$

где $V(k)$ — матрица Ляпунова, H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$-матрица;

(2) *матрица* $J_1(k+1)V(k)$ *была ограниченной:*

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} \|J_1(k+1)V(k)\| < \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. Достаточность. Условие (4.4) обеспечивает приводимость системы (4.3) [22, гл. 2, § 6, теорема 6.1]. В этом случае найдется матрица Ляпунова $V(k)$ такая, что замена переменных

$$\begin{pmatrix} x_1^{[k]} \\ x_2^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(k) & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{[k]} \\ y_2^{[k]} \end{pmatrix}$$

и умножение второго уравнения слева на $V^{-1}(k)$ преобразует (4.2) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{[k]} \\ y_2^{[k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(k)V(k-1) & E_d \\ H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{[k-1]} \\ y_2^{[k-1]} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.6}$$

Последующая замена переменных

$$\begin{pmatrix} y_1^{[k]} \\ y_2^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ -J_1(k+1)V(k) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{[k]} \\ \xi_2^{[k]} \end{pmatrix}$$

переводит (4.6) в систему вида (4.1). Таким образом, (4.1) получается из (4.2) в результате действия оператора $\mathscr{R} = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & V^{-1}(k) \end{pmatrix}$ и подстановки

$$\operatorname{col}\big(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}\big) = U(k) \operatorname{col}\big(\xi_1^{[k]}, \xi_2^{[k]}\big), \tag{4.7}$$

где

$$U(k) = \begin{pmatrix} V(k) & O \\ -J_1(k+1)V(k) & E_d \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

В силу предположения (4.5) $U(k)$ будет матрицей Ляпунова. Согласно определению 2 это означает, что система (4.2) приводима.

Необходимость. Пусть система (4.2) приводима. Из структуры этой системы следует, что ее подсистема (4.3) также должна быть приводима. В этом случае выполняется предположение 1 леммы [22, гл. 2, § 6, теорема 6.1].

Приводимость системы (4.2) означает, что существует матрица Ляпунова

$$U(t) = \begin{pmatrix} V(k) & O \\ V_1(k) & V_2(k) \end{pmatrix}$$

($V(k)$ из условия (4.4)) такая, что замена переменных

$$\operatorname{col}\big(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}\big) = U(t) \operatorname{col}\big(\xi_1^{[k]}, \xi_2^{[k]}\big)$$

преобразует (4.2) к виду (4.1). Следовательно, матрицы $V_1(k)$ и $V_2(k)$ должны удовлетворять равенствам

$$V_1(k) = -J_1(k+1)V(k), \quad V_2(k) = E_d.$$

В свою очередь, $U(k)$ как матрица Ляпунова должна быть ограниченной, поэтому ограничен будет и ее блок $J_1(k+1)V(k)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть для системы* (3.2) *выполнены все предположения теоремы* 2. *Система* (3.2) *приводима тогда и только тогда, когда существует матрица Ляпунова* $V(t)$ *размера* $(n-d)\times(n-d)$ *такая, что*

(a) *выполнено условие* (4.5), *в котором* $J_1(k)$ — *это* $d\times(n-d)$*-матрица из* (4.2);

(b) *одна из фундаментальных матриц системы* (3.2) *представима в виде*

$$X(k,\varkappa) = QU(k)\begin{pmatrix} (-H)^{k-\varkappa} & O \\ O & O\end{pmatrix}U^{-1}(\varkappa)Q^{-1}, \quad k\ge\varkappa\ge 0, \tag{4.9}$$

где $U(k)$ *имеет вид* (4.8), Q — *матрица перестановок из* (2.8), H — *квадратная постоянная матрица порядка* $n-d$.

Доказательство. Согласно теореме 2 существует оператор $\mathscr{R}$ (3.4), преобразующий систему (3.2) к виду (4.2). Обозначим через $X(k,\varkappa)$ и $\widetilde{X}(k,\varkappa)$ фундаментальные матрицы решений систем (3.2) и (4.2) соответственно. Поскольку оператор $\mathscr{R}$ обладает левым обратным оператором, решения этих систем связаны матрицей перестановок строк Q из (2.8): $x^{[k]} = Q\operatorname{col}\bigl(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}\bigr)$. При этом $X(k,\varkappa) = Q\widetilde{X}(k,\varkappa)Q^{-1}$.

Необходимость. Пусть система (3.2) приводима. Очевидно, что в этом случае приводимой будет и система (4.2). Следовательно, выполнены предположения 1 и 2 леммы 2. Из доказательства леммы следует, что одна из фундаментальных матриц решений системы (4.2) имеет вид

$$\widetilde{X}(k,\varkappa) = U(k)\begin{pmatrix} (-H)^{k-\varkappa} & O \\ O & O\end{pmatrix}U^{-1}(\varkappa), \quad k\ge\varkappa\ge 0. \tag{4.10}$$

Отсюда очевидным образом вытекает представление (4.9).

Достаточность. Допустим, что найдется матрица Ляпунова $V(t)$ такая, что выполнены предположения (a) и (b) теоремы. Заметим, что в этом случае $U(k)$ из (4.8) также будет матрицей Ляпунова.

Из (4.9) следует соотношение (4.10). С другой стороны, матрицу $\widetilde{X}(k,\varkappa)$ можно найти непосредственно из системы (4.2):

$$\widetilde{X}(k,\varkappa) = \begin{pmatrix} X_1(k,\varkappa) & O \\ -J_1(k+1)X_1(k,\varkappa) & O\end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

где $X_1(k,\varkappa)$ — некоторая фундаментальная матрица решений подсистемы (4.3). Приравнивая правые части равенств (4.10) и (4.11), в частности, получим представление (4.4), которое означает приводимость системы (4.3).

Осуществив в (4.2) замену переменных (4.7), получим уравнение (4.1). Таким образом, система (4.2) приводима. Следовательно, приводима и система (3.2). $\square$

5. Правильные системы

Множество всех характеристических показателей ненулевых решений дескрипторной системы (3.2) будем называть ее *спектром*.

Определение 3. Система (3.2) называется *правильной*, если выполняются условия:

(1) существует оператор $\mathscr{R}$ (3.4), имеющий левый обратный оператор и обладающий свойством (3.5);

(2) спектр системы (3.2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\eta$ $(\eta \le n)$ состоит из конечных чисел и сумма $S = \sum\limits_{j=1}^{\eta} \alpha_j$ совпадает с величиной

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=\varkappa}^{k-1} \ln|\det \mathscr{R}[B(j)]|, \tag{5.1}$$

где $1 \le \varkappa < k$, $\mathscr{R}[B(j)] = R_0(j)B(j) + R_1(j)B(j+1) + \ldots + R_r(j)B(j+r)$.

Отметим, что в невырожденном случае это определение переходит в определение правильной дискретной системы, приведенное в [22, гл. 1, § 4].

Лемма 3. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 2 *и в системе* (4.2)

(1) *матрица* $J_2(k)$ *обратима и* $\left\|J_2^{\pm 1}(k)\right\| \le c = \mathrm{const}$ *при всех* $k \in \mathbf{N}$*;*

(2) *матрица* $J_1(k)$ *имеет строгий характеристический показатель равный нулю, т. е.*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln\|J_1(k)\| = 0.$$

Тогда для числа элементов спектра системы (3.2) *справедливо неравенство* $\eta \le n - d$. *Кроме того, спектры систем* (3.2), (4.2), (4.3) *совпадают и состоят из конечных чисел.*

Доказательство. Из предположения 1 леммы следует, что спектр системы (4.3) состоит из не более чем $n - d$ различных элементов [22, гл. 1, § 3, теорема 3.2].

В (4.2) $x_2^{[k]} = -J_1(k)x_1^{[k]}$ $(k = 0, 1, \dots)$, поэтому условие 2 гарантирует, что спектр системы (4.2) совпадает со спектром ее подсистемы (4.3). Идентичность спектров систем (3.2) и (4.2) вытекает из того факта, что решения систем (3.2) и (4.2) связаны матрицей перестановок.

Из предположения 1 леммы 3 следует, что спектр системы (4.3) состоит из конечных чисел [22, гл. 1, § 3, теорема 3.1]. По доказанному выше тем же свойством обладают и спектры систем (3.2) и (4.2). □

Теорема 4. *В предположениях леммы* 3 *система* (3.2) *правильная тогда и только тогда, когда*

(1) *существует* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum\limits_{j=\varkappa}^{k-1} \ln|\det J_2(j)| = \sigma$*;*

(2) *сумма характеристических показателей системы* (4.3) $\widetilde{S} = \sigma$.

Доказательство. Известно [22, гл. 1, § 4], что система (4.3) правильна тогда и только тогда, когда выполняются предположения (1) и (2) теоремы.

Поскольку $\mathscr{R}[B(k)] = \begin{pmatrix} J_1(k) & E_d \\ J_2(k) & O \end{pmatrix} Q^{-1}$, имеем

$$|\det \mathscr{R}[B(k)]| = \frac{|\det J_2(k)|}{|\det Q|} = |\det J_2(k)|,$$

где Q — матрица перестановок из (2.8). В силу последнего обстоятельства из предположений (1) и (2) вытекает существование предела (5.1), значение которого совпадает с величиной $\widetilde{S}$. Согласно лемме 3 спектры систем (3.2) и (4.3) совпадают, следовательно, $S = \widetilde{S}$. По определению 3 это равносильно правильности системы (3.2). □

Следствие 2. *Пусть выполнены все предположения леммы* 3. *Если система* (3.2) *правильна, то*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln\bigl\|J_2^{\pm1}(k)\bigr\| = 0. \tag{5.2}$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 4 следует, что в предположениях леммы 3 система (3.2) правильная тогда и только тогда, когда правильна подсистема (4.3). Известно [22, гл. 1, § 3, теорема 3.2], что для правильной системы (4.3) выполняется соотношение (5.2). Таким образом, условие (5.2) необходимо для правильности системы (3.2). □

Теорема 5. *Пусть выполнены все предположения леммы 3. Для того чтобы система* (3.2) *была правильной, необходимо и достаточно, чтобы она была приводима с матрицей*

$$U(k) = Q\begin{pmatrix} V(k) & O \\ -J_1(k+1)V(k) & E_d \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

где $V(k)$ — *обратимая для всех* $k\in\mathbf{N}$ *матрица порядка* $n-d$ *такая, что*

$$\chi[V^{\pm1}(k)] = 0, \tag{5.4}$$

где $\chi[V^{\pm1}(k)] = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\frac{1}{k}\ln\|V^{\pm1}(k)\|$ — *характеристический показатель матрицы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (3.2) правильная. По доказанному выше это возможно тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает система (4.3). В сделанных предположениях (4.3) правильна в том и только том случае, когда она приводима с обратимой матрицей $V(k)$, удовлетворяющей условию (5.4) [22, гл. 2, § 9, теорема 9.1].

С учетом свойства приводимости подсистемы (4.3) нетрудно убедиться, что в результате действия на (3.2) оператора $\mathscr{R}$ (3.4) и замены переменных $x^{[k]} = U(k)\operatorname{col}\bigl(\xi_1^{[k]},\xi_2^{[k]}\bigr)$, получим систему (4.1). Другими словами, система (3.2) приводима с матрицей (5.3).

Достаточность. Из приводимости системы (3.2) с матрицей (5.3) следует приводимость системы (4.3) с обратимой на $\mathbf{N}$ матрицей $V(k)$, обладающей свойством (5.4). Тогда в предположениях теоремы система (4.3) правильная [22, гл. 2, § 9, теорема 9.1]. По теореме 4 тем же свойством будет обладать и система (3.2). □

6. Устойчивость по линейному приближению

Из доказательства теоремы 1 следует, что в достаточно малой окрестности тривиального решения системы (1.1) и (2.6), (2.7) имеют одно и то же множество решений. Линеаризуем уравнения (2.6), (2.7) в окрестности точки $x_1^{[k-1]} = 0$:

$$x_2^{[k-1]} = G_1(k)x_1^{[k-1]} - \rho_1\bigl(k, x_1^{[k-1]}\bigr), \tag{6.1}$$

$$x_1^{[k]} = G_2(k)x_1^{[k-1]} - \rho_2\bigl(k, x_1^{[k-1]}\bigr), \tag{6.2}$$

где

$$G_1(k) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0), \quad G_2(k) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0). \tag{6.3}$$

Тогда система первого приближения для (2.6), (2.7) будет иметь вид

$$x_2^{[k-1]} = G_1(k)x_1^{[k-1]}, \tag{6.4}$$

$$x_1^{[k]} = G_2(k)x_1^{[k-1]}, \quad k\in\mathbf{N}. \tag{6.5}$$

Лемма 4. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1. *Тогда системы* (3.18), (3.19) *и* (6.4), (6.5) *совпадают, а функции* $\rho_i\big(k,x_1^{[k-1]}\big)$, $i=1,2$, *получаются из* $h_i(k,\overline{x}_{k,r})$ (*см.* (3.16), (3.17)) *подстановкой неявной функции* (2.14), (2.16), (2.17).

Доказательство. Запишем систему (2.11) в виде

$$\mathscr{F}_r(k,\overline{x}_{k,r})=0, \tag{6.6}$$

где $\mathscr{F}_r(k,\overline{x}_{k,r})=\mathrm{col}(g(k,x^{[k-1]},x^{[k]}),\dots,g(k+r,x^{[k+r-1]},x^{[k+r]}))$.

Предположение 1 теоремы 1 гарантирует выполнение условия (3.3). В этом случае справедливо тождество (3.8), из которого следует, что

$$\begin{pmatrix} J_1(k) & O\\ J_2(k) & O\\ J_3(j) & O\\ J_4(k) & \Psi(k)\end{pmatrix}=\mathscr{M}_r^{-1}(k,0)\left(\tfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0)\quad \tfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial z_2^{[k]}}(k,0)\right). \tag{6.7}$$

В процессе доказательства теоремы 1 было показано, что системе (6.6) удовлетворяет неявная функция (2.14), (2.16), (2.17). При этом часть компонент функции (2.17) имеет вид (2.28). Обозначим оставшиеся компоненты этой функции через

$$x_2^{[k]}=f_3\big(k,x_1^{[k-1]}\big). \tag{6.8}$$

По теореме о производной неявной функции производные функции (2.14), (2.16), (2.28), (6.8) удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0) & O\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0) & O\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0) & O\\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2^{[k]}}(k,0)\end{pmatrix}=-\mathscr{M}_r^{-1}(k,0)\left(\tfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0)\quad \tfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial z_2^{[k]}}(k,0)\right). \tag{6.9}$$

Из (6.7) и (6.9) с учетом (6.3) вытекают равенства

$$J_1(k)=-G_1(k),\quad J_2(k)=-G_2(k), \tag{6.10}$$

$$J_3(k)=-\frac{\partial f_3}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0),\quad J_4(k)=-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k,0),\quad \Psi(k)=-\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2^{[k]}}(k,0),\quad k\in\mathbf{N}. \tag{6.11}$$

Тождества (6.10) гарантируют совпадение систем первого приближения (3.18), (3.19) и (6.4), (6.5).

Линеаризуем уравнения (2.14), (2.16), (2.28), (6.8). Принимая во внимание равенства (6.10), (6.11), получим систему

$$\begin{aligned} x_2^{[k-1]}+J_1(k)x_1^{[k-1]}+\rho_1\big(k,x_1^{[k-1]}\big)&=0,\\ x_1^{[k]}+J_2(k)x_1^{[k-1]}+\rho_2\big(k,x_1^{[k-1]}\big)&=0,\\ x_2^{[k]}+J_3(k)x_1^{[k-1]}+\rho_3\big(k,x_1^{[k-1]}\big)&=0,\\ z_1^{[k]}+J_4(k)x_1^{[k-1]}+\Psi(k)z_2^{[k]}+\rho_4\big(k,x_1^{[k-1]},z_1^{[k]}\big)&=0.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Линеаризация системы (6.6) приводит к уравнениям (3.1) при $k=\overline{1,r}$. Осуществим в полученной системе замену переменных (2.8), (2.15) и умножим ее слева на $\mathscr{M}_r^{-1}(k,0)$. В силу (3.8) получим уравнения

$$\begin{pmatrix} x_2^{[k-1]} + J_1(k)x_1^{[k-1]} \\ x_1^{[k]} + J_2(k)x_1^{[k-1]} \\ x_2^{[k]} + J_3(k)x_1^{[k-1]} \\ z_1^{[k]} + J_4(k)x_1^{[k-1]} + \Psi(k)z_2^{[k]} \end{pmatrix} + \mathscr{M}_r^{-1}(k,0) \begin{pmatrix} h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) \\ \dots \\ h(k+r, x^{[k+r-1]}, x^{[k+r]}) \end{pmatrix} = 0. \tag{6.13}$$

По построению подстановка функций (6.12) в систему (6.13) обращает последнюю в тождество в соответствующей окрестности нуля. Ввиду последнего обстоятельства $\rho_1\big(k, x_1^{[k-1]}\big)$ и $\rho_2\big(k, x_1^{[k-1]}\big)$ из (6.12) получаются подстановкой в

$$\begin{pmatrix} h_1(k, \overline{x}_{k,r}) \\ h_2(k, \overline{x}_{k,r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \end{pmatrix} \mathscr{M}_r^{-1}(k,0) \begin{pmatrix} h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) \\ \dots \\ h(k+r, x^{[k+r-1]}, x^{[k+r]}) \end{pmatrix}$$

неявной функции (2.14), (2.16), (2.28), (6.8) (или, что то же, (2.14), (2.16), (2.17)). $\square$

Замечание 3. Лемма остается справедливой, если в функции $h_i(k, \overline{x}_{k,r})$ $(i = 1, 2)$ предварительно подставить выражения для $x_2^{[k-1]}$, $x_1^{[k]}$, $x_2^{[k]}$ и $z_1^{[k]}$, найденные из уравнений (6.13).

Докажем теоремы об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1). Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и т. п. для вырожденных систем формулируются аналогично определениям для невырожденного случая [22, гл. 1, § 2, гл. 2, § 11] за исключением того, что все начальные данные предполагаются согласованными.

Теорема 6. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1. *Кроме того:*
1) *система* (3.19) *приводима* [22, гл. 2, § 7] *и асимптотически устойчива;*
2) *в системе* (3.16), (3.17)

$$\chi[J_1(k)] \le 0, \tag{6.14}$$

$$\frac{\lim\limits_{\|x_2^{[k-1]}\|\to 0,\ \|x^{[j]}\|\to 0\ (j=\overline{k,k+r})} \|h_2(k, \overline{x}_{k,r})\|}{\big\|x_1^{[k-1]}\big\|} \to 0 \tag{6.15}$$

при $\|\overline{x}_{k,r}\| \to 0$ *равномерно по* k*; в некоторой окрестности нуля выполняется условие*

$$\lim_{\|x_2^{[k-1]}\|\to 0,\ \|x^{[j]}\|\to 0\ (j=\overline{k,k+r})} \|h_1(k, \overline{x}_{k,2})\| \le \mu(k)\big\|x_1^{[k-1]}\big\|^m, \tag{6.16}$$

где $m = \mathrm{const} > 1$, $\chi[\mu(k)] \le 0$.

Тогда тривиальное решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Известно [22, гл. 2, § 11, п. 2], что тривиальное решение системы (6.2) асимптотически устойчиво, если выполнены следующие условия:

(a) система первого приближения (6.5) приводима и асимптотически устойчива;

(b) $\frac{\|\rho_2(k, x_1^{[k-1]})\|}{\|x_1^{[k-1]}\|} \to 0$ при $\big\|x_1^{[k-1]}\big\| \to 0$ равномерно по k.

По лемме 4 системы (3.19) и (6.5) совпадают, поэтому условие (a) вытекает из предположения 1 теоремы.

Рассмотрим соотношение (6.15). Подставив в $h_2(k, \overline{x}_{k,r})$ неявную функцию (2.14), (2.16), (2.17), согласно лемме 4 из (6.15) получим условие (b). Таким образом, предположения 1 и (6.15) теоремы обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (6.2).

Обратимся к уравнению (6.1). Поскольку в силу леммы 4 $G_1(k) \equiv -J_1(k)$, из (6.14) следует неравенство

$$\chi[G_1(k)] \leq 0. \tag{6.17}$$

В результате подстановки в $h_1(k, \overline{x}_{k,r})$ функций (2.14), (2.16), (2.17) из (6.16) получим условие

$$\big\|\rho_1\big(k, x_1^{[k-1]}\big)\big\| \leq \mu(k)\big\|x_1^{[k-1]}\big\|^m, \tag{6.18}$$

где $\mu(k)$ и m такие же, как в (6.16). В случае, когда $\big\|x_1^{[k]}\big\| \to 0$ при $k \to \infty$, неравенства (6.17) и (6.18) гарантируют, что в (6.1) $\big\|x_2^{[k]}\big\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Из изложенного выше следует, что в условиях теоремы тривиальное решение системы (6.1), (6.2) асимптотически устойчиво.

В свою очередь, согласно теореме 1 тривиальные решения систем (1.1) и (2.6), (2.7) асимптотически устойчивы одновременно. По построению устойчивость нулевого решения системы (2.6), (2.7) следует из устойчивости тривиального решения системы (6.1), (6.2). Теорема доказана. □

Теорема 7. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1*, а также условия* 1 *и* 2 *леммы* 3*. Кроме того:*

1) *система* (3.19) *правильная* [22, гл. 1, § 4] *и все ее характеристические показатели* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-d}$ *отрицательны;*

2) *для системы* (3.16), (3.17) *справедливо соотношение* (6.16) *и в некоторой окрестности нуля имеет место оценка*

$$\overline{\lim_{\|x_2^{[k-1]}\|\to 0,\ \|x^{[j]}\|\to 0\ (j=\overline{k,k+r})}} \|h_2(k, \overline{x}_{k,2})\| \leq \widetilde{\mu}(k)\big\|x_1^{[k-1]}\big\|^{\widetilde{m}}, \tag{6.19}$$

где $\widetilde{m} = \mathrm{const} > 1$, $\chi[\widetilde{\mu}(k)] \leq 0$.

Тогда тривиальное решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Согласно лемме 4 из предположения 1 теоремы следует, что система (6.5) правильная и все ее характеристические показатели отрицательны. Если в $h_2(k, \overline{x}_{k,2})$ из соотношения (6.19) подставить функции (2.14), (2.16), (2.17), то получим условие

$$\big|\rho_2\big(k, x_1^{[k-1]}\big)\big\| \leq \widetilde{\mu}(k)\big\|x_1^{[k-1]}\big\|^{\widetilde{m}},$$

в котором $\widetilde{m}$ и $\chi[\widetilde{\mu}(k)]$ такие же, как в (6.19). В этом случае тривиальное решение системы (6.2) асимптотически устойчиво [22, гл. 2, § 11, теорема 11.2].

На основании леммы 4 и предположения 2 леммы 3 можно заключить, что $\chi[G_1(k)] = 0$. При доказательстве теоремы 6 было показано, что из условия (6.16) следует оценка (6.18). Это означает, что если $\big\|x_1^{[k]}\big\| \to 0$ при $k \to \infty$, то в (6.1) $\big\|x_2^{[k]}\big\| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, тривиальное решение системы (6.1), (6.2) будет асимптотически устойчиво. Доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 6. □

Замечание 4. Теорема останется справедливой, если в условии (6.19) в функцию $h_2(k, \overline{x}_{k,2})$ подставить выражения для $x_2^{[k-1]}$, $x_1^{[k]}$, $x_2^{[k]}$ и $z_1^{[k]}$, найденные из уравнений (6.13). То же самое можно сказать о теореме 6 и ее предположениях (6.15), (6.16). Такая подстановка имеет смысл, если в результате прямой проверки условий возникают неопределенности.

7. Иллюстративный пример

Рассмотрим пример, простота которого обеспечивает легкость проверки выкладок,

$$s(k)x_{(1)}^{[k-1]} + x_{(3)}^{[k-1]} + e^{-k}x_{(1)}^{[k-1]}x_{(2)}^{[k-1]} = 0, \tag{7.1}$$

$$q(k)x_{(1)}^{[k-1]} + \big(1 + x_{(1)}^{[k-1]}\big)x_{(1)}^{[k]} = 0, \tag{7.2}$$

$$x_{(2)}^{[k]} + x_{(3)}^{[k]} + p(k)x_{(2)}^{[k-1]} + 2x_{(2)}^{[k-1]}x_{(3)}^{[k-1]} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{7.3}$$

$s(k)$, $q(k)$, $p(k)$ — вещественнозначные функции, которые будут определены ниже, $x^{[k]} = \operatorname{col}\big(x_{(1)}^{[k]}, x_{(2)}^{[k]}, x_{(3)}^{[k]}\big)$.

Удостоверимся, что для этой системы выполняются все предположения теоремы 1. Выписав матрицу $\mathscr{D}_1(k, \overline{x}_{k,1})$, нетрудно убедиться, что при $r = 1$ выполняется предположение 1 теоремы 1, а именно,

$$\operatorname{rank} \Lambda_1(k, x^{[k]}, x^{[k+1]}) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 + x_{(1)}^{[k]} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

если $x_{(1)}^{[k]}$ удовлетворяет условию малости $\big|x_{(1)}^{[k]}\big| < 1$.

Рассмотрим матрицу $\mathscr{D}_2(k, 0)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
s(k) & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
q(k) & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & p(k) & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & s(k+1) & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & q(k+1) & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & p(k+1) & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & s(k+2) & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & q(k+2) & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & p(k+1) & 0 & 0 & \boxed{1} & 1
\end{array}\right).$$

Очевидно, что в матрице $\mathscr{D}_1(k, 0)$ (она обведена пунктирной линией) имеется обратимая подматрица $\mathscr{M}_1(k, 0)$ шестого порядка. Столбцы этой подматрицы отмечены выделенными рамками единицами, так что условие 2 также выполняется.

В $\mathscr{D}_2(k, 0)$ матрица $\mathscr{M}_2(k, 0)$ 9-го порядка со свойством, сформулированным в условии 3 теоремы, также существует. Она состоит из столбцов, в которых присутствуют обведенные рамками единицы.

Таким образом, все предположения теоремы 1 имеют место при $r = 1$.

Линеаризуем систему (7.1)–(7.3) (ср. (3.1)):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x^{[k]} + \begin{pmatrix} s(k) & 0 & 1 \\ q(k) & 0 & 0 \\ 0 & p(k) & 0 \end{pmatrix} x^{[k-1]} + h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0, \tag{7.4}$$

где $h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = \operatorname{col}\big(e^{-k}x_{(1)}^{[k-1]}x_{(2)}^{[k-1]},\ x_{(1)}^{[k-1]}x_{(1)}^{[k]},\ 2x_{(2)}^{[k-1]}x_{(3)}^{[k-1]}\big)$.

Для системы линейного приближения оператор $\mathscr{R}$ (3.4), (3.5) имеет вид

$$\mathscr{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s(k+1) & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}.$$

Его действие преобразует систему (7.4) к виду (3.16), (3.17), где $d = 1$, $x_2^{[k-1]} = x_{(3)}^{[k-1]}$, $x_1^{[k]} = \operatorname{col}\big(x_{(1)}^{[k]}, x_{(2)}^{[k]})\big)$,

$$J_1(k) = (\, s(k) \quad 0\,), \quad J_2(k) = \begin{pmatrix} q(k) & 0 \\ s(k+1)q(k) & p(k) \end{pmatrix},$$

$$h_1(k, \overline{x}_{k,r}) = e^{-k} x_{(1)}^{[k-1]} x_{(2)}^{[k-1]}, \tag{7.5}$$

$$h_2(k, \overline{x}_{k,r}) = \begin{pmatrix} x_{(1)}^{[k-1]} x_{(1)}^{[k]} \\ 2x_{(2)}^{[k-1]} x_{(3)}^{[k-1]} + s(k+1) x_{(1)}^{[k-1]} x_{(1)}^{[k]} - e^{-(k+1)} x_{(1)}^{[k]} x_{(2)}^{[k]} \end{pmatrix}.$$

Перейдем к проверке предположений теоремы 6. Предварительно уточним вид параметров системы (7.1)–(7.3). Пусть $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность. Положим

$$s(k) = \frac{6}{(2+\cos\phi_k)^2}, \quad q(k) = \frac{2+\cos\phi_{k+1}}{2(2+\cos\phi_k)}, \quad p(k) = \frac{2+\cos\phi_k}{4(2+\cos\phi_{k+1})}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Легко проверить, что система (3.19) будет приводима к виду

$$\xi_1^{[k]} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 1/4 \end{pmatrix} \xi_1^{[k-1]} = 0 \tag{7.6}$$

с помощью матрицы Ляпунова

$$U(k) = \begin{pmatrix} 2+\cos\phi_{k+1} & 0 \\ 0 & 1/(2+\cos\phi_{k+1}) \end{pmatrix}$$

Очевидно, что характеристические показатели системы (7.6) равны $-\ln 2$ и $-\ln 4$ [22, гл. 1, § 2, теорема 2.3], вследствие чего система (7.6) асимптотически устойчива. Поэтому асимптотически устойчива будет и система (3.19). Условие 1 теоремы 6 выполнено.

Ввиду того, что

$$\chi[J_1(k)] = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \|J_1(k)\| = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln |s(k)| = 0,$$

неравенство (6.14) также справедливо.

Прямое вычисление предела (6.15) приводит к неопределенности. По замечанию 4 теорема остается справедливой, если в функцию $h_2(k, \overline{x}_{k,r})$ подставить выражения

$$x_{(3)}^{[k-1]} = -x_{(1)}^{[k-1]}\big(s(k) + e^{-k} x_{(2)}^{[k-1]}\big), \quad x_{(1)}^{[k]} = -x_{(1)}^{[k-1]}\big(q(k) + x_{(1)}^{[k]}\big),$$

$$\begin{aligned} x_{(2)}^{[k]} = -s(k+1)q(k)x_{(1)}^{[k-1]} - p(k)x_{(2)}^{[k-1]} - 2x_{(2)}^{[k-1]} x_{(3)}^{[k-1]} \\ - s(k+1) x_{(1)}^{[k-1]} x_{(1)}^{[k]} + e^{-(k+1)} x_{(1)}^{[k]} x_{(2)}^{[k]}, \end{aligned}$$

найденные из уравнений (6.13). В результате такой подстановки получим функцию $g(k, \overline{x}_{k,r}) = \operatorname{col}(g_1(k, \overline{x}_{k,r}), g_2(k, \overline{x}_{k,r}))$, где

$$g_1(k, \overline{x}_{k,r}) = -\big(x_{(1)}^{[k-1]}\big)^2 \big(q(k) + x_{(1)}^{[k]}\big),$$

$$g_2(k, \overline{x}_{k,r}) = -2x_{(1)}^{[k-1]} x_{(2)}^{[k-1]} \big(s(k) + e^{-k} x_{(2)}^{[k-1]}\big) - s(k+1)\big(x_{(1)}^{[k-1]}\big)^2 \big(q(k) + x_{(1)}^{[k]}\big)$$

$$
\begin{aligned}
- e^{-(k+1)}x^{[k-1]}_{(1)}\big(q(k)+x^{[k]}_{(1)}\big)\big(s(k+1)q(k)x^{[k-1]}_{(1)} + p(k)x^{[k-1]}_{(2)} + 2x^{[k-1]}_{(2)}x^{[k-1]}_{(3)}\\
+ s(k+1)x^{[k-1]}_{(1)}x^{[k]}_{(1)} - e^{-(k+1)}x^{[k]}_{(1)}x^{[k]}_{(2)}\big).
\end{aligned}
$$

Нетрудно найти оценку

$$
\begin{aligned}
\|g(k,\overline{x}_{k,r})\| \le 2e^{-k}\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^3 + \big\|x^{[k-1]}_1\big\|^2\big(|q(k)| + \big|x^{[k]}_{(1)}\big| + 2|s(k)|\\
+ |s(k+1)|\big(|q(k)| + \big|x^{[k]}_{(1)}\big|\big)\big)\\
+ e^{-(k+1)}\big(|q(k)| + \big|x^{[k]}_{(1)}\big|\big)\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^2\big(|s(k+1)|\big(|q(k)| + \big|x^{[k]}_{(1)}\big|\big) + |p(k)| + 2\big|x^{[k-1]}_{(3)}\big|\big)\\
+ e^{-2(k+1)}\big\|x^{[k-1]}_1\big\|\big(|q(k)| + \big|x^{[k]}_{(1)}\big|\big)\big|x^{[k]}_{(1)}\big|\big|x^{[k]}_{(2)}\big|. \quad (7.7)
\end{aligned}
$$

Вычислим предел от обеих частей неравенства (7.7) при $x^{[k-1]}_{(3)} \to 0$, $x^{[k]}_{(1)} \to 0$, $x^{[k]}_{(2)} \to 0$, в результате чего получим

$$
\begin{aligned}
\|g(k,\overline{x}_{k,r})\| \to 2e^{-k}\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^3 + \big\|x^{[k-1]}_1\big\|^2(|q(k)| + 2|s(k)| + |s(k+1)||q(k)|)\\
+ e^{-(k+1)}|q(k)|\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^2(|s(k+1)||q(k)| + |p(k)|), \quad (7.8)
\end{aligned}
$$

откуда с учетом того, что $|s(k)| \le 6$, $|q(k)| \le 3/2$, $|p(k)| \le 3/4$,

$$
\lim_{x^{[k-1]}_{(3)}\to 0,\ \|x^{[k]}_1\|\to 0} \|g(k,\overline{x}_{k,r})\| \le 2e^{-k}\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^3 + \frac{9}{2}\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^2\left(5 + \frac{13}{4}e^{-(k+1)}\right). \tag{7.9}
$$

Если в условии (6.15) заменить функцию $h_2(k,\overline{x}_{k,r})$ функцией $g(k,\overline{x}_{k,r})$, то в силу (7.9) оно будет выполнено.

В свою очередь, с учетом (7.5)

$$
\lim_{\|x^{[k-1]}_2\|\to 0,\ \|x^{[j]}\|\to 0\ (j=\overline{k,k+r})} \|h_1(k,\overline{x}_{k,2})\| = \big|e^{-k}x^{[k-1]}_{(1)}x^{[k-1]}_{(2)}\big| \le e^{-k}\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^2,
$$

откуда вытекает оценка (6.16). Таким образом, все предположения теоремы 6 выполнены. Согласно этой теореме тривиальное решение системы (7.1)–(7.3) асимптотически устойчиво.

Обратимся к теореме 7. Положим

$$
s(k) = \sin\phi_k, \quad q(k) = 1/2, \quad p(k) = 1/4.
$$

Очевидно, что в этом случае матрица

$$
J_2(k) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ \sin\phi_{k+1}/2 & 1/4 \end{pmatrix}
$$

обратима и ограничена вместе со своей обратной при всех $k \in \mathbf{N}$. Матрица $J_1(k) = \begin{pmatrix} \sin\phi_k & 0 \end{pmatrix}$ имеет строгий характеристический показатель, равный нулю. Так что имеют место предположения 1 и 2 леммы 3. Кроме того, в соответствии с критерием правильности треугольных систем [22, гл. 1, § 4, п. 3] система (3.19) правильная, а ее характеристические показатели равны $-\ln 2$ и $-\ln 4$.

Справедливость соотношения (6.16) установлена выше.

Рассмотрим условие (6.19). Из (7.8) следует, что

$$
\lim_{x^{[k-1]}_{(3)}\to 0,\ \|x^{[k]}_1\|\to 0} \|g(k,\overline{x}_{k,r})\| \le \big\|x^{[k-1]}_1\big\|^2\left(3 + \frac{3}{8}e^{-(k+1)}\right) + 2e^{-k}\big\|x^{[k-1]}_1\big\|^3. \tag{7.10}
$$

В соответствии с замечанием 4 функцию $h_2(k,\overline{x}_{k,r})$ в (6.19) можно заменить на $g(k,\overline{x}_{k,r})$. При $\|x_{(1)}^{[k-1]}\| < 1$ из (7.10) вытекает оценка

$$\lim_{x_{(3)}^{[k-1]}\to 0,\ \|x_1^{[k]}\|\to 0} \|g(k,\overline{x}_{k,r})\| \le \widetilde{\mu}(k)\|x_1^{[k-1]}\|^2,$$

где $\widetilde{\mu}(k) = 3 + \frac{3}{8}e^{-(k+1)} + 2e^{-k}$. Легко видеть, что $\chi[\widetilde{\mu}(k)] \le 0$.

Таким образом, все предположения теоремы 7 выполняются, вследствие чего тривиальное решение системы (7.1)–(7.3) асимптотически устойчиво.

8. Заключение

В статье рассмотрены нелинейные дескрипторные системы с дискретным временем в общих предположениях.

Для исследования устойчивости тривиального решения была построена структурная форма (2.6), (2.7), любое решение которой, начинающееся в достаточно малой окрестности нуля, является решением исходной системы (1.1), и наоборот. Эта структурная форма представляет собой уже невырожденную систему и является частью компонент неявной функции (2.14), (2.16), (2.17), удовлетворяющей системе (2.11).

Одним из преимуществ использованного подхода является то, что для исследования устойчивости нет необходимости находить эту неявную функцию, чтобы затем изучать соответствующие свойства ее линейного приближения (6.4), (6.5). Лемма 4 позволяет делать вывод об устойчивости тривиального решения системы (1.1), исходя из свойств линеаризованной системы (3.1).

Для системы (1.1) (или, что то же, (3.1)) строится система линейного приближения (3.2). С помощью оператора (3.4) система (3.2) преобразуется к невырожденной структурной форме (3.18), (3.19), которая эквивалентна системе (3.2) в смысле решений (теорема 2). Оператор (3.4) приводит линеаризованную систему (3.1) к виду (3.16), (3.17). По построению в некоторой окрестности нуля системы (3.1) (или (1.1)) и (3.16), (3.17) имеют одно и то же множество решений. На основании свойств системы (3.16), (3.17) делается вывод об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1) (теоремы 6 и 7).

В статье также получены новые критерии правильности и приводимости для линейных дескрипторных систем вида (3.2) (теоремы 3, 4 и 5).

Предложенный подход не только позволяет исследовать внутреннюю структуру вырожденных систем с дискретным временем, но и автоматически решает проблему согласования начальных данных. В дальнейшем он может быть использован для исследования других качественных свойств линейных и нелинейных дискретных дескрипторных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Luenberger A., Arbel D. G.* Singular dynamic Leontief systems // Econometrica. 1977. V. 45. P. 991–995.
2. *Hemami H., Wyman B. F.* Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. V. 24. P. 526–535.
3. *Stevens B. L., Lewis F. L.* Aircraft modelling, dynamics and control. New York: John Wiley & Sons, 1991.
4. *Zhai D., Zhang Q. L., Li J. H.* Fault detection for singular multiple time-delay systems with application to electrical circuit // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. P. 5411–5436.
5. *Zhao F., Zhang Q., Zhang Y.* H_∞ filtering for a class of singular biological systems // IET Control Theory Appl. 2015. N 9. P. 2047–2055.

6. *Zerrougui M., Darouach M., Boutat-Baddas L., Ali H. S.* H_∞ filtering for singular bilinear systems with application to a single-link flexible-joint robot // Int. J. Control Autom. Syst. 2014. N 12. P. 590–598.

7. *Balaji S.* A new Bernoulli wavelet operational matrix of derivative method for the solution of nonlinear singular Lane–Emden type equations arising in astrophysics // J. Comput. Nonlinear Dynam. 2016. V. 11, N 5. 051013-11.

8. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.

9. *Debeljkovic D., Buzurovic I., Simeunovic G.* Stability of linear discrete descriptor systems in the sense of Lyapunov // Int. J. Inform. Systems Sci. 2012. V. 7, N 4. P. 303–322.

10. *Fang C.-H., Lee L.* Stability robustness analysis of uncertain discrete-time descriptor systems // IFAC Proc. Vol. 2002. V. 35, N 1. P. 71–76.

11. *Zhang Q., Lam J., Zhang L.* On analizing the stability of discrete descriptor systems via generalized Lyapunov Equations // Multi-objective programming and goal programming. Advance in soft computing. 2003. V. 21. P. 295–300.

12. *Mao W.-J.* Robust stability and stabilization of discrete-time descriptor systems with uncertainties in the difference matrix // IET Control Theory & Appl. 2012. V. 6, N 17. P. 2676–2685.

13. *Kaczorek T., Ruszewski A.* Global stability of discrete-time nonlinear systems with descriptor standard and fractional positive linear parts and scalar feedbacks // Arch. Control Sci. 2020. V. 30, N 4. P. 667–681.

14. *Wang H.-S., Yung C.-F.* Discrete-time H_∞ control problem for nonlinear descriptor systems // IEEE Trans. Aut. Control. 2008. V. 53, N 4. P. 1051–1057.

15. *Kaczorek T.* Fractional descriptor standard and positive discrete-time nonlinear systems // Bull. Polish Acad. Sci. Techn. Sci. 2015. V. 63, N 3. P. 651–655.

16. *Liu Y., Wang T., Gao C., Tang S., Gao Z.* Input-to-state stability for a class of discrete-time nonlinear input-saturated switched descriptor systems with unstable subsystems // Neural Comput. & Appl. 2018. V. 29. P. 417–424.

17. *Arceo C., Sanchez M., Estrada-Manzo V., Bernal M.* Convex stability analysis of nonlinear singular systems via linear matrix inequalities // IEEE Trans. Aut. Control. 2018. V. 64, N 4. P. 1740–1745.

18. *Yang C., Zhang Q., Zhou L.* Stability of descriptor systems with sector and slope restricted nonlinearities // Int. J. Inform. Systems Sci. 2007. V. 3, N 4. P. 693–707.

19. *Zhang J., Zhao Y.* Asymptotic stability of nonlinear singular discrete systems // Proc. Intern. Conf. on Multimedia Technol. Hangzhou, 2011. P. 2411–2413.

20. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.

21. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

22. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 2001.

Поступила в редакцию 24 июля 2023 г.
После доработки 14 ноября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Щеглова Алла Аркадьевна (ORCID 0009-0007-8418-0140)
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
shchegl@icc.ru