Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 510.5

СЕМЕЙСТВО С ЕДИНСТВЕННОЙ МИНИМАЛЬНОЙ, НО НЕ НАИМЕНЬШЕЙ НУМЕРАЦИЕЙ

М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Доказывается существование семейства вычислимо перечислимых множеств, обладающего единственной с точностью до эквивалентности вычислимой минимальной, но не наименьшей нумерацией.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.212

Ключевые слова: минимальная нумерация, вычислимая нумерация, вычислимое семейство, дискретное семейство.

1. Введение

Одной из основных проблем теории нумераций является алгебраическая классификация полурешеток вычислимых нумераций семейств вычислимо перечислимых (в.п.) множеств. С ней тесно связана ставшая классической и до сих пор открытая проблема Ю. Л. Ершова о возможном (с точностью до эквивалентности) числе минимальных вычислимых нумераций семейств в.п. множеств, сформулированная им в конце 60-х годов прошлого столетия (см. [1, 2]). С момента ее формулировки и по настоящее время она интенсивно исследуется многими авторами. Это привело в том числе и к результатам, имеющим самостоятельный для теории нумераций интерес (см. [3–7]) и приложения в других разделах математической логики (см. [8, 9]).

Для семейств (графиков) вычислимых функций эта проблема была решена С. С. Марченковым.

Теорема 1 [3]. *Вычислимое семейство всюду определенных функций обладает либо наименьшей, либо бесконечным числом минимальных вычислимых нумераций.*

Обе альтернативы в формулировке этой теоремы реализуемы. Так, любое конечное семейство в.п. множеств обладает наименьшей вычислимой нумерацией [10] (поэтому проблема о числе минимальных вычислимых нумераций исследуется только для бесконечных семейств). Семейства всюду определенных функций, обладающие бесконечным числом минимальных вычислимых нумераций, были найдены Ю. Л. Ершовым.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-21-00181) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Теорема 2 [11]. *Семейство всех примитивно рекурсивных функций обладает бесконечным числом минимальных вычислимых нумераций.*

Важные классы минимальных нумераций образуют однозначные и позитивные нумерации. Для них проблема Ершова была решена С. С. Гончаровым, что также привело к многочисленным важным следствиям в теории вычислимых моделей (см., например, [8, 9, 12]).

Теорема 3 [4, 5]. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует семейство в.п. множеств, имеющее точно n однозначных* (*позитивных*) *вычислимых нумераций.*

Для $n = 1$ им было доказано, что единственная однозначная (позитивная) вычислимая нумерация может не быть наименьшей [6, 7].

Продвижение в решении проблемы в общей постановке получили в своих работах С. А. Бадаев [13, 14], В. В. Вьюгин [15], С. С. Гончаров, А. Яхнис, В. Яхнис [16] и др. В процитированных работах [13, 15] среди прочего были построены вычислимые семейства, не обладающие минимальными вычислимыми нумерациями.

Проблема Ершова также исследовалась и для обобщенно вычислимых семейств [17] как относительно классической [18–22] так и более общих позитивных сводимостей [23, 24]. Так, в совместной работе С. А. Бадаева и С. С. Гончарова [18] было доказано, что любое бесконечное Σ^0_n-вычислимое семейство ($n > 1$) обладает бесконечным числом минимальных Σ^0_n-вычислимых нумераций. В [20–22] было установлено, что это также верно для всех A-вычислимых семейств, где тьюрингова степень оракула A является высокой или ограничивает ненулевую в.п. степень.

В XXI веке наиболее близко к решению этой проблемы подошли С. А. Бадаев и Лемпп. Из основного результата их совместной работы [19] следует существование Σ^{-1}_2-вычислимого семейства, обладающего ровно двумя минимальными Σ^{-1}_2-вычислимыми нумерациями.

Теорема 4 [19]. *Существует семейство 2-в.п. множеств $\mathscr{F}$, обладающее двумя однозначными Σ^{-1}_2-вычислимыми нумерациями μ и ν такими, что для любой Σ^{-1}_2-вычислимой нумерации π семейства $\mathscr{F}$ либо $\mu \le \pi$, либо $\pi \le \nu$.*

В настоящей работе эти исследования продолжаются и решается вопрос, сформулированный С. С. Гончаровым в середине 80-х годов прошлого столетия: будет ли единственная минимальная вычислимая нумерация наименьшей? Основной результат, теорема 5, позволяет получить отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема 5. *Существует дискретное семейство $\mathscr{A}$, обладающее минимальной вычислимой нумерацией μ такой, что $\mu \le \alpha$ для любой минимальной вычислимой нумерации $\alpha \in H(\mathscr{A})$ и $\mu \not\le \beta$ для некоторой вычислимой нумерации $\beta \in H(\mathscr{A})$.*

Отметим, что полурешетку вычислимых нумераций такого семейства $\mathscr{A}$ можно рассматривать как пример степенной структуры, обладающей нетривиальным определимым синглетоном.

2. Предварительные сведения

В обозначениях и терминологии будем придерживаться монографий [10] (и статьи [25]) и [26, 27]. Для не более чем счетного непустого множества S любое сюръективное отображение $\alpha : \mathbb{N} \to S$ называется его *нумерацией*. Множество всех нумераций S будем обозначать через $H(S)$. Если $\alpha, \beta \in H(S)$, то будем говорить, что α *сводится* к β (в этом случае используется обозначение $\alpha \leq \beta$), если существует такая вычислимая функция f, что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех x. Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются *эквивалентными* (в этом случае используется запись $\alpha \equiv \beta$). Назовем нумерацию α *позитивной*, если ее *нумерационная эквивалентность*

$$\eta_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \alpha(x) = \alpha(y)\}$$

в.п., и *однозначной*, если она совпадает с отношением равенства. Нумерация μ множества S называется *минимальной*, если $\mu \leq \alpha$ для любой нумерации $\alpha \leq \mu$ множества S.

Нумерация α семейства в.п. множеств $\mathscr{A}$ называется *вычислимой*, если множество пар $G_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \alpha(x)\}$ в.п. Семейства, обладающие вычислимыми нумерациями, будем также называть *вычислимыми*.

Через φ_e и W_e будем обозначать соответственно ч.в. функцию и в.п. множество с геделевским номером e. Для каждого e обозначим через α_e вычислимую нумерацию, для которой

$$G_{\alpha_e} = W_e.$$

Зафиксируем тройную сильно вычислимую последовательность конечных множеств $\{\alpha_{e,s}(x)\}_{e,s,x\in\mathbb{N}}$ такую, что для всех e, s, x выполняются условия

- $\alpha_{e,s}(x) \subseteq \alpha_{e,s+1}(x)$;
- $\alpha_{e,s}(x) = \varnothing$, если $e > s$;
- $\alpha_e(x) = \bigcup\limits_t \alpha_{e,t}(x)$.

Для частичной функции ψ ее область определения обозначается через $\operatorname{dom}\psi$. Используем запись $\psi(x)\downarrow$, если $x \in \operatorname{dom}\psi$, и $\psi(x)\uparrow$ в противном случае. Область значений ψ будем обозначать через $\operatorname{ran}\psi$. Через $c(x, y)$ обозначим вычислимую биекцию $\langle x, y\rangle \mapsto 2^x(2y + 1) - 1$ из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$.

Для двух строк $\sigma, \tau \in 2^{<\mathbb{N}}$ используем запись $\sigma \preceq \tau$, если σ является началом τ, и $\sigma \prec \tau$, если $\sigma \preceq \tau$ и $\sigma \neq \tau$. Если существует i, меньшее длины каждой из строк σ и τ, для которого $\sigma(i) = 0$ и $\tau(i) = 1$, а также $\sigma(j) = \tau(j)$ для всех $j < i$, то будем использовать запись $\sigma <_L \tau$. Длину строки σ обозначим через $\operatorname{lh}(\sigma)$.

3. Доказательство теоремы 5

Для доказательства теоремы достаточно определить дискретное семейство в.п. множеств $\mathscr{A}$, построив его вычислимые нумерации μ и β, удовлетворяющие для всех $n \in \mathbb{N}$ требованиям

R_n: $\alpha_n \in H(\mathscr{A})$ минимальна $\Rightarrow \mu \leq \alpha_n$,

M_n: φ_n всюду определена & $(\mu \circ \varphi_n) \in H(\mathscr{A}) \Rightarrow \mu \leq (\mu \circ \varphi_n)$,

P_n: φ_n всюду определена $\Rightarrow \mu \neq (\beta \circ \varphi_n)$.

Чтобы выполнить требование P_n, зафиксируем числа w_0, a_0 и определим

$$\mu(w_0) = \beta(w_0) = \{a_0\}.$$

Если на некотором шаге построения будет иметь место $\varphi_n(w_0) = w_0$, то определим

$$\mu(w_0) = \{a_0 < a_1 < a_2\}, \quad \mu(w) = \{a_0 < a'_1 < a'_2\},$$

$$\beta(w_0) = \{a_0 < a'_1 < a'_2\}, \quad \beta(w) = \{a_0 < a_1 < a_2\}$$

для новых попарно различных чисел a_1, a_2, a'_1, a'_2 и w.

Для выполнения требования M_n в построении нумерации μ обеспечим, чтобы для каждого x можно можно было эффективно указать такое z, что $\mu(x) = \mu(\varphi_n(z))$ при условии, что $\mu(\varphi_n(\mathbb{N})) = \mathscr{A}$.

Для выполнения требования R_n в построении будем определять вычислимые функции $g_n(x)$, $f_n(x)$ и $d(n,s)$ такие, что существует предел $\lim\limits_s d(n,s)$ и если $\alpha_n \in H(\mathscr{A})$, то

- $\alpha_n(g_n(\mathbb{N})) = \mathscr{A}$;
- $\alpha_n \neq \alpha_n \circ g_n \circ \varphi_i$ для всех $i < \lim\limits_s d(n,s)$; в частности, если $\lim\limits_s d(n,s) = \infty$, то $\alpha_n \not\leq \alpha \circ g_n$ и, стало быть, α_n не минимальна;
- $\mu = \alpha_n \circ f_n$, если α_n минимальна.

Основное препятствие для выполнения этого требования будет заключаться в том, что на некотором шаге s построения может иметь место

$$\mu(w_0) = \{a_0 < a_1 < a_2\} \neq \alpha_n(f_n(w_0)).$$

В этом случае зафиксируем $i = d(n,s)$ и положим $d(n,s+1) = d(n,s)+1$. Будем добиваться выполнения условий $\alpha_n(g_n(\mathbb{N})) = \mathscr{A}$ и $\alpha_n \neq \alpha_n \circ g_n \circ \varphi_i$. Для этого выберем число r_n такое, что

$$\alpha_n(r_n) \notin \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$$

и $\alpha_n(r_n) = \mu(w_0)$ на одном из последующих шагов (существование такого числа r_n будет обеспечено в построении), а также новые номера x_n, x'_0, на которых определим

$$\mu(x_n) = \{b_0^n < b_1^n\}, \quad \mu(x'_0) = \{b_0 < b_1\}$$

для новых попарно различных чисел b_0^n, b_1^n, b_0, b_1. Затем выберем y^n, для которого на одном из последующих шагов будет выполняться

$$\alpha_n(y^n) = \mu(x_n),$$

и определим $g_n(w) = y_n$ для первого числа w, на котором значение $g_n(w)$ на предыдущем шаге не определено. После этого начинаем последовательное добавление элементов в множества $\mu(x'_0)$, $\mu(x_n)$ и $\mu(w_0)$, ожидая перед добавлением каждого следующего элемента выполнения на некотором шаге равенств

$$\alpha_n(y^n) = \mu(x_n), \quad \alpha_n(r_n) = \mu(w_0).$$

Организуем этот процесс таким образом, чтобы на каждом шаге значения $\mu(x'_0)$, $\mu(x_n)$ и $\mu(w_0)$ были попарно несравнимы по включению, но наибольшее число k, для которого

$$\mu(x'_0) \upharpoonright k = \mu(x_n) \upharpoonright k = \mu(w_0) \upharpoonright k,$$

в рамках работы процесса возрастало. Если на одном из последующих шагов t будет иметь место $\varphi_{i,t}(r_n) \downarrow\in \operatorname{dom} g_n$, то перестаем добавлять элементы в $\mu(w_0)$, но продолжаем их добавлять в $\mu(x'_0)$ и $\mu(x_n)$ таким образом, чтобы на каждом шаге значения $\mu(x'_0)$ и $\mu(x_n)$ были попарно несравнимы по включению, но наибольшее число k, для которого

$$\mu(x'_0) \upharpoonright k = \mu(x_n) \upharpoonright k,$$

в рамках работы процесса возрастало. Поскольку на шаге t выполняется

$$\alpha_n(r_n) \notin \alpha_n(g_n(\mathbb{N})) \mathbin{\&} \varphi_i(r_n) \downarrow\in \operatorname{dom} g_n,$$

получим, что

$$\alpha_n(r_n) \neq \alpha(g_n(\varphi_i(r_n))).$$

Стало быть, нумерация α_n не сводится к нумерации $\alpha_n \circ g_n$ посредством φ_i. Затем полагаем $g_n(w) = r_n$ для наименьшего w, на котором значение $g(w)$ на шаге t не определено. Если же $\varphi_{i,t}(r_n) \uparrow$ на всех шагах t, то тривиальным образом α_n не сводится к нумерации $\alpha_n \circ g_n$ посредством φ_i. При этом в конечном итоге будут иметь место равенства

$$\mu(x_0') = \mu(x_n) = \mu(w_0).$$

Стало быть, $\mu(w_0) = \mu(x_n) = \alpha_n(y^n) \in \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$.

В процессе построения обеспечим, чтобы нумерация μ удовлетворяла следующему условию:

$$\forall X \in \mathscr{A}\, [\mu^{-1}(X) \text{ конечно}]. \tag{1}$$

На каждом шаге построения, как это часто делается в подобного рода конструкциях (см., например, [26, гл. VII, теорема 3.1]), также будут определяться вспомогательные двухместные вычислимые *функции длины* l и m. Для произвольных n и s значение $l(n,s)$ будем полагать равным такому наибольшему $r \leq s$, что

$$\forall x \leq r \exists y \leq s\, [\mu_s(y) \neq \varnothing \,\&\, \alpha_{n,s}(x) \upharpoonright r = \mu_s(y) \upharpoonright r],$$

$$\forall y \leq r \exists x \leq s\, [\mu_s(y) \upharpoonright r = \alpha_{n,s}(x) \upharpoonright r].$$

Если $\mathscr{A}$ — дискретное семейство и μ — его вычислимая нумерация, удовлетворяющая (1), то для каждого n имеет место

$$\limsup_s l(n,s) = \infty \Rightarrow \alpha_n(\mathbb{N}) \subseteq \mu(\mathbb{N}) \text{ в силу (1) и } \mu(\mathbb{N}) \subseteq \alpha_n(\mathbb{N}) \text{ в силу}$$
$$\text{дискретности } \mathscr{A} \Rightarrow \alpha_n(\mathbb{N}) = \mathscr{A} \Rightarrow \lim_s l(n,s) = \infty.$$

Значение $m(n,s)$ будем полагать равным такому наибольшему $r \leq s$, что

$$\forall x \leq r \exists y \leq s\, [\varphi_{n,s}(x) \downarrow \,\&\, \varphi_{n,s}(y) \downarrow \,\&\, \mu_s(x) \upharpoonright r = \mu_s(\varphi_n(y)) \upharpoonright r].$$

Если $\mathscr{A}$ — дискретное семейство и μ — его вычислимая нумерация, то для всех n имеет место

$$\limsup_s m(n,s) = \infty \Rightarrow (\varphi_n \text{ тотальна} \,\&\, \mathscr{A} = \mu(\varphi_n(\mathbb{N}))) \Rightarrow \lim_s m(n,s) = \infty.$$

Далее, для каждой строки $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ определим понятие *σ-шага.* Как это свойственно для $\mathbf{0}''$-приоритетных построений все требования для семейства $\mathscr{A}$ и его нумерации μ будут удовлетворяться на таких σ-шагах, что σ является наименьшей относительно лексикографического порядка строкой среди всех строк длины $\mathrm{lh}(\sigma)$, для которой множество σ-шагов бесконечно. Кроме того, если этим свойством обладает другая строка τ, $\mathrm{lh}(\tau) > \mathrm{lh}(\sigma)$, то по нижеприведенному определению будем иметь, что $\sigma \prec \tau$. Все вместе строки с таким свойством $\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \ldots$ в пределе образуют элемент $T \in 2^{\mathbb{N}}$, который принято называть *истинным путем* построения (см. [26, гл. XIV, § 2]) и построение «вдоль» которого обеспечивает удовлетворение всех требований для $\mathscr{A}$ и μ. Множество всех σ-шагов будем обозначать через S_σ. Для пустой строки λ любое число $s \in \mathbb{N}$ будем называть *λ-шагом.* Предположим по индукции, что для строки σ

понятие σ-шага определено. Пусть $\mathrm{lh}(\sigma) = 2n$ ($\mathrm{lh}(\sigma) = 2n+1$). Тогда σ-шаг s будем называть $\sigma 0$-*шагом*, если выполняется

$$\forall t < s \left[t \in S_\sigma \Rightarrow l(n,s) > l(n,t) \ (m(n,s) > m(n,t))\right],$$

и $\sigma 1$-*шагом* в противном случае.

Одновременно с построением нумераций μ и β для каждого n будем строить частично вычислимые функции f_n и g_n такие, что

(a) если нумерация $\alpha_n \in H(\mathscr{A})$ минимальна, то для всех (за исключением конечного числа) x имеет место $f_n(x)\downarrow$ и $\mu(x) = \alpha_n(f(x))$;

(b) если $\alpha_n \in H(\mathscr{A})$, то g_n всюду определена и семейство $\mathscr{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ конечно.

Также для каждой строки σ длины $2n+2$ будем строить двухместную частично вычислимую функцию d_σ, с помощью которой будем контролировать минимальность нумераций α_e, $e \le n$ (подобно тому, как это делалось в неформальном описании конструкции с помощью функции d). Дополнительно в построении обеспечим, что для любых различных $X, Y \in \mathscr{A}$ выполняется $|X \setminus Y| \ge 2$.

В начале построения положим $\mu_0(x) = \beta_0(x) = \varnothing$ для всех $x \in \mathbb{N}$, функции $f_{n,0}$, $g_{n,0}$ нигде не определенными и $d_\sigma(n,0) = 0$ для всех $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$. На каждом шаге $s+1$ построения для всех $x, n \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ если не указано иное, то будем считать, что $\mu_{s+1}(x) = \mu_s(x)$, $\beta_{s+1}(x) = \beta_s(x)$, $f_{n,s+1}(x) = f_{n,s}(x)$, $g_{n,s+1}(x) = g_{n,s}(x)$ и $d_\sigma(n, s+1) = d_\sigma(n,s)$.

Также на каждом шаге s для всех x будем считать, что значение $\beta_s(x)$ определяется равным $\mu_s(x)$, если явно не указано иное определение $\beta_s(x)$. Кроме того, в построении обеспечим, что $\mu_s(x) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\beta_s(x) \neq \varnothing$.

Построение осуществляется одновременным выполнением процедур $P(\sigma)$ для всех непустых строк σ четной длины. Каждая процедура $P(\sigma)$, $\mathrm{lh}(\sigma) = 2n+2$, нацелена на удовлетворение требований R_e, M_e, $e \le n$, и P_n, если σ будет являться начальным сегментом истинного пути. Не оговаривая это в дальнейшем, будем считать, что все определяемые в ней числа, принадлежащие элементам семейства $\mathscr{A}$, будут иметь вид $c(x,\sigma)$, где $x \in \mathbb{N}$ и σ отождествляется с числом, двоичным представлением которого она является. В каждой процедуре $P(\sigma)$ будут определяться значения $\mu(x)$, где x принадлежит некоторому множеству N_σ. Для различных строк σ и τ множества N_σ и N_τ имеют пустое пересечение. Кроме того, $\bigcup\limits_{\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}} N_\sigma = \mathbb{N}$. Таким образом, фрагменты построения, осуществляемые разными процедурами $P(\sigma)$, не будут нарушать друг друга, а в процессе их одновременной работы будет построена искомая нумерация μ.

Описание процедуры $P(\sigma)$, $\mathrm{lh}(\sigma) = 2n+2$. Работа процедуры происходит пошагово на всех шагах

$$s = c(0,\sigma), c(1,\sigma), c(2,\sigma), \ldots .$$

Пусть $c(u,\sigma)$ — последний шаг, на котором работа процедуры $P(\sigma)$ была *прервана*, и $u = 0$, если она запускается впервые. Для каждого шага

$$s = c(u+1,\sigma), c(u+2,\sigma), \ldots$$

проверяем, существует ли σ-шаг t такой, что $c(u,\sigma) < t \le s$ (т. е. *ждем* появления первого не превышающего s σ-шага, большего $c(u,\sigma)$) и обозначим первый такой шаг s через v, если он существует (в противном случае в процедуре не совершается никаких действий, пока она не будет прервана). Затем выберем *новое* (большее всех ранее использованных в построении и принадлежащих $\bigcup\limits_{e,x} \alpha_{e,v}(x)$ чисел) число a_0 и определим

$$\mu_{v+1}(w_0) = \beta_{v+1}(w_0) = \{a_0\},$$

где w_0 — такой наименьший номер, что множество $\mu(w_0)$ (и тем самым $\beta(w_0)$) пусто на шаге v. Пусть

$$R = \{e \le n : \sigma(2e) = 0\}, \quad M = \{e \le n : \sigma(2e+1) = 0\}.$$

Чтобы обеспечить минимальность μ, для каждого $e \in M$, $e > 0$, ждем появления шага, на котором существует такое z, что

$$\varphi_{e-1}(z) = w_0. \tag{2}$$

Затем для каждого $e \in R$ ждем появления шага, на котором для некоторого u_e имеет место

$$\alpha_e(u_e) = \{a_0\},$$

и, если такой шаг существует, определим

$$f_e(w_0) = g_e(w) = u_e,$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_e(w)$ на предыдущем шаге не определено. Для каждого $e \le n$ выберем новые числа $b_0^e < b_1^e$ и определим

$$\mu(x_e) = \{b_0^e, b_1^e\},$$

где x_0 — первый номер, на котором значение $\mu(x_0)$ на предыдущем шаге не определено, и $x_e = x_0 + e$ для всех $e \le n$. Далее, выберем наименьшее x_0', на котором значение $\mu(x_0')$ не определено, новые числа $b_0 < b_1$ и определим

$$\mu(x_0') = \{b_0, b_1\}.$$

После этого для каждого $e \le n$ начинаем одновременное выполнение *процессов* 1 и 2. Опишем их работу для произвольно выбранного $e \le n$.

Процесс 1. Если $e > 0$, то чтобы обеспечить минимальность μ ждем появления шага, на котором существуют числа $z_{e-1}^{e-1}, \dots, z_n^{e-1}$ такие, что

$$(e-1) \in M \Rightarrow \varphi_{e-1}\big(z_{e-1}^{e-1}\big) \in \{x_0', x_0, \dots, x_{e-1}\} \,\&\, \varphi_{e-1}\big(z_i^{e-1}\big) = x_i \tag{3}$$

для всех $i = e, \dots, n$. Далее, если $e = 0$ или желаемые числа $z_{e-1}^{e-1}, \dots, z_n^{e-1}$ найдены, то ждем появления некоторого шага и таких чисел $y_e^e, \dots, y_n^e$, что на этом шаге имеет место

$$e \in R \Rightarrow \alpha_e(y_i^e) = \{b_0^i, b_1^i\} = \mu(x_i)$$

для всех $i = e, \dots, n$. Если $e \in R$ и желаемые числа $y_e^e, \dots, y_n^e$ также найдены, то для тех же $i = e, \dots, n$ и всех $j < e$ полагаем

$$f_e(x_i) = y_i^e,\ f_e(x_j) = y_e^e, \quad g_e(w_i') = y_i^e,$$

где w_0' — наименьшее число, на котором значение $g_e(w_0')$ на предыдущем шаге не определено, и $w_i' = w_0' + i$. Определим также

$$f_e(x_0') = y_e^e.$$

Затем ожидаем появления шага s, множеств B_0, B и попарно различных чисел $p_0 < p_1$, $q_0 < q_1$, для которых на шаге s выполняются условия

$$\mu(x_0') = B_0 \cup \{p_0, p_1\}, \quad \mu(x_e) = B \cup \{q_0, q_1\}, \tag{4}$$

$$\forall k \le e \left[k \in R \Rightarrow \alpha_k\big(y_e^k\big) = \mu(x_e)\right], \tag{5}$$

$$\forall b \in B_0\, [b < p_0]\, \&\, \forall b \in B\, [b < q_0], \tag{6}$$

а затем для новых чисел $c_0 > p_1$ и $c_1 > q_1$ определим

$$\mu_{s+1}(x_0') = \mu_s(x_0') \cup \{\min(\mu_s(x_e) \setminus \mu_s(x_0'))\} \cup \{c_0\}, \tag{7}$$

$$\mu_{s+1}(x_e) = \mu_s(x_e) \cup \{\min(\mu_s(x_0') \setminus \mu_s(x_e))\} \cup \{c_1\}. \tag{8}$$

Для выбранного e продолжаем поиск новых шага s, множеств B_0, B и попарно различных чисел $p_0 < p_1$, $q_0 < q_1$, удовлетворяющих условиям (4)–(6), и в случае их появления выполняем действия (7), (8) для новых чисел $c_0 > p_1$ и $c_1 > q_1$. Заметим, что непрерывное выполнение этих циклических действий приводит к равенству $\mu(x_e) = \mu(x_0')$. Этим описание работы процесса 1 завершается.

Если в процессе работы процедуры встретится τ-шаг $t > 0$, для которого $\tau <_L \sigma$, то *инициализируем* ее, выполняя следующие действия:

1) прерываем ее работу;

2) для каждого x, использованного в качестве аргумента μ в процессе работы процедуры, определяем значение $\mu_t(x)$ равным объединению всех значений $\mu_{t-1}(y)$, где y также использовалось в качестве аргумента μ в процессе ее работы; если в процедуре было определено значение a_0, то для каждого $e \le n$ после появления шага, на котором $a_0 \in \alpha_e(z)$ для некоторого z, определим $f_e(x) = z$, если на предыдущем шаге значение $f_e(x)$ не определено, и $g_e(w) = z$, где w — наименьшее число, на котором значение g_e на предыдущем шаге не определено;

3) для всех e полагаем

$$d_\sigma(e,t) = \max(\{d_\rho(e,t-1) : \rho <_L \sigma\, \&\, \mathrm{lh}(\rho) = \mathrm{lh}(\sigma)\} \cup \{d_\rho(e,t) : \rho \prec \sigma\}).$$

Этим описание инициализации завершается.

Далее, если на некотором шаге будет иметь место

$$\varphi_n(w_0) = w_0, \tag{9}$$

то инициализируем процедуры $P(\tau)$ для всех таких строк τ четной длины, что либо $\sigma \prec \tau$, либо $\sigma <_L \tau$, и полагаем

$$\mu(w_0) = \{a_0 < a_1 < a_2\}, \quad \mu(w) = \{a_0 < a_1' < a_2'\}, \tag{10}$$

$$\beta(w_0) = \{a_0 < a_1' < a_2'\}, \quad \beta(w) = \{a_0 < a_1 < a_2\} \tag{11}$$

для новых попарно различных чисел a_1, a_2, a_1', a_2' и первого w, для которого значение $\mu(w)$ на предыдущем шаге не определено. Выполнение в построении этих действий обеспечит справедливость неравенства $\mu \ne (\beta \circ \varphi_n)$. Для каждого $e \in R$ если на некотором шаге (любой из процедур) появится такое x, что

$$\alpha_e(x) = \{a_0 < a_1' < a_2'\},$$

то полагаем

$$f_e(w) = x, \quad g_e(w') = x, \tag{12}$$

где w' — наименьшее число, на котором значение g_e не определено на предыдущем шаге.

Процесс 2. Действия процесса направлены на выполнение условия

$$\exists r_e\,[\alpha_e(r_e) \in \alpha_e(g_e(\mathbb{N}))\,\&\,\alpha_e(r_e) \neq \alpha_e(g_e(\varphi_{d_\sigma(e,v)}(r_e)))],$$

если $e \in R$ является наименьшим элементом R таким, что $\alpha_e(u_e) \neq \mu(w_0)$ и выполняется (14), которое, в свою очередь, нацелено на то, чтобы нумерация α_e не была минимальной при условии, что она нумерует $\mathscr{A}$ и $\mu \not\leq \alpha_e$. Если $e \in R$, то ждем появления шага $s \geq v$, на котором для всех $e' \leq e$ если $e' \in R$, то определены элементы $y^{e'}_{e'}, \dots, y^{e'}_n$, и если $e' > 0$ и $(e'-1) \in M$, то определены элементы $z^{e'-1}_{e'-1}, \dots, z^{e'-1}_n$, а также выполняется

$$|\alpha_e(u_e) \setminus \mu(w_0)| \geq 2. \tag{13}$$

Если такой шаг s найден, то рассмотрим два случая.

(1) Число e не является наименьшим элементом R, удовлетворяющим на некотором шаге $s' = v, \dots, s$ условию (13) и условию

$$\min D = c(e, d_\sigma(e,v)),\ \text{где } D = \{c(k, d_\sigma(k,v)) : k \in R\}. \tag{14}$$

Тогда для каждого r, удовлетворяющего на одном из последующих шагов условию

$$\alpha_e(r) = \mu(w_0),$$

будем определять

$$g_e(w) = r, \tag{15}$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_e(w)$ на предыдущем шаге не определено.

(2) Число e является наименьшим элементом R, удовлетворяющим на некотором шаге $s' = v, \dots, s$ условию (13) и условию (14). Тогда для всех остальных $e' \in R$, удовлетворяющих (с e' вместо e) на одном из шагов $s' = v, \dots, s$ условию (13), определим

$$d_\sigma(e', s+1) = d_\sigma(e', v). \tag{16}$$

Для каждого r, удовлетворяющего на одном из последующих шагов условию

$$\alpha_{e'}(r) = \mu(w_0),$$

будем определять

$$g_{e'}(w) = r, \tag{17}$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_{e'}(w)$ на предыдущем шаге не определено. Выполнение для e' всех следующих действий процесса 2 прерывается. Далее, определим

$$d_\sigma(e, s+1) = d_\sigma(e,v) + 1 \tag{18}$$

и инициализируем процедуры $P(\tau)$ для всех строк четной длины τ таких, что либо $\sigma \prec \tau$, либо $\sigma <_L \tau$. Затем ожидаем появления шага t и, если оно не было зафиксировано ранее, числа r_e, для которых

$$\alpha_e(r_e) = \mu(w_0) \tag{19}$$

на этом шаге. Пусть $i = d_\sigma(e,v)$. Если $\varphi_{i,t}(r_e)\uparrow$, а также существуют множества B_0, B и попарно различные числа $p_0 < p_1$, $q_0 < q_1$ такие, что на шаге t выполняются условия

$$\mu(x'_0) = B_0 \cup \{p_0, p_1\}, \tag{20}$$

$$\mu(w_0) = B \cup \{q_0, q_1\}, \tag{21}$$

$$\forall b \in B_0\,[b < p_0]\,\&\,\forall b \in B\,[b < q_0]. \tag{22}$$

то для новых чисел $c_0 > p_1$, $c_1 > q_1$ определим

$$\mu_{t+1}(x'_0) = \mu_t(x'_0) \cup \{\min\big(\mu_t(w_0) \setminus \mu_t(x'_0)\big)\} \cup \{c_0\}, \tag{23}$$

$$\mu_{t+1}(w_0) = \mu_t(w_0) \cup \{\min(\mu_t(x'_0) \setminus \mu_t(w_0))\} \cup \{c_1\}. \tag{24}$$

Если $\varphi_{i,t}(r_e)\downarrow\in \operatorname{dom} g_e$, то прерываем выполнение действий процесса, связанных с e, и полагаем

$$g_e(w) = r_e, \tag{25}$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_e(w)$ на предыдущем шаге не определено. Иначе возвращаемся к ожиданию шага t, на котором имеет место (19), и в случае его появления выполняем ту же последовательность действий уже для нового t. Заметим, что если $\varphi_i(r_e)\downarrow$ и процесс не прерывается, то будет справедливо равенство $\alpha_e(r_e) = \mu(w_0)$. Этим завершается описание работы процесса 2 и процедуры $P(\sigma)$.

Непосредственно из построения следует, что любые два различных элемента семейства $\mathscr{A}$ несравнимы по включению и что любые два его различных бесконечных элемента не пересекаются, а также для любого $X \in \mathscr{A}$ существует лишь конечное число элементов $\mathscr{A}$, имеющих с X непустое пересечение. Отсюда следует, что $\mathscr{A}$ дискретно. Также из построения следует, что в каждой из процедур $P(\sigma)$ определяется лишь конечное число значений нумерации μ и значения, определенные в разных процедурах, не пересекаются. Стало быть, справедливо условие (1).

Покажем, что для каждого n требования R_n, M_n и P_n удовлетворены. Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Для любого n если $\alpha_n \in H(\mathscr{A})$, то разность $\mathscr{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ конечна.*

Доказательство. Пусть $\alpha_n \in H(\mathscr{A})$ и T — истинный путь построения. Согласно построению функция g_n всюду определена. Покажем, что семейство $\mathscr{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ конечно. Выберем произвольное число $m \geq n$ и строку σ длины $2m+2$, для которой $T \restriction (2n+2) \preceq \sigma$. Рассмотрим работу процедуры $P(\sigma)$ начиная с наименьшего шага u, после которого она уже не инициализируется. Если такого шага не существует, то согласно п. 2 ее инициализации каждое из построенных при ее выполнении множеств семейства $\mathscr{A}$ имеет α_n-номер, принадлежащий $\operatorname{ran} g_n$. В противном случае определено значение u_n и $u_n \in \operatorname{ran} g_n$. Также в процессе 1 обеспечивается, что

$$y^n_n, \ldots, y^n_m \in \operatorname{ran} g_n.$$

Непрерывные циклически выполняемые в процессе 1 проверки (4)–(6) и действия (7), (8) приводят к равенствам

$$\alpha(y^n_n) = \mu(x_e)$$

для всех $e \leq n$ и

$$\alpha(y^n_{n+1}) = \mu(x_{n+1}), \ldots, \alpha(y^n_m) = \mu(x_m).$$

Если в дальнейшей работе процедуры будут определены равенства (10), то действия (12) обеспечат существование α_n-номера множества $\mu(w)$, принадлежащего $\operatorname{ran} g_n$. Предположим, что $\alpha_n(u_n) \neq \mu(w_0)$. Согласно построению это равносильно условию $|\alpha_e(u_n) \setminus \mu(w_0)| \geq 2$. Тогда в процессе 2 обеспечивается, что либо в силу действий (15), (17), (25) существует α_n-номер множества $\mu(w_0)$, либо в силу непрерывного циклического выполнения проверок (20)–(22) и действий (23), (24) имеет место

$$\alpha_n(y_n^n) = \mu(w_0).$$

Таким образом, каждое из множеств семейства $\mathscr{A}$, построенных при выполнении процедур $P(\sigma)$, где $T \upharpoonright (2n+2) \preceq \sigma$, принадлежат также семейству $\alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$. Разность $\mathscr{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ содержит лишь конечное число множеств, определенных при работе процедур $P(\tau)$, где $\tau <_L T \upharpoonright (2n+2)$. Этим завершается доказательство леммы.

Лемма 2. *Для любого n если $\alpha_n \in H(\mathscr{A})$ и α_n минимальна, то $\mu \leq \alpha_n$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N})) = \{Y_0, \dots, Y_k\}$. Определим сводимую к α_n нумерацию γ, для каждого x положив

$$\gamma(x) = \begin{cases} Y_x, & \text{если } x \leq k, \\ \alpha_n(g_n(x-k-1)), & \text{если } x > k. \end{cases}$$

Из построения следует, что для любых строк σ и τ четной длины существует конечный предел $\widehat{d}_\sigma(e) = \lim\limits_s d_\sigma(e,s)$ и $\widehat{d}_\sigma(e) \leq \widehat{d}_\tau(e)$ при $\sigma \preceq \tau$. Согласно определениям (16) и (18) процесса 2 каждой из процедур $P(\sigma)$ если для некоторого e' на некотором шаге s имеет место $d_\sigma(e', s+1) < d_\sigma(e', s)$, то найдется e, для которого

$$c(e, d_\sigma(e,v)) \leq c(e', d_\sigma(e',v)),\ d_\sigma(e,v) < d_\sigma(e, s+1).$$

Отсюда и из п. 3 инициализации процедур $P(\sigma)$ следует, что для каждого e существует предел $\lim\limits_m \widehat{d}_{T\upharpoonright(2m+2)}(e)$. Если $\alpha_e(\mathbb{N}) = \mathscr{A}$ и этот предел бесконечен, то для каждой всюду определенной функции φ_i с учетом проверок (19)–(22) и действий (23), (24) найдется число r_e, для которого

$$\gamma(\varphi_i(r_e)) \neq \alpha_e(r_e),$$

поскольку множество $\alpha_e(r_e)$ получает γ-номер только в действии (25). Стало быть, $\alpha_e \not\leq \gamma$ и, следовательно, нумерация α_e не минимальна. Пусть $\alpha_n(\mathbb{N}) = \mathscr{A}$ и $\lim\limits_m \widehat{d}_{T\upharpoonright(2m+2)}(n) = i < \infty$. Из построения следует, что для всех (за исключением конечного числа) x значение $f_n(x)$ определено. Если существует бесконечно много $x \in \operatorname{dom} f_n$, для которых имеет место

$$\mu(x) \neq \alpha_n(f_n(x)),$$

то для бесконечно многих m в процедуре $P(T \upharpoonright (2m+2))$ выполняется $\mu(w_0) \neq \alpha_n(u_n)$. Значит, выполнение действий (18) при работе вторых процессов этих процедур приводит к неравенству

$$\lim_m \widehat{d}_{T\upharpoonright(2m+2)}(n) > i.$$

Полученным противоречием завершается доказательство леммы.

Таким образом, для каждого n требование R_n удовлетворено.

Лемма 3. *Нумерация μ минимальна.*

Доказательство. Выберем произвольное $e > 0$, для которого φ_{e-1} всюду определена и $\mu(\varphi_{e-1}(\mathbb{N})) = \mathscr{A}$. Пусть $\sigma = T \upharpoonright (2e+2)$. Тогда по определению T множества $\bigcup\limits_{\tau <_L \sigma} N_\tau$ и $\bigcup\limits_{\tau \prec \sigma} N_\tau$ конечны. Для любой строки τ, если номер x выбирается в процессе работы процедуры $P(\tau)$ и после этого она инициализируется на некотором шаге, то согласно первой части п. 2 инициализации по этому x можно эффективно указать конечное множество, состоящее из всех y, для которых $\mu(y) = \mu(x)$. Поскольку $\mu(\varphi_{e-1}(\mathbb{N})) = \mathscr{A}$, для одного из таких y выполняется $y \in \operatorname{ran} \varphi_{e-1}$. Отметим, что для каждого множества семейства $\mathscr{A}$ вида $\{a_0 < a_1' < a_2'\}$ найдется z, для которого $\mu(\varphi_{e-1}(z)) = \{a_0 < a_1' < a_2'\}$.

Для каждого $n \geq e$ рассмотрим работу процедуры $P(T \upharpoonright (2n+2))$, начиная с шага, после которого она не инициализируется. Теперь сводимость $\mu \leq \mu \circ \varphi_{e-1}$ следует из проверок (2), (3) и справедливости равенств

$$\mu(x_0) = \cdots = \mu(x_{e-1}) = \mu(x_0'),$$

которые в свою очередь следуют из проверок (4)–(6) и действий (7), (8). В силу произвольности выбора e нумерация μ минимальна. Этим завершается доказательство леммы.

Наконец, для завершения доказательства теоремы остается заметить, что в силу выполнения проверок (9) и действий (10), (11) для каждого n требование P_n удовлетворено.

4. Заключение

В [2] среди прочего был сформулирован вопрос о существовании семейства с единственной минимальной вычислимой нумерацией, которая не является ни наименьшей, ни позитивной. В построение нумерации μ из доказательства последней теоремы несложно интегрировать, чтобы гарантировать ее непозитивность, процесс для выполнения требований

$$N_n : \eta_\mu \neq W_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

основанный на следующей стратегии. Зафиксировав различные числа x и y, начинаем последовательно добавлять элементы в множества $\mu(x)$ и $\mu(y)$ таким образом, чтобы на каждом шаге значения $\mu(x)$ и $\mu(y)$ были несравнимы по включению, но наибольшее число k, для которого $\mu(x) \upharpoonright k = \mu(y) \upharpoonright k$, при этом возрастало. Если в рамках работы этого процесса пара $\langle x, y\rangle$ перечислится в W_n, то прерываем его работу, что приводит к выполнению неравенства $\mu(x) \neq \mu(y)$.

Благодарности. Автор признателен рецензенту за глубокое проникновение в работу и за неоценимые замечания, рекомендации и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Badaev S. A., Goncharov S. S.* On computable minimal enumerations // Algebra. Proc. third Int. Conf. Algebra, memory M. I. Kargopolov. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 21–32.
2. *Badaev S. A., Goncharov S. S.* Theory of numberings: open problems // Computability theory and its applications, P. Cholak (ed.) et al. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2000. P. 23–38. (Contemp. Math. 257).
3. *Марченков С. С.* О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 588–607.

4. *Гончаров С. С.* Вычислимые однозначные нумерации // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 5. С. 507–551.

5. *Гончаров С. С.* Позитивные вычислимые нумерации // Докл. АН СССР. 1993. Т. 332, № 2. С. 142–143.

6. *Гончаров С. С.* Семейство с единственной однозначной, но не наименьшей нумерацией // Тр. Ин-та математики. 1988. Т. 8. С. 42–58.

7. *Гончаров С. С.* Семейства с единственной позитивной нумерацией // Вычисл. системы. 1992. № 146. С. 96–104.

8. *Goncharov S. S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. V. 136, N 3. P. 219–246.

9. *Hirschfeldt D. R.* Degree spectra of relations on computable structures // Bull. Symb. Logic. 2000. V. 6, N 2. P. 197–212.

10. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

11. *Ершов Ю. Л.* Нумерации семейств общерекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1015–1025.

12. *Semukhin P.* Prime models of finite computable dimension // J. Symb. Logic. 2009. V. 74, N 1. P. 336–348.

13. *Бадаев С. А.* Минимальные нумерации // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 3–34.

14. *Бадаев С. А.* Минимальные нумерации позитивно вычислимых семейств // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 3. С. 233–254.

15. *Вьюгин В. В.* О некоторых примерах верхних полурешеток вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 512–529.

16. *Goncharov S. S., Yakhnis A., Yakhnis V.* Some effectively infinite classes of enumerations // Ann. Pure Appl. Logic. 1993. V. 60, N 3. P. 207–235.

17. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерс // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.

18. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507–522.

19. *Badaev S. A., Lempp S.* A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets // J. Symb. Logic. 2009. V. 74, N 2. P. 618–640.

20. *Файзрахманов М. Х.* Минимальные обобщенно вычислимые нумерации и высокие степени // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 710–716.

21. *Faizrahmanov M. Kh.* Extremal numberings and fixed point theorems // Math. Logic Quart. 2022. V. 68, N 4. P. 398–408.

22. *Файзрахманов М. Х.* Две теоремы о минимальных обобщенно-вычислимых нумерациях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2023. № 3. С. 28–35.

23. *Файзрахманов М. Х.* О p-универсальных и p-минимальных нумерациях // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 440–449.

24. *Файзрахманов М. Х.* Сводимость по перечислимости и позитивная сводимость нумераций семейств арифметических множеств // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 204–212.

25. *Ershov Yu. L.* Theory of numberings // E. R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 473–503. (Stud. Logic Found. Math.; V. 140).

26. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets. Perspectives in mathematical logic. Berlin; Heidelberg; New York, etc.: Springer-Verl., 1987.

27. *Soare R. I.* Turing computability: theory and applications (theory and applications of computability). Berlin: Springer, 2016.

Поступила в редакцию 27 апреля 2023 г.
После доработки 1 октября 2023 г.
Принята к публикации 28 января 2024 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович (ORCID 0000-0002-4519-9696)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
marat.faizrahmanov@gmail.com