Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 515.145.2+515.148

РАССЛОЕНИЯ БИРМАН — ХИЛЬДЕНА. II

А. В. Малютин

Аннотация. Изучается структура групп автогомеоморфизмов расслоенных многообразий. Расслоенное топологическое пространство называется пространством Бирман — Хильдена, если в каждой паре послойных (переводящих каждый слой в некоторый слой) изотопных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны. В работе доказывается, в частности, что к классу Бирман — Хильдена относятся все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью многообразия размерности не выше трех (включая неориентируемые и с непустым краем), а также все локально тривиально расслоенные над окружностью с ориентируемым хакеновым слоем замкнутые четырехмерные многообразия (включая неориентируемые).

DOI 10.33048/smzh.2024.65.210

Ключевые слова: расслоение, расслоенное пространство, локально тривиальное расслоение, послойный автогомеоморфизм, группа классов отображений, изотопия, гомотопия, гомотопическая эквивалентность, многообразие.

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследование структуры групп автогомеоморфизмов расслоенных многообразий и развитие теории расслоений Бирман — Хильдена на основе результатов [1]. Расслоенное топологическое пространство называется *пространством Бирман — Хильдена*, если в каждой паре изотопных послойных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны (здесь и далее в работе под *послойными* отображениями понимаются отображения, переводящие каждый слой в некоторый — не обязательно исходный — слой, а под *изотопиями* автогомеоморфизмов понимаются изотопии в классе автогомеоморфизмов, а не в классе вложений). *Расслоениями Бирман — Хильдена* называются расслоения, тотальные пространства которых являются пространствами Бирман — Хильдена. Если расслоенное пространство (расслоение) является пространством (расслоением) Бирман — Хильдена, то говорим также, что оно *обладает свойством* Бирман — Хильдена или *относится к классу* Бирман — Хильдена.

Вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена относится к задаче изучения групп автогомеоморфизмов. Для расслоенного пространства E обозначим через $Fib(E)$ подгруппу послойных автогомеоморфизмов в (снабженной компактно-открытой топологией) группе $Homeo(E)$ всех автогомеоморфизмов пространства E, а содержащие тождественное отображение id_E компоненты линейной связности групп $Fib(E)$ и $Homeo(E)$ обозначим через $Fib_1(E)$ и

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00299, https://rscf.ru/project/22-11-00299/.

$Homeo_1(E)$ соответственно. Тогда принадлежность к классу Бирман — Хильдена эквивалентна совпадению подгрупп $Homeo_1(E) \cap Fib(E)$ (подгруппа изотопных тождественному и при этом послойных автогомеоморфизмов) и $Fib_1(E)$ (подгруппа автогомеоморфизмов, послойно изотопных тождественному) или, что то же самое, линейной связности подгруппы $Homeo_1(E) \cap Fib(E)$. Иными словами, в терминах компонент линейной связности: расслоенное пространство E относится к классу Бирман — Хильдена, если и только если включение $Fib(E) \subset Homeo(E)$ дает мономорфизм на уровне π_0, т. е. компонента $Homeo_1(E)$ группы $Homeo(E)$ кроме компоненты $Fib_1(E)$ подгруппы $Fib(E)$ не содержит ни одной другой компоненты из $Fib(E)$.

В работах [2–17] вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена изучался для случая разветвленных накрытий поверхностей (обзор и дополнительные ссылки на литературу по этому направлению имеются в [15]). В [18, 19] этот вопрос исследовался для случая слоений Зейферта, а также для случая накрытий трехмерных многообразий. В теории узлов и трехмерных многообразий возникает вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена для расслоенных над окружностью трехмерных многообразий. В работе [1] доказывается серия теорем о достаточных условиях принадлежности к классу Бирман — Хильдена для локально тривиальных расслоений над окружностью. В настоящей работе с помощью достаточных условий из [1] доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *При $n \in \{1, 2, 3\}$ все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью n-мерные многообразия (включая неориентируемые и с непустым краем) обладают свойством Бирман — Хильдена.*

Теорема 2. *Все локально тривиально расслоенные над окружностью с ориентируемым хакеновым слоем замкнутые четырехмерные многообразия (включая неориентируемые) обладают свойством Бирман — Хильдена.*

Теорему 1 дополняет следующий результат.

Теорема 3. *Если $n \in \{1, 2\}$, а M — замкнутое расслоенное n-мерное многообразие из теоремы 1, то включение $Fib_1(M) \subset Homeo_1(M)$ является гомотопической эквивалентностью.*

Требования о компактности и связности в теоремах 1 и 2 существенны. К примеру, локально тривиальное расслоение над окружностью, каждая компонента связности которого есть лента Мёбиуса, обладает свойством Бирман — Хильдена, если и только если связно. Локально тривиальное расслоение $\mathbb{R}^n \to S^1$ со слоями, состоящими из гиперплоскостей, обладает свойством Бирман — Хильдена, если и только если $n = 1$. По-видимому, требование о компактности в теоремах 1 и 2 можно ослабить до требования о компактности компонент связности слоя, но это направление в настоящей работе не развивается. Теорема 2 обобщается на обширный класс 4-мерных многообразий с краем, — мы не приводим описания, поскольку оно объемно и в настоящий момент неполно. В рамках используемых методов доказательства первым препятствием к экстраполяции теорем 1 и 2 на случай нехакенова слоя и на высшие размерности являются многообразия, допускающие гомотопные, но не изотопные автогомеоморфизмы (см., в частности, [20]).

Теорема 1 имеет ряд актуальных следствий. В частности, она применима в доказательстве того, что в локально тривиально расслоенном над окружностью связном компактном трехмерном многообразии изотопные трансверсальные зацепления трансверсально изотопны. Это существенно обобщает известный результат о том, что замкнутые косы в полнотории изотопны, если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос (см. [21; 22, теорема 1; 23, предложение 10.16; 24, теорема 2.1]). Доказательство упомянутого обобщения предполагается дать в отдельной работе.

Оставшаяся часть статьи ориентирована на доказательство теорем 1–3. Структура статьи такова. В § 2 содержится ряд предварительных сведений, включая формулировки доказанных в [1] достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена. В § 3 доказываются утверждения, использующиеся в последующих доказательствах для сведения ситуации к случаю расслоений со связным слоем. В § 4 теоремы 1 и 3 доказываются в случае $n = 1$. В § 5 теорема 1 доказывается в случае $n = 2$. В § 6 теорема 3 доказывается в случае $n = 2$. В § 7 теорема 1 доказывается в случае $n = 3$. В § 8 доказывается теорема 2.

2. Предварительные сведения

2.1. Достаточные условия. Приведем формулировки доказанных в [1] и использующихся в доказательствах теорем 1–3 достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена.

Для топологического пространства X через $Map(X, X)$ обозначается пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений $X \to X$. Если Z — подпространство в X, то через $Map(X, X; [Z])$ обозначается подпространство в $Map(X, X)$, состоящее из отображений, тождественных на Z. Через $Homeo(X; [Z])$ обозначается подгруппа $Homeo(X) \cap Map(X, X; [Z])$. Через $Map_1(X, X)$, $Map_1(X, X; [Z])$ и $Homeo_1(X; [Z])$ обозначаются компоненты линейной связности тождественного отображения в $Map(X, X)$, $Map(X, X; [Z])$ и $Homeo(X; [Z])$ соответственно.

Теорема 4 [1]. *Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Предположим, что у X не имеется гомотопных но не изотопных автогомеоморфизмов и что либо группа $Homeo_1(X)$ односвязна, либо ее включение в моноид $Map_1(X, X)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена.*

Определение. Будем говорить, что расслоение $p : E \to B$ *обладает свойством эпиморфности*, если включение $Fib_1(E) \subset Homeo_1(E)$ индуцирует эпиморфизм на уровне фундаментальных групп.

Теорема 5 [1]. *Пусть $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X, где X — связное компактное многообразие с непустым краем ∂X. Предположим, что выполнены следующие условия:*
- *у X не имеется пары автогомеоморфизмов, связанных тождественной на крае гомотопией, но не связанных тождественной на крае изотопией,*
- *либо группа $Homeo_1(X; [\partial X])$ односвязна, либо ее включение в $Map_1(X, X; [\partial X])$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп,*
- *сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности.*

Тогда p обладает свойством Бирман — Хильдена.

2.2. Спорадические сведения. Приведем ряд сведений, использующихся в дальнейших доказательствах многократно.

Определение. Топологическая группа называется *польской*, если она сепарабельна и допускает полную метрику.

Следующее хорошо известное (см., например, [25, следствие 2] и [26, § 5, I]) утверждение приводится для удобства ссылок.

Утверждение 1. *Группы автогомеоморфизмов метрических компактов с компактно-открытой топологией польские. Замкнутые подгруппы польских групп польские.*

Утверждение 2. *Если M — компактное многообразие, то подгруппа $Homeo_1(M)$ замкнута в (снабженной компактно-открытой топологией) группе $Homeo(M)$.*

Доказательство. В силу теоремы Чернавского [27, 28] группа $Homeo(M)$ локально стягиваема и, значит, локально линейно связна. Отсюда следует, что компоненты линейной связности в $Homeo(M)$ замкнуты. $\square$

Утверждение 3. *Если $p : E \to B$ — расслоение метрических компактов, то подгруппа послойных автогомеоморфизмов $Fib(E)$ замкнута в $Homeo(E)$.*

Доказательство. Определим отображение $f : Homeo(E) \to \mathbb{R}$, полагая для гомеоморфизма $h \in Homeo(E)$ значение $f(h)$ равным супремуму (по всем слоям расслоения) диаметров проекций в B образов $h(F)$ слоев F расслоения. Иными словами,

$$f(h) := \sup_{b \in B} \operatorname{diam}(p(h(p^{-1}(b)))),$$

где $\operatorname{diam}(Y)$ — диаметр подмножества $Y \subset B$ в фиксированной на B метрике.

Тогда, как нетрудно видеть, f непрерывно и $Fib(E) = f^{-1}(\{0\})$, так что $Fib(E)$ замкнуто как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении. $\square$

Следующая лемма доказывается, к примеру, в [29, теорема A.3] (см. также [30, 27.Vx] для случая полупрямых произведений):

Лемма 1. *Если G — польская группа, а A и B — такие замкнутые подгруппы в G, что $G = AB$ и $A \cap B = 1_G$, то групповая операция индуцирует гомеоморфизм между $A \times B$ и G.*

Определение. Пусть $\mathscr{C}$ — класс топологических пространств. Говорят, что топологическое пространство X является *абсолютным окрестностным ретрактом* (*АОР*) *для класса* $\mathscr{C}$, если X является окрестностным ретрактом всякого пространства из класса $\mathscr{C}$, содержащего X в качестве замкнутого подпространства.

Утверждение 4. *Если $f_1 : A \to B$ — гомотопическая эквивалентность и $f_2 : B \to C$ — такое отображение, что композиция $f_2 \circ f_1$ является гомотопической эквивалентностью, то и f_2 является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Заметим, что f_2 гомотопно композиции гомотопических эквивалентностей:

$$f_2 = f_2 \circ \mathrm{id}_B \simeq f_2 \circ (f_1 \circ g) = (f_2 \circ f_1) \circ g,$$

где $g : B \to A$ — гомотопическая эквивалентность такая, что $g \circ f_1 \simeq \mathrm{id}_A$ и $f_1 \circ g \simeq \mathrm{id}_B$. $\square$

Утверждение 4 связывает стандартную формулировку классической теоремы Уайтхеда о гомотопической эквивалентности клеточных комплексов со следующей вариацией этой теоремы.

Теорема 6 [31]. *Непрерывное отображение между топологическими пространствами, имеющими гомотопический тип клеточных комплексов, является слабой гомотопической эквивалентностью, если и только если оно является гомотопической эквивалентностью.*

Теорема 7 [32, 33]. *Топологическое пространство имеет гомотопический тип счетного клеточного комплекса, если и только если оно имеет гомотопический тип сепарабельного метрического пространства, являющегося AOP для класса сепарабельных метрических пространств.*

3. Сведение к случаю связного слоя

В настоящем разделе доказываются утверждения, сводящие общий случай в теоремах 1–3 к случаю расслоения со связным слоем.

Утверждение 5. *Каждое локально тривиальное расслоение локально связного секвенциально компактного пространства* (*например, компактного многообразия*) *есть композиция локально тривиального расслоения со связными слоями и конечнолистного накрытия базы.*

Доказательство. Сперва заметим, что у расслоения указанного вида число связных компонент в каждом слое конечно. Действительно, из определения топологии прямого произведения стандартным образом выводится, что у локально тривиального расслоения с локально связным секвенциально компактным пространством и база, и слои также локально связны и секвенциально компактны, а у пространства с этими свойствами число компонент связности конечно (поскольку в противном случае, воспользовавшись секвенциальной компактностью и выбрав сходящуюся последовательность точек, пробегающую бесконечное множество компонент, мы получили бы, что у предельной точки этой последовательности отсутствуют связные окрестности).

Далее, для произвольного расслоения $p : E \to B$ определим пространство Q_p и отображение $p_1 : E \to Q_p$ как факторпространство и факторотображение, отвечающие отождествлению всех точек в каждой компоненте связности каждого слоя расслоения p. Тогда p разлагается в композицию расслоений

$$E \overset{p_1}{\to} Q_p \overset{p_2}{\to} B,$$

причем p_1 и p_2 локально тривиальны, если p таково. У расслоения p_1 слои связны в силу определения. Заметим, что если у p количество связных компонент в каждом слое конечно, то слои у p_2 конечны и дискретны (поскольку конечность числа связных компонент в слое F расслоения p делает отвечающие этим компонентам подмножества в произвольной тривиально расслоенной окрестности $U \times F$ слоя F не только замкнутыми, но и открытыми в $U \times F$, что дает дискретность соответствующего слоя в p_2). Таким образом, у p_1 слои всегда связны, а в условиях доказываемого утверждения у p_2 слои конечны и дискретны, т. е. p_2 является конечнолистным накрытием. □

Следствие 1. *Локально тривиальное расслоение $p : M \to S^1$ связного компактного многообразия над окружностью раскладывается в композицию*

$$M \overset{p_1}{\to} S^1 \overset{c}{\to} S^1,$$

где p_1 — локально тривиальное расслоение со связным слоем, а c — накрытие.

Доказательство вытекает из утверждения 5, поскольку многообразия локально связны, а факторпространство связного пространства связно. □

В дальнейшем, одновременно рассматривая два расслоения p и $c\circ p$ на одном и том же пространстве M, мы обозначаем подгруппы послойных автогомеоморфизмов в $Homeo(M)$, отвечающих слоям расслоений $c \circ p$ и p, через $Fib^{c\circ p}(M)$ и $Fib^{p}(M)$ соответственно, а компоненты линейной связности этих подгрупп, содержащие тождественное отображение id_M, обозначаются через $Fib_1^{c\circ p}(M)$ и $Fib_1^{p}(M)$.

Предложение 1. *Пусть $p : M \to S^1$ — локально тривиальное расслоение с компактным связным метризуемым слоем F, а $c : S^1 \to S^1$ — накрытие. Тогда $Fib^{c\circ p}(M)$ содержится в $Fib^{p}(M)$, а включения $Fib^{c\circ p}(M) \subset Fib^{p}(M)$ и $Fib_1^{c\circ p}(M) \subset Fib_1^{p}(M)$ являются гомотопическими эквивалентностями.*

Доказательство. То, что $Fib^{c\circ p}(M)$ лежит в $Fib^{p}(M)$, обусловлено связностью слоя F: слои расслоения p суть в точности компоненты связности слоев расслоения $c \circ p$, так что каждый $c \circ p$-послойный автогомеоморфизм еще и p-послоен.

Покажем, что включение $Fib^{c\circ p}(M) \subset Fib^{p}(M)$ есть гомотопическая эквивалентность. Обозначим через S_p^1 и S_c^1 базовые окружности расслоений p и $c \circ p$ соответственно. Пусть ρ — произвольная (из совместимых с топологией) внутренняя метрика на S_c^1. Обозначим через $I^{\rho}(M)$ подгруппу тех элементов из $Fib^{c\circ p}(M)$, у которых индуцированные автоморфизмы $S_c^1 \to S_c^1$ являются изометриями по отношению к ρ. Возникает цепочка включений

$$I^{\rho}(M) \subset Fib^{c\circ p}(M) \subset Fib^{p}(M) \subset Homeo(M).$$

Покажем, что включение $I^{\rho}(M) \subset Fib^{c\circ p}(M)$ является гомотопической эквивалентностью. Для этого зафиксируем произвольный слой $\widetilde{F}_0$ расслоения $c \circ p$ и произвольную непрерывную сюръекцию

$$\phi : \widetilde{F}_0 \times [0,1] \to M,$$

гомеоморфно отправляющую каждый слой $\widetilde{F}_0 \times \{t\}$, $t \in [0,1]$, в тот или иной слой расслоения $c \circ p$ и такую, что композиция $c \circ p \circ \phi$ индуцирует гомеоморфизм между фактор-пространством $[0,1]/\{0,1\}$ и окружностью S_c^1. Обозначим через L подгруппу $\mathrm{id}_{\widetilde{F}_0} \times Homeo_1([0,1])$ в $Homeo_1(\widetilde{F}_0 \times [0,1])$. Заметим, что L изоморфна стягиваемой группе $Homeo_1([0,1])$, а отображение ϕ индуцирует мономорфизм $\phi_* : L \to Fib_1^{c\circ p}(M)$. Как нетрудно удостовериться, подгруппы $I^{\rho}(M)$ и $\phi_*(L)$ замкнуты в $Fib^{c\circ p}(M)$, а любой элемент $g \in Fib^{c\circ p}(M)$ единственным образом представляется в виде произведения $g = ab$ с $a \in I^{\rho}(M)$ и $b \in \phi_*(L)$. Из указанных свойств в силу утверждения 1 и леммы 1 вытекает, что отображение

$$I^{\rho}(M) \times \phi_*(L) \to Fib^{c\circ p}(M), \quad a \times b \mapsto ab,$$

является гомеоморфизмом. Отсюда в силу стягиваемости $\phi_*(L)$ следует, что включение $I^{\rho}(M) \subset Fib^{c\circ p}(M)$ есть гомотопическая эквивалентность.

Покажем, что и включение $I^{\rho}(M) \subset Fib^{p}(M)$ является гомотопической эквивалентностью. Пусть $\widetilde{\rho}$ — метрика на S_p^1, индуцированная накрытием $c : S_p^1 \to S_c^1$ и метрикой ρ на S_c^1, а $I^{\widetilde{\rho}}(M)$ — подгруппа тех элементов в $Fib^{p}(M)$, у которых проекция в S^1_p является изометрией по отношению к $\widetilde{\rho}$. Из условия о связности слоя F элементарными рассуждениями выводится, что $I^{\widetilde{\rho}}(M)$ совпадает с $I^\rho(M)$. Применяя к включению $I^\rho(M) = I^{\widetilde{\rho}}(M) \subset Fib^p(M)$ ту же схему рассуждений, что и к включению $I^\rho(M) \subset Fib^{c\circ p}(M)$, видим, что оно является гомотопической эквивалентностью.

Отсюда в силу утверждения 4 вытекает, что и включение $Fib^{c\circ p}(M) \subset Fib^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью.

Из того, что включение $Fib^{c\circ p}(M) \subset Fib^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью, следует, что и включение $Fib^{c\circ p}_1(M) \subset Fib^p_1(M)$ — гомотопическая эквивалентность, поскольку $Fib^{c\circ p}_1(M)$ и $Fib^p_1(M)$ определены как компоненты подгрупп $Fib^{c\circ p}(M)$ и $Fib^p(M)$, содержащие тождественное отображение. □

Следствие 2. *Пусть $p : M \to S^1$ — локально тривиальное расслоение с компактным связным метризуемым слоем, а $c : S^1 \to S^1$ — накрытие. Тогда*

(1) *расслоение p обладает свойством Бирман — Хильдена тогда и только тогда, когда им обладает $c \circ p$,*

(2) *включение $Fib^p_1(M) \subset Homeo_1(M)$ есть гомотопическая эквивалентность, если и только если включение $Fib^{c\circ p}_1(M) \subset Homeo_1(M)$ таково.*

Доказательство. Поскольку расслоенное пространство E относится к классу Бирман — Хильдена тогда и только тогда, когда компонента $Homeo_1(E)$ группы $Homeo(E)$ кроме компоненты $Fib_1(E)$ подгруппы $Fib(E)$ не содержит ни одной другой компоненты этой подгруппы, первое утверждение следствия вытекает из того, что $Fib^{c\circ p}(M)$ лежит в $Fib^p(M)$ и включение $Fib^{c\circ p}(M) \subset Fib^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью (предложение 1), что указывает, в частности, на наличие естественной биекции между компонентами подгрупп $Fib^{c\circ p}(M)$ и $Fib^p(M)$.

Второе утверждение следствия вытекает из того, что $Fib^{c\circ p}_1(M)$ лежит в $Fib^p_1(M)$ и включение $Fib^{c\circ p}_1(M) \subset Fib^p_1(M)$ является гомотопической эквивалентностью (в силу того же предложения 1), и утверждения 4. □

4. Доказательство теорем 1 и 3 в случае $n = 1$

Для расслоения-гомеоморфизма $p : S^1 \to S^1$, когда слой является точкой, утверждения теорем 1 и 3 выполняются, поскольку каждая изотопия между автогомеоморфизмами расслоенной на точки окружности автоматически послойна, т. е. в этом случае $Homeo_1(M) = Fib_1(M)$. Случай неоднолистного накрытия $S^1 \to S^1$ вытекает отсюда в силу следствия 2: утверждения теорем 1 и 3 для случая накрытия следуют из пп. (1), (2) следствия 2 соответственно.

5. Доказательство теоремы 1 в случае $n = 2$

Следствия 1 и 2 (п. (1)) сводят ситуацию к случаю расслоения со связным слоем, так что для доказательства теоремы 1 при $n = 2$ достаточно рассмотреть случай слоя, гомеоморфного окружности, и случай слоя, гомеоморфного отрезку.

5.1. Случай слоя, гомеоморфного окружности. Этот случай выводится из теоремы 4. Тот факт, что гомотопные автогомеоморфизмы окружности изотопны, т. е.

$$Map_1(S^1, S^1) \cap Homeo(S^1) = Homeo_1(S^1),$$

хорошо известен и вытекает из многих классических конструкций (см., к примеру, [34, 35]). Из второго (двойного) условия теоремы 4 выполняется вторая часть условия — о том, что включение $Homeo_1(S^1) \subset Map_1(S^1, S^1)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (см. нижеследующее предложение 2).

Предложение 2. *Включение $Homeo_1(S^1) \subset Map_1(S^1, S^1)$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Рассмотрим естественное вложение

$$SO(2) \subset Homeo_1(S^1) \subset Map_1(S^1, S^1),$$

где под $SO(2)$ понимаются евклидовы повороты евклидовой окружности. То, что вложение $SO(2) \subset Homeo_1(S^1)$ есть гомотопическая эквивалентность, доказывается, например, в [36, предложение 4.2] (также см. [37, лемма 3.3]). То, что вложение $SO(2) \subset Map_1(S^1, S^1)$ есть гомотопическая эквивалентность, следует, например, из результатов о так называемых H_*-пространствах, доказанных в [38] (см. также [39; 40, теорема (2.2); 41, 42; 43, теорема 5.1]). Отсюда в силу утверждения 4 получаем требуемое. □

5.2 Случай слоя, гомеоморфного отрезку. В этой части утверждение теоремы 1 выводится из теоремы 5. Укажем результаты, из которых следует, что в случае, когда слой есть отрезок, в теореме 1 выполняются условия теоремы 5.

То, что у отрезка не имеется пары автогомеоморфизмов, связанных тождественной на крае гомотопией, но не связанных тождественной на крае изотопией, доказывается трюком Александера (см. [44] и [45, теорема 1.1.1]). Трюк Александера показывает, что пространство группы $Homeo([0, 1])$ состоит из двух компонент: компонента $Homeo_1([0, 1])$ включает автогомеоморфизмы, тождественные на концах отрезка, вторая компонента — автогомеоморфизмы, меняющие концы местами; и остается заметить, что автогомеоморфизмы из разных компонент очевидно не связаны тождественной на крае гомотопией.

Односвязность (более того, стягиваемость) пространства группы $Homeo_1([0, 1])$ также доказывается применением трюка Александера (см. [45, теорема 1.1.1] и [44]).

То, что сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности, вытекает из рассмотренного выше случая $n = 1$ теорем 1 и 3 соответственно.

6. Доказательство теоремы 3 в случае $n = 2$

При $n = 2$ замкнутое расслоенное n-мерное многообразие из теоремы 3 — это тор либо бутылка Клейна, а слой расслоения — набор окружностей. Следствия 1 и 2 (п. (2)) сводят ситуацию к случаю связного слоя, т. е. достаточно провести доказательство только для случая, когда слой — это окружность.

Итак, пусть дано расслоение $p : E \to S^1$ со слоем окружность (а пространство E есть тор или бутылка Клейна). Введем на E локально евклидову метрику так, чтобы все слои расслоения p являлись геодезическими, обозначим через $I_1(E)$ содержащую тождественное отображение компоненту группы изометрий пространства E и рассмотрим тождественные включения

$$I_1(E) \subset Fib_1(E) \subset Homeo_1(E).$$

В случае тора $E = T = S^1 \times S^1$ пространство группы $I_1(E)$ гомеоморфно тору, а в случае бутылки Клейна $E = K$ группа $I_1(K)$ изоморфна группе $SO(2)$

(проходу вдоль окружности $SO(2)$ отвечает двойной поворот вдоль базы расслоения). В [46] и в [47] доказывается, что включения $I_1(T) \subset Homeo_1(T)$ и $I_1(K) \subset Homeo_1(K)$ являются слабыми гомотопическими эквивалентностями; задействованные пространства сепарабельны, метризуемы (утверждение 1) и являются АОР для класса метрических пространств (см. [48]); отсюда в силу теорем 6 и 7 следует, что указанные включения являются и гомотопическими эквивалентностями. Убедимся в том, что в каждом из случаев $E = T$ и $E = K$ включение $I_1(E) \subset Fib_1(E)$ является гомотопической эквивалентностью. Доказываемое утверждение о том, что $Fib_1(E) \subset Homeo_1(E)$ есть гомотопическая эквивалентность, последует отсюда в силу утверждения 4.

Случай тора. Покажем, что включение $I_1(T) \subset Fib_1(T)$ есть гомотопическая эквивалентность.

Для этого заметим сперва, что группа $Fib_1(T)$ замкнута в $Homeo(T)$, поскольку в силу доказанного выше случая $n = 2$ теоремы 1 выполняется равенство $Fib_1(T) = Homeo_1(T) \cap Fib(T)$,[1] а группы $Homeo_1(T)$ и $Fib(T)$ замкнуты в $Homeo(T)$ в силу утверждений 2 и 3. Отсюда следует, что группа $Fib_1(T)$ польская, будучи замкнутой подгруппой польской группы $Homeo(T)$ (см. утверждение 1).

Далее, выберем в T произвольную точку x и обозначим через $Fib_1(T, x)$ подгруппу в $Fib_1(T)$, образованную гомеоморфизмами, переводящими x в x. Как нетрудно удостовериться, подгруппы $I_1(T)$ и $Fib_1(T, x)$ замкнуты в $Fib_1(T)$, а любой элемент $g \in Fib_1(T)$ единственным образом представляется в виде произведения $g = ab$ с $a \in I_1(T)$ и $b \in Fib_1(T, x)$, т. е.

$$I_1(T)Fib_1(T, x) = Fib_1(T), \quad I_1(T) \cap Fib_1(T, x) = \{\mathrm{id}_T\}.$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем, что отображение

$$I_1(T) \times Fib_1(T, x) \to Fib_1(T), \quad a \times b \mapsto ab,$$

является гомеоморфизмом.

Теперь покажем, что пространство группы $Fib_1(T, x)$ стягиваемо. Для этого зафиксируем какое-нибудь проходящее через точку x сечение γ расслоения $T = E \to S^1$ и рассмотрим следующие подгруппы G_1, G_2 и G_3 в $Fib_1(T, x)$:

G_1 — подгруппа, состоящая из всех тождественных на γ внутрислойных[2] автогомеоморфизмов из $Fib_1(T, x)$,

G_2 — подгруппа тех внутрислойных автогомеоморфизмов из $Fib_1(T, x)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией (по отношению к сужениям на слои исходной локально евклидовой метрики на E),

G_3 — подгруппа тех элементов из $Fib_1(T, x)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией (по отношению к сужениям на слои исходной локально евклидовой метрики на E) между слоями и при этом переводящих γ в γ.

---

[1] Заметим, что в случае локально тривиально расслоенного над окружностью многообразия N с компактным слоем M подгруппа $Fib_1(N)$ замкнута безотносительно к принадлежности расслоения к классу Бирман — Хильдена. Это можно доказать, пользуясь локальной стягиваемостью (теорема Чернавского [27]) пространства группы автогомеоморфизмов слоя M: из локальной односвязности пространства $Homeo(M)$ выводится локальная линейная связность подгруппы $Fib_1(N)$.

[2] Послойный автогомеоморфизм расслоенного пространства называется *внутрислойным* или *внутрислоевым*, если каждый слой переводится этим автогомеоморфизмом в тот же слой.

Из определений ясно, что пространства групп G_1, G_2 и G_3 гомеоморфны (очевидно, стягиваемым) пространству свободных петель в $Homeo_1([0,1])$, пространству петель в $\mathbb{R}^1$ с базовой точкой в нуле и пространству $Homeo_1([0,1])$ соответственно. Таким образом, каждая из подгрупп G_1, G_2 и G_3 стягиваема. Кроме того, как следует из простых соображений, каждая из подгрупп G_1, G_2 и G_3 замкнута в $Fib_1(T,x)$, а каждый элемент $g \in Fib_1(T,x)$ единственным образом представим в виде произведения $g = abc$ с $a \in G_1$, $b \in G_2$ и $c \in G_3$. Отсюда в силу утверждения 1 и леммы 1 вытекает, что пространство группы $Fib_1(T,x)$ стягиваемо.

Таким образом, группа $Fib_1(T)$ тривиально расслаивается над подгруппой $I_1(T)$ со стягиваемым слоем, так что включение $I_1(T) \subset Fib_1(T)$ есть гомотопическая эквивалентность.

Случай бутылки Клейна K. Покажем, что включение $I_1(K) \subset Fib_1(K)$ есть гомотопическая эквивалентность. Схема доказательства следует схеме для случая тора.

Заметим сперва, что группа $Fib_1(K)$ польская, будучи замкнутой подгруппой польской группы $Homeo(K)$ (см. утверждение 1). (Как и в случае тора, группа $Fib_1(K)$ замкнута в $Homeo(K)$, поскольку в силу рассмотренного выше случая $n = 2$ теоремы 1 выполняется равенство $Fib_1(K) = Homeo_1(K) \cap Fib(K)$, а группы $Homeo_1(K)$ и $Fib(K)$ замкнуты в $Homeo(K)$ в силу утверждений 2 и 3.)

Далее, выберем и обозначим через m один из слоев расслоения p. Пусть $Fib_1(K,m)$ — подгруппа в $Fib_1(K)$, образованная элементами, переводящими m в m с сохранением ориентации. Как нетрудно удостовериться, подгруппы $I_1(K)$ и $Fib_1(K,m)$ замкнуты в $Fib_1(K)$, а каждый элемент $g \in Fib_1(K)$ единственным образом представляется в виде произведения $g = ab$ с $a \in I_1(K)$ и $b \in Fib_1(K,m)$.

Для проверки стягиваемости подгруппы $Fib_1(K,m)$ по аналогии со случаем тора зафиксируем какое-нибудь сечение γ расслоения $K = E \to S^1$ и рассмотрим следующие подгруппы в $Fib_1(K,m)$:

G'_1 — подгруппа, состоящая из всех тождественных на γ внутрислойных автогомеоморфизмов из $Fib_1(K,m)$,

G'_2 — подгруппа тех внутрислойных автогомеоморфизмов из $Fib_1(K,m)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией,

G'_3 — подгруппа тех элементов из $Fib_1(K,m)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией между слоями и при этом переводящей γ в γ.

Пространство группы G'_1 гомеоморфно пространству тождественных на крае послойных автогомеоморфизмов расслоенной над окружностью (со слоем отрезок) ленты Мёбиуса. Пространство группы G'_2 гомеоморфно пространству сечений расслоенной над окружностью открытой ленты Мёбиуса (со слоем, гомеоморфным вещественной прямой, возникающей здесь как универсальное накрывающее окружности — слоя расслоения p). Пространство группы G'_3 гомеоморфно пространству $Homeo_1([0,1])$. Проверка стягиваемости этих пространств — несложное упражнение.

Дальнейшая аргументация дословно повторяет финальные рассуждения в случае тора с точностью до замены подгруппы $Fib_1(T,x)$ подгруппой $Fib_1(K,m)$.

7. Доказательство теоремы 1 в случае $n = 3$

Следствия 1 и 2 (п. (1)) сводят ситуацию к случаю расслоения со связным слоем. Перейдем к анализу подслучаев.

7.1. Случай слоя — замкнутой поверхности. В случае, когда слой расслоения из теоремы 1 есть замкнутая связная поверхность, утверждение теоремы выводится из теоремы 4. Укажем, из каких результатов вытекает, что условия теоремы 4 здесь выполняются.

То, что гомотопные автогомеоморфизмы замкнутой поверхности изотопны, доказывается в [35][3]. (В [35] изложение ведется в рамках кусочно-линейной категории. Результат распространяется и на топологическую категорию. Действительно, пусть два автогомеоморфизма замкнутой поверхности гомотопны; поскольку всякий автогомеоморфизм поверхности изотопен кусочно-линейному [35, теорема A4], проблема сводится к случаю гомотопных кусочно-линейных автогомеоморфизмов; гомотопные кусочно-линейные автогомеоморфизмы кусочно-линейно гомотопны и, следовательно, кусочно-линейно изотопны [35, теоремы 6.3 и 6.4].)

То, что для всякой замкнутой связной поверхности X включение

$$Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$$

индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, вытекает из следующего предложения.

Предложение 3. *Если связная замкнутая поверхность F не является ни сферой S^2, ни проективной плоскостью P^2, то включение*

$$Homeo_1(F) \subset Map_1(F, F)$$

является гомотопической эквивалентностью. Если $F \in \{S^2, P^2\}$, то указанное включение индуцирует изоморфизм на уровне фундаментальных групп, но не является ни гомотопической эквивалентностью, ни слабой гомотопической эквивалентностью.

Доказательство сводится к сопоставлению известных результатов о пространствах групп $Homeo_1(F)$ и $Map_1(F, F)$. Необходимые результаты о $Homeo_1(F)$ содержатся в основном в серии работ [50–52, 46, 47] а о $Map_1(F, F)$ — в [53–55] (покрывающих случаи асферических поверхностей, сферы и проективной плоскости соответственно). Ниже приведена более подробная информация по каждому классу.

Напомним, что, поскольку для компактной поверхности F пространства $Homeo_1(F)$ и $Map_1(F, F)$ сепарабельны, метризуемы (см. утверждение 1 и, например, [56] соответственно) и являются АОР для класса метрических пространств (см. [48] и, например, [57, теорема 2.4, с. 186] соответственно), то в силу теорем 6 и 7 включение $Homeo_1(F) \subset Map_1(F, F)$ является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно является слабой гомотопической эквивалентностью.

Случай $\chi(F) < 0$. В случае замкнутой связной поверхности F отрицательной эйлеровой характеристики пространства групп $Homeo_1(F)$ и $Map_1(F, F)$

[3] Для случая замкнутой ориентируемой поверхности рода выше 1 этот факт доказан уже в [34, 49].

гомотопически тривиальны, так что включение $Homeo_1(F) \subset Map_1(F, F)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность. Гомотопическая тривиальность для $Homeo_1(F)$ доказывается в [50][4]. Гомотопическая тривиальность для $Map_1(F, F)$ следует из [53, следствие III.2], где утверждается, что для линейно связного асферического полиэдра X, у которого центр фундаментальной группы тривиален, пространство группы $Map_1(X, X)$ стягиваемо.

Случай тора. В случае тора $T = S^1 \times S^1$ имеется естественное вложение

$$T \subset Homeo_1(T) \subset Map_1(T, T),$$

доставляемое изометриями тора, снабженного локально евклидовой метрикой. В [46] доказывается, что включение $T \subset Homeo_1(T)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность. Слабая гомотопическая эквивалентность для включения $T \subset Map_1(T, T)$ следует из известной теоремы [53, теорема III.2], дающей описание слабого гомотопического типа для асферических (локально конечных линейно связных симплициальных) полиэдров.[5] (Для отображений в пространства Эйленберга — Маклейна с абелевой группой описание слабого гомотопического типа было известно и ранее (см. [58]); подробности см. в обзорах [59, разд. 2.1; 60, разд. 2.1.2].) Следовательно, включение $Homeo_1(T) \subset Map_1(T, T)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность.

Случай бутылки Клейна. В случае бутылки Клейна K имеется естественное вложение

$$SO(2) \subset Homeo_1(K) \subset Map_1(K, K),$$

где вложение $SO(2) \subset Homeo_1(K)$ отвечает двойному повороту вдоль базы при представлении бутылки Клейна в виде расслоения над окружностью со слоем окружность (см. [47, разд. 4]). В [47] доказывается, что включение $SO(2) \subset Homeo_1(K)$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Из конструкции доказательства вышеупомянутой теоремы III.2 в [53] следует, что включение $SO(2) \subset Map_1(K, K)$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Таким образом, включение $Homeo_1(K) \subset Map_1(K, K)$ является слабой гомотопической эквивалентностью.

Случай сферы. В случае сферы S^2 имеется естественное вложение

$$SO(3) \subset Homeo_1(S^2) \subset Map_1(S^2, S^2),$$

где под $SO(3) \subset Homeo_1(S^2)$ понимаются евклидовы повороты. Кнезер показал [61], что образ включения $SO(3) \subset Homeo_1(S^2)$ является деформационным ретрактом для $Homeo_1(S^2)$, а Хансен доказывает [54, с. 364; 62, с. 44], что включение $SO(3) \subset Map_1(S^2, S^2)$ дает изоморфизм фундаментальных групп, не будучи при этом гомотопической эквивалентностью (и, следовательно, поскольку мы имеем дело с АОР, не будучи и слабой гомотопической эквивалентностью;

[4] Таким образом, в случае замкнутой поверхности отрицательной эйлеровой характеристики выполняются оба альтернативных условия теоремы 4: и об индуцированном включением $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$ изоморфизме фундаментальных групп, и об односвязности пространства группы $Homeo_1(X)$.

[5] Здесь и далее в аналогичных случаях непосредственно в формулировках указываемых утверждений речь как правило идет лишь об изоморфизмах групп, а то, что эти изоморфизмы индуцированы интересующими нас вложениями пространств, видно из конструкций доказательств.

см. теоремы 6 и 7). Отсюда следует, что и $Homeo_1(S^2) \subset Map_1(S^2, S^2)$ дает изоморфизм фундаментальных групп, не являясь при этом слабой гомотопической эквивалентностью.

Случай проективной плоскости. В случае проективной плоскости P^2 имеется естественное вложение

$$SO(3) \subset Homeo_1(P^2) \subset Map_1(P^2, P^2).$$

В [47] показано (см. доказательство теоремы 3.2 и разд. 5 в [47]), что вложение $SO(3) \subset Homeo_1(P^2)$ является слабой гомотопической эквивалентностью. В [55] доказывается, что включение $SO(3) \subset Map_1(P^2, P^2)$ не является гомотопической эквивалентностью (и, следовательно, поскольку имеем дело с АОР, не является и слабой гомотопической эквивалентностью; см. теоремы 6 и 7), однако из результатов [55] следует (см. пояснения с вычислениями фундаментальной группы $\pi_1(Map_1(P^2, P^2))$ в [63, замечание 3.2]), что включение $SO(3) \subset Map_1(P^2, P^2)$ дает изоморфизм фундаментальных групп. Отсюда следует, что и $Homeo_1(P^2) \subset Map_1(P^2, P^2)$ индуцирует изоморфизм на уровне фундаментальных групп, но не является слабой гомотопической эквивалентностью. □

7.2. Случай, когда слой есть поверхность с краем. Этот случай теоремы 1 выводится из теоремы 5. Укажем результаты, из которых следует, что в случае, когда слой есть связная компактная поверхность с непустым краем, в теореме 1 выполняются условия теоремы 5.

То, что автогомеоморфизмы поверхности с краем, связанные тождественной на крае гомотопией, связаны и тождественной на крае изотопией, доказывается в [35, теоремы 6.3 и 6.4].[7)]

В случае, когда X — связная компактная поверхность с непустым краем, односвязность (более того, стягиваемость) пространства группы $Homeo_1(X; [\partial X])$ доказывается в серии работ [50–52, 46, 47] (конечно же, случай диска следует уже из результатов Александера [44]).

То, что сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности, вытекает из рассмотренного выше случая $n = 2$ в теоремах 1 и 3 соответственно.

8. Доказательство теоремы 2

Следствия 1 и 2 (п. (1)) сводят общий случай теоремы 2 к случаю расслоения со связным слоем. В случае связного слоя утверждение теоремы 2 следует из теоремы 4 в силу результатов из [64, 65]. В [64] доказывается, среди прочего, что гомотопные автогомеоморфизмы ориентируемого замкнутого хакенова многообразия M изотопны (первое условие для слоя из теоремы 4), а в [65] доказывается, что включение $Homeo_1(M) \subset Map_1(M, M)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (второе условие для слоя из теоремы 4). См. также [66], где доказывается более сильный результат о гомотопической эквивалентности. В указанных работах используются кусочно-линейная и гладкая категории; как указано в [66, с. 343], переход между ними и топологической

[7)] В формулировках теорем 6.3 и 6.4 в [35] речь идет о гомотопиях и изотопиях без ограничения тождественности на крае, но в приведенном в [35] доказательстве этих теорем ситуация сводится именно к случаю тождественных на крае и нужный нам факт доказывается.

категорией обеспечивается триангуляционными теоремами Бинга и Мойза и доказанной Хэтчером в [67] гипотезой Смейла.

Благодарности. Автор признателен Ю. С. Белоусову, И. А. Дынникову, С. С. Подкорытову и Е. А. Фоминых за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малютин А. В.* Расслоения Бирман — Хильдена. I // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 127–141.

2. *Birman J. S., Hilden H. M.* On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces // Ann. Math. Stud. 1971. V. 66. P. 81–115.

3. *Birman J. S., Hilden H. M.* Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin's braid group // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. P. 1002–1004.

4. *Birman J. S., Hilden H. M.* Lifting and projecting homeomorphisms // Arch. Math. (Basel). 1972. V. 23. P. 428–434.

5. *Birman J. S., Hilden H. M.* On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces // Ann. Math. (2). 1973. V. 97. P. 424–439.

6. *Birman J. S., Hilden H. M.* Erratum to 'On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces' // Ann. Math. (2). 2017. V. 185. P. 345.

7. *Zieschang H.* On the homeotopy group of surfaces // Math. Ann. 1973. V. 206. P. 1–21.

8. *Maclachlan C., Harvey W. J.* On mapping-class groups and Teichmüller spaces // Proc. Lond. Math. Soc. 1975. V. 30. P. 496–512.

9. *Berstein I., Edmonds A. L.* On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 247. P. 87–124.

10. *Fuller T.* On fiber-preserving isotopies of surface homeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. P. 1247–1254.

11. *Aramayona J., Leininger C. J., Souto J.* Injections of mapping class groups // Geom. Topol. 2009. V. 13. P. 2523–2541.

12. *Winarski R. R.* Symmetry, isotopy, and irregular covers // Geom. Dedicata. 2015. V. 177. P. 213–227.

13. *Ghaswala T., Winarski R. R.* Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres // Michigan Math. J. 2017. V. 66. P. 885–890.

14. *Atalan F., Medetogullari E.* The Birman–Hilden property of covering spaces of nonorientable surfaces // Ukraïn. Mat. Zh. 2020. V. 72, N 3. P. 307–315.

15. *Margalit D., Winarski R. R.* Braids groups and mapping class groups: The Birman–Hilden theory // Bull. London Math. Soc. 2021. V. 53, N 3. P. 643–659.

16. *Kolbe B., Evans M. E.* Isotopic tiling theory for hyperbolic surfaces // Geom. Dedicata. 2021. V. 212. P. 177–204.

17. *Dey S., Dhanwani N. K., Patil H., Rajeevsarathy K.* Generating the liftable mapping class groups of regular cyclic covers. 2021. 14 p. arXiv:2111.01626v1 [math.GT].

18. *Vogt E.* Projecting isotopies of sufficiently large P^2-irreducible 3-manifolds // Arch. Math. (Basel). 1977. V. 29, N 6. P. 635–642.

19. *Ohshika K.* Finite subgroups of mapping class groups of geometric 3-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39, N 3. P. 447–454.

20. *Friedman J. L., Witt D. M.* Homotopy is not isotopy for homeomorphisms of 3-manifolds // Topology. 1986. V. 25, N 1. P. 35–44.

21. *Artin E.* Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.

22. *Morton H. R.* Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial // Topology. 1978. V. 17. P. 101–104.

23. *Burde G., Zieschang H.* Knots. Berlin: Walter de Gruyter, 1985. (de Gruyter Stud. Math.; V. 5).

24. *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. New York: Springer, 2008. (Grad. Texts Math.; V. 247).

25. *McCoy R. A.* Completely metrizable spaces of embeddings // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 84, N 3. P. 437–442.

26. *Kuratowski C.* Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques // Fund. Math. 1931. V. 17. P. 249–272.

27. *Чернавский А. В.* Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия // Мат. сб. 1969. Т. 79, № 3. С. 307–356.

28. *Чернавский А. В.* Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ // Геометрия, топология и математическая физика. I. Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова. Труды МИАН. Т. 263. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2008. С. 201–215.

29. *Rosendal C.* Coarse geometry of topological groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2021. (Camb. Tracts Math.; V. 223).

30. *Viro O. Ya., Ivanov O. A., Netsvetaev N. Yu., Kharlamov V. M.* Elementary topology: Problem textbook. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008.

31. *Whitehead J. H. C.* Combinatorial homotopy. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 213–245.

32. *Milnor J.* On spaces having the homotopy type of a CW-complex // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 90, N 2. P. 272–280.

33. *Hanner O.* Some theorems on absolute neighborhood retracts // Arkiv Mat. 1951. V. 1. P. 389–408.

34. *Baer R.* Kurventypen auf Flächen // J. Reine Angew. Math. 1927. V. 156. P. 231–246.

35. *Epstein D. B. A.* Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. 1966. V. 115. P. 83–107.

36. *Ghys É.* Groups acting on the circle // Enseign. Math. (2). 2001. V. 47, N 3–4. P. 329–407.

37. *McCarty (Jr.) G. S.* Homeotopy groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 293–304.

38. *Wada H.* On the space of mappings of a sphere on itself // Ann. of Math. (2). 1956. V. 64. P. 420–435.

39. *Wada H.* Note on some mapping spaces // Tohoku Math. J. (2). 1958. V. 10, N 2. P. 143–145.

40. *Koh S. S.* Note on the homotopy properties of the components of the mapping space X^{S^p} // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 896–904.

41. *Adams J. F.* On the nonexistence of elements of Hopf invariant one // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V. 64. P. 279–282.

42. *Adams J. F.* On the non-existence of elements of Hopf invariant one // Ann. Math. (2). 1960. V. 72. P. 20–104.

43. *Hansen V. L.* The homotopy problem for the components in the space of maps on the n-sphere // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1974. V. 25. P. 313–321.

44. *Alexander J. W.* On the deformation of an n-cell // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1923. V. 9. P. 406–407.

45. *Hamstrom M.-E.* Homotopy in homeomorphism spaces, TOP and PL // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. P. 207–230.

46. *Hamstrom M.-E.* The space of homeomorphisms on a torus // Illinois J. Math. 1965. V. 9. P. 59–65.

47. *Hamstrom M.-E.* Homotopy properties of the space of homeomorphisms on P^2 and the Klein bottle // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 120. P. 37–45.

48. *Luke R., Mason W. K.* The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 275–285.

49. *Baer R.* Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen // J. Reine Angew. Math. 1928. V. 159. P. 101–116.

50. *Hamstrom M.-E.* Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold // Illinois J. Math. 1966. V. 10. P. 563–573.

51. *Hamstrom M.-E., Dyer E.* Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold // Duke Math. J. 1958. V. 25. P. 521–531.

52. *Hamstrom M.-E.* Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes // Duke Math. J. 1962. V. 29. P. 657–662.

53. *Gottlieb D. H.* A certain subgroup of the fundamental group // Amer. J. Math. 1965. V. 87. P. 840–856.

54. *Hansen V. L.* The homotopy groups of a space of maps between oriented closed surfaces // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15, N 4. P. 360–364.

55. *Yamanoshita T.* On the space of self-homotopy equivalences of the projective plane // J. Math. Soc. Japan. 1993. V. 45. P. 489–494.

56. *Arens R.* A topology for spaces of transformations // Ann. Math. 1946. V. 47. P. 480–495.

57. *Hu S. T.* Theory of retracts. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1965.

58. *Thom R.* L'homologie des espaces fonctionnels // Colloque de topologie algébrique (Louvain, 1956). Georges Thone, Liège. Paris: Masson, 1957. P. 29–39.
59. *Rutter J. W.* Spaces of homotopy self-equivalences. Berlin: Springer-Verl., 1997. (Lect. Notes Math.; V. 1662).
60. *Smith S. B.* The homotopy theory of function spaces: A survey // Homotopy theory of function spaces and related topics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010. (Contemp. Math.; V. 519). P. 3–39.
61. *Kneser H.* Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen // Math. Z. 1926. V. 25, N 1. P. 362–372.
62. *Hansen V. L.* The space of self-maps on the 2-sphere // Groups of self-equivalences and related topics (Montreal, PQ, 1988). Berlin: Springer, 1990. (Lect. Notes Math.; V. 1425). P. 40–47.
63. *Gonçalves D. L., Spreafico M.* The fundamental group of the space of maps from a surface into the projective plane // Math. Scand. 2009. V. 104, N 2. P. 161–181.
64. *Waldhausen F.* On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // Ann. Math. (2). 1968. V. 87. P. 56–88.
65. *Laudenbach F.* Topologie de la dimension trois: homotopie et isotopie. Paris: Sot. Math. de France, 1974. (Astérisque; V. 12).
66. *Hatcher A.* Homeomorphisms of sufficiently large P^2-irreducible 3-manifolds // Topology. 1976. V. 15, N 4. P. 343–347.
67. *Hatcher A.* A proof of the Smale conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq O(4)$ // Ann. Math. (2). 1983. V. 117, N 3. P. 553–607.

Поступила в редакцию 3 августа 2023 г.
После доработки 27 ноября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Малютин Андрей Валерьевич (ORCID 0000-0002-4512-0124)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
ул. Губкина, 8, Москва 119991;
Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
malyutin@pdmi.ras.ru