Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 510.6

ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ СВОЙСТВО КРЕЙГА В ПРЕДТАБЛИЧНЫХ ЛОГИКАХ

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Аннотация. Ранее были описаны все предтабличные расширения минимальной логики и решена проблема табличности. Всего над минимальной логикой оказалось семь предтабличных логик. Доказано, что четыре из них имеют интерполяционное свойство Крейга CIP и две не имеют. В данной статье решается вопрос о свойстве CIP в седьмой логике. Доказано, что она обладает интерполяционным свойством Крейга.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.209

Ключевые слова: минимальная логика, табличность, предтабличная логика, интерполяционное свойство.

Введение

В статье исследуется проблема интерполяции в расширениях минимальной логики J Йохансона [1]. Мы рассматриваем интерполяционное свойство Крейга [2] в предтабличных логиках.

Для класса суперинтуиционистских логик, которые составляют подкласс класса J-логик, проблема интерполяции подробно изучена. В [3] доказана разрешимость интерполяционного свойства Крейга CIP в расширениях интуиционистской логики Int и описаны все суперинтуиционистские логики с этим свойством. При этом оказалось, что существуют точно восемь суперинтуиционистских логик со свойством CIP, включая тривиальную логику For. При переходе к более широкому классу J-логик задача существенно усложняется. Известно, что сама логика J и наиболее важные ее расширения обладают свойством CIP [4]. В то же время неизвестно, конечно или бесконечно число J-логик с этим свойством.

Будем рассматривать предтабличные расширения минимальной логики J. Логика является *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны. Напомним, что логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью.

В [5] доказана разрешимость над J проблемы табличности: доказано существование алгоритма, который для любой конечно аксиоматизируемой логики, содержащей J, устанавливает, является ли эта логика табличной. Для решения проблемы табличности над минимальной логикой потребовалось описание предтабличных логик над J. В [5] описаны все предтабличные логики над минимальной логикой, их оказалось семь. Найдены их аксиоматизация и семантическая характеризация в терминах шкал Крипке, доказана узнаваемость над J.

Работа выполнена в рамках FWNF-2022-0011.

В [6] исследовалась проблема интерполяции для предтабличных логик. Доказано, что четыре из семи предтабличных логик обладают интерполяционным свойством Крейга CIP и две не имеют CIP. Вопрос об интерполяционном свойстве Крейга CIP в седьмой логике PJ7 был открыт.

В данной работе решается о свойстве CIP в логике PJ7. Из [6] следует, что логика PJ7 является конечнослойной предгейтинговой логикой, т. е. конечнослойным расширением логики $\mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to p)$. В [7] исследовалась проблема интерполяции в конечнослойных предгейтинговых логиках. Для этого использовались алгебраические критерии и была введена новая серия алгебр. Доказано, что существует лишь конечное число конечнослойных предгейтинговых логик со свойством CIP. Мы докажем, что логика PJ7 совпадает с одной из них и, следовательно, обладает интерполяционным свойством Крейга.

1. Предварительные сведения

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&, \vee, \to, \bot, \top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. *Длиной формулы* A называем число вхождений символа импликации в формулу A.

Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+, и единственное правило вывода modus ponens.

Под J-*логикой* понимается любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки. Если A — произвольная формула, через $L + A$ обозначаем наименьшую логику, содержащую $L \cup \{A\}$. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p), \quad \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot,$$

$$\mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)), \quad \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \vee (q \to p)),$$

$$\mathrm{NE} = \mathrm{Neg} + (p \vee (p \to q)), \quad \mathrm{Od} = \mathrm{J} + \neg\neg(\bot \to p).$$

Суперинтуиционистской логикой (с.и.л.) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* — J-логика, содержащая логику Neg. Логика называется *предгейтинговой*, если она содержит логику Od.

Пишем $\Gamma \vdash_L A$, если формула A выводима из $L \cup \Gamma$ посредством правила modus ponens: $B, B \to C / C$.

В [8] введена классификация J-логик с помощью слоев, продолжающая классификацию суперинтуиционистских логик [9]. Обозначим

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n).$$

Будем говорить, что L есть логика $(n+1)$-*го слоя*, $n \geq 0$, если $L \vdash \pi_{n+1}$ и $L \nvdash \pi_n$; For — это единственная логика нулевого слоя. L — логика *конечного слоя* (или *конечнослойная логика*), если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного слоя* в противном случае. Заметим, что все слои непусты и попарно не пересекаются.

В [8] доказано, что любая конечнослойная J-логика финитно аппроксимируема, т. е. характеризуется некоторым классом конечных моделей. Характеризация J-логик бесконечного слоя также найдена в [8].

Напомним, что логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью. Логика называется *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны. Известно, что логика над J является табличной, если и только если она не содержится ни в одной из предтабличных логик.

Следующая теорема, доказанная в [5], дает аксиоматизацию предтабличных J-логик.

Теорема 1.1. *Существуют точно семь предтабличных логик над* J, *а именно:*

• *три предтабличные суперинтуиционистские логики:*
$\mathrm{PJ1} = \mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p))$,
$\mathrm{PJ2} = \mathrm{LP}_2 = \mathrm{Int} + \pi_2$,
$\mathrm{PJ3} = \mathrm{LQ}_3 = \mathrm{Int} + \pi_3 + (\neg p \vee \neg\neg p)$,
• *две предтабличные негативные логики:*
$\mathrm{PJ4} = \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \vee (q \to p))$,
$\mathrm{PJ5} = \mathrm{NP}_2 = \mathrm{Neg} + \pi_2$,
• $\mathrm{PJ6} = \mathrm{J} + \pi_2 + (\bot \to \pi_1) + (p \vee \neg p)$,
• $\mathrm{PJ7} = \mathrm{J} + \pi_2 + (\bot \to \pi_1) + \neg\neg(\bot \to p) + (\neg p \vee \neg\neg p)$.

Там же найдена семантическая характеризация всех предтабличных логик в терминах шкал Крипке и доказана узнаваемость предтабличных логик над минимальной логикой J.

Напомним, что конечно аксиоматизируемая логика $L_1 \supseteq L_0$ *узнаваема над* L_0 [10], если и только если существует алгоритм, который по любой формуле A узнает, верно ли равенство $L_0 + A = L_1$.

Если $\mathbf{p}$ — список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$.

Говорят, что логика L обладает *интерполяционным свойством Крейга CIP* [4, 11], если она удовлетворяет следующему условию (здесь списки $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \to B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

Формула $C(\mathbf{p})$ называется *интерполянтом.*

В [6] доказана

Теорема 1.2. *Логики* PJ1, PJ2, PJ4, PJ6 *имеют интерполяционное свойство Крейга* CIP*; логики* PJ3, PJ5 *не имеют* CIP.

Вопрос об интерполяционном свойстве CIP для логики PJ7 был открыт. Однако легко видеть, что логика PJ7 является конечнослойной предгейтинговой логикой. В [7] доказано, что существует лишь конечное число конечнослойных предгейтинговых логик со свойством CIP. В разд. 4 будет доказано, что логика PJ7 совпадает с одной из них.

2. Модифицированная семантика Крипке, характеризация логик PJ1–PJ7

Семантика типа Крипке для логики J была предложена Сегербергом [12]. Мы используем модифицированную семантику, введенную в [13].

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию

$$x \in X,\ x \leq y \Rightarrow y \in X.$$

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W — непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞, Q — конус множества W, содержащий ∞.

Шкалу $(W_1, \leq_1, Q_1)$ будем называть *конусом шкалы* $(W, \leq, Q)$, если W_1 — конус множества W, $\leq_1 = \leq \cap W_1^2$ и $Q_1 = Q \cap W_1$.

Элемент $x \in W$ называем *нормальным*, если $x \in W - Q$, и *ненормальным* в противном случае. Элементы из $W - \{\infty\}$ называем *существенными*, а элемент ∞ — *несущественным*. *Высота шкалы* $h(\mathbf{W})$ определяется как супремум длин конечных цепей в $W - \{\infty\}$.

Моделью называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ — шкала, $\models$ — отношение между элементами множества W и формулами, удовлетворяющее условиям:

(1) $x \models p$, $x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p;

(2) $\infty \models p$ для любой переменной p;

(3) $x \models \bot \iff x \in Q$;

(4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;

(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;

(6) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Будем говорить, что *модель* $M = (W, \leq, Q, \models)$ *основана на шкале* $(W, \leq, Q)$.

Известна следующая

Лемма 2.1. *Для любой модели M верно:*

(1) $\infty \models A$ для любой формулы A;

(2) $x \models A$, $x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы A.

Формула A называется *истинной*, или *общезначимой*, *в модели* M, если $x \models A$ для любого $x \in M$. В этом случае пишем $M \models A$.

Будем говорить, что формула A *общезначима в шкале* $\mathbf{W}$ (и писать $\mathbf{W} \models A$), если $M \models A$ для любой модели M, основанной на $\mathbf{W}$.

Заметим, что модифицированные модели отличаются от моделей Сегерберга [12] лишь добавлением элемента ∞. Это усложнение позволяет определить понятие p-морфизма и устанавливать соответствие между p-морфизмами и подалгебрами J-алгебр.

Шкала $\mathbf{W}$ *удовлетворяет логике* L, если $\mathbf{W} \models L$. Логика L *полна относительно класса шкал* (*характеризуется классом шкал*) K, если она совпадает с множеством формул, общезначимых в шкалах из K.

Введем обозначения:

$\mathbf{V}_n^0 = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $V_n = \{0, 1, \dots, n\}$, $xRy \iff (x = 0$ или $x = y$ или $y = \infty)$, $Q = V_n \cup \{\infty\}$,

$\mathbf{V}_n^1 = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $Q = \{1, \dots, n, \infty\}$,

$\mathbf{V}_n^2 = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $n > 0$, $Q = \{2, \dots, n, \infty\}$,

$\mathbf{V}_n^t = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $Q = \{\infty\}$,

$\mathbf{U}_{n+1}^t = (U_{n+1} \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $U_{n+1} = \{0, 1, \dots, n, n+1\}$, $xRy \iff (x = 0$ или $y = n+1$ или $1 \leq x = y \leq n$ или $y = \infty)$, $Q = \{\infty\}$,

$\mathbf{Z}_n^0 = (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $Z_n = \{1, \dots, n\}$, $xRy \iff (x \leq y$ или $y = \infty)$, $Q = Z_n \cup \{\infty\}$,

$\mathbf{Z}_n^1 = (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $Q = \{2, \dots, n, \infty\}$,

$\mathbf{Z}_n^t = (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q)$, где $Q = \{\infty\}$.

Верхний индекс указывает на число нормальных элементов. Если все существенные элементы нормальны, то верхний индекс есть t ("total").

Теорема 2.2 [5]. *Логики* PJ1–PJ7 *полны соответственно относительно классов шкал:*

(1) $\mathbf{Z}_n^t$, $n \geq 1$,
(2) $\mathbf{V}_n^t$, $n \geq 1$,
(3) $\mathbf{U}_n^t$, $n \geq 2$,
(4) $\mathbf{Z}_n^0$, $n \geq 1$,
(5) $\mathbf{V}_n^0$, $n \geq 1$,
(6) $\mathbf{V}_n^1$, $n \geq 1$,
(7) $\mathbf{V}_n^2$, $n \geq 1$.

В частности, доказано

Предложение 2.3. *Пусть A — формула длины k, зависящая от n переменных. Тогда*
$\mathrm{PJ7} \vdash A \iff \mathbf{V}_{k+1}^2 \models A$.

В [5] доказана узнаваемость логик PJ1–PJ7 над J, в частности верно

Предложение 2.4. *Для любой* J*-логики* L

$$L \supseteq \mathrm{PJ7} \iff (\mathbf{Z}_2^0 \not\models L \text{ и } \mathbf{Z}_2^1 \not\models L \text{ и } \mathbf{V}_2^t \not\models L \text{ и } \mathbf{Z}_3^t \not\models L).$$

3. Алгебраическая семантика и специальные алгебры $G_{m,n}$

Алгебраическая семантика минимальной логики строится с помощью так называемых J-*алгебр*, т. е. алгебр $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$, удовлетворяющих следующим условиям:

$\langle A; \&, \vee, \to, \bot, \top \rangle$ есть решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \leq x \to y \iff z \& x \leq y$,

$\bot$ — произвольный элемент в A.

J-алгебра называется *гейтинговой*, или *псевдобулевой алгеброй*, если $\bot$ — наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A.

Если B — формула, $\mathbf{A}$ — алгебра, то говорят, что *в* $\mathbf{A}$ *общезначима формула* B, и пишут $\mathbf{A} \models B$, если тождество $B = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$.

Известно [14], что класс всех J-алгебр образует многообразие (т. е. может быть задан системой тождеств [15]) и существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику J, и многообразиями J-алгебр. Для любой J-логики L через $V(L)$ обозначается многообразие J-алгебр, в которых общезначимы все формулы из L:

$$V(L) = \{\mathbf{A} | \mathbf{A} \models L\}.$$

Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Широко известна

Теорема 3.1 (теорема о полноте). *Пусть L —* J*-логика. Тогда $L + A \vdash B$, если и только если для любой алгебры $\mathbf{A} \in V(L)$ из $\mathbf{A} \models A$ следует $\mathbf{A} \models B$.*

Напомним [16], что J-алгебра $\mathbf{A}$ является *подпрямо неразложимой* тогда и только тогда, когда она имеет опремум, т. е. наибольший элемент в множестве $\mathbf{A} - \{\top\}$. Алгебра $\mathbf{A}$ *финитно неразложима*, если удовлетворяет условию

$$x \vee y = \top \Rightarrow (x = \top \text{ или } y = \top).$$

Говорят, что *класс алгебр порождает логику* L, если он порождает многообразие $V(L)$.

Хорошо известно (см., например, [15]), что любая логика L порождается классом всех финитно неразложимых конечно порожденных алгебр, удовлетворяющих L.

Рассмотрим алгебры $G_{m,n}$, описанные в [7].

Пусть $0 < m + n < \omega$. Обозначим через $G_{m,n}$ J-алгебру, полученную из конечной булевой алгебры с множеством атомов $At_{m,n} = \{a_1, \dots , a_{m+n}\}$ добавлением нового наибольшего элемента $\top_{m,n}$. При этом каждый элемент, отличный от $\top_{m,n}$, представим в виде суммы атомов, опремум $\Omega_{m,n}$ есть сумма всех атомов, $\perp_{m,n} = \bigvee\limits_{m+1\leq i\leq m+n} a_i$.

Через $0_{m,n} = \bigvee\limits_{i\in\varnothing} a_i$ обозначаем наименьший элемент алгебры $G_{m,n}$.

Имеет место

Лемма 3.2 [7]. (1) *Алгебра $G_{m,n}$ имеет $m + n$ атомов $a_1, \dots , a_{m+n}$, где $\perp_{m,n} = \bigvee\limits_{m+1\leq i\leq m+n} a_i$, и любой элемент, отличный от $\top_{m,n}$ и $0_{m,n}$, единственным образом представим в виде суммы атомов.*

(2) *Пусть $I, J \subseteq K = \{1, \dots , m + n\}$, $0_{m,n} = \bigvee\limits_{i\in\varnothing} x_i$. Тогда в алгебре $G_{m,n}$*

$$\Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big)\&\Big(\bigvee_{j\in J} x_j\Big) = \Big(\bigvee_{j\in I\cap J} x_j\Big), \quad \Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \vee \Big(\bigvee_{j\in J} x_j\Big) = \Big(\bigvee_{j\in I\cup J} x_j\Big);$$

$$\Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \to \Big(\bigvee_{j\in J} x_j\Big) = \top \text{ при } I \subseteq J,$$

$$\Big(\bigvee_{i\in I} x_i\Big) \to \Big(\bigvee_{j\in J} x_j\Big) = \Big(\bigvee_{j\in (K-I)\cup J} x_j\Big) \text{ при } I \nsubseteq J.$$

4. CIP в логике PJ7

Через E, B_0, L_2^- обозначаем соответственно одноэлементную, двухэлементную булеву и двухэлементную негативную алгебры.

Рассмотрим класс алгебр $K_0 = \{E, B_0, L_2^-, G_{1,n}(n \geq 0)\}$. Заметим, что все алгебры из K_0 являются финитно неразложимыми конечно порожденными алгебрами. Известно, что любая логика порождается классом всех финитно неразложимых конечно порожденных алгебр, ей удовлетворяющих. Пусть L_0 — логика, порожденная классом K_0. Как следует из [7], логика L_0 обладает интерполяционным свойством Крейга CIP.

Цель данного раздела — доказать, что логика PJ7 совпадает с логикой L_0 и, следовательно, имеет CIP.

Напомним связь между алгебраической семантикой и семантикой Крипке [8, 17]. Для данной шкалы $\mathbf{W}$ обозначим через $W^{\#}$ множество непустых конусов с операциями

$$X \to Y = \{x \mid (\forall y \geq x)(y \in X \Rightarrow y \in Y)\},$$

$$X\&Y = X \cap Y, \quad X \vee Y = X \cup Y, \quad \perp = Q,$$

Тогда $W^{\#}$ является J-алгеброй. Легко видеть, что общезначимость формулы в шкале $\mathbf{W}$ равносильна ее общезначимости в алгебре $W^{\#}$.

Предложение 4.1. $L_0 \subseteq \mathrm{PJ7}$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует формула A такая, что $A \in L_0$ и $A \notin \mathrm{PJ7}$, т. е. $\mathrm{PJ7} \not\vdash A$. По предложению 2.3 тогда существует шкала $\mathbf{V}^2_{k+1}$ (где k — длина формулы A) такая, что $\mathbf{V}^2_{k+1} \not\models A$.

Ввиду конечной высоты существует взаимно однозначное соответствие между конечными шкалами и конечно порожденными алгебрами [8]. Заметим, что шкале $\mathbf{V}^2_{k+1}$ соответствует алгебра $G_{1,k}$.

Действительно, шкала $\mathbf{V}^2_{k+1}$ имеет $k{+}1$ несравнимых элементов $1,\dots,k{+}1$, наименьший элемент 0 и наибольший ∞. Множество $Q = \{2,\dots,k+1,\infty\}$. Перечислим все непустые конусы шкалы $\mathbf{V}^2_{k+1}$. Это множество $\{\infty\}$; несравнимые по включению конусы $a_1 = \{1,\infty\}$, $a_2 = \{2,\infty\}$,..., $a_{k+1} = \{k+1,\infty\}$; наибольший по включению конус $\{0,1,\dots,k+1,\infty\}$; все конусы, отличные от наибольшего и $\{\infty\}$, можно представить как объединение некоторых несравнимых конусов. В частности, $Q = \{2,\dots,k+1,\infty\} = \bigcup\limits_{2\le i\le k+1} a_i$.

Таким образом, в алгебре $\left(V^2_{k+1}\right)^{\#}$ имеется $k+1$ атомов $a_1,\dots,a_{k+1}$. Наибольший элемент $\top$ алгебры $\left(V^2_{k+1}\right)^{\#}$ — это конус $\{0,1,\dots,k+1,\infty\}$, $\{\infty\} = \bigvee\limits_{i\in\varnothing} a_i$ — наименьший, и каждый элемент алгебры, отличный от $\top$, представим в виде суммы атомов. При этом опремум Ω есть сумма всех атомов, $\bot = \bigvee\limits_{2\le i\le k+1} a_i$, т. е. алгебра $(V^2_{k+1})^{\#}$ изоморфна алгебре $G_{1,k}$.

Так как $\mathbf{V}^2_{k+1} \not\models A$, то $\left(V^2_{k+1}\right)^{\#} \not\models A$, следовательно, формула A опровергается в алгебре $G_{1,k}$.

Однако $G_{1,k} \in K_0$ и $K_0 \subseteq V(L_0)$, т. е. алгебра $G_{1,k}$ удовлетворяет логике L_0. Таким образом $G_{1,k} \models A$, так как $A \in L_0$. Получаем противоречие, и предложение доказано. $\square$

Предложение 4.2. $L_0 \supseteq \mathrm{PJ7}$.

Доказательство. По предложению 2.4 достаточно доказать, что

$$\mathbf{Z}^0_2 \not\models L_0 \text{ и } \mathbf{Z}^1_2 \not\models L_0 \text{ и } \mathbf{V}^t_2 \not\models L_0 \text{ и } \mathbf{Z}^t_3 \not\models L_0.$$

Заметим, что данные шкалы имеют конечную высоту. Поймем, какие алгебры им соответствуют.

В шкале $\mathbf{Z}^0_2$ следующие непустые конусы: $a = \{\infty\}$, $b = \{2,\infty\}$, $c = \{1,2,\infty\} = Q$. В алгебре $\left(Z^0_2\right)^{\#}$ имеем $a < b < c$ и $\bot = c = \top$. Таким образом, алгебра $\left(Z^0_2\right)^{\#}$ изоморфна трехэлементной негативной алгебре L^-_3.

В шкале $\mathbf{Z}^1_2$ конус ненормальных элементов $Q = \{2,\infty\}$, следовательно, алгебра $\left(Z^1_2\right)^{\#}$ изоморфна трехэлементной алгебре с носителем $\{a,b,c\}$, $a < b < c$, где $\bot = \{2,\infty\} = b$. Обозначим эту алгебру через C.

Перечислим все непустые конусы шкалы $\mathbf{Z}^t_3$. Это множества $\{\infty\}$, $\{3,\infty\}$, $\{2,3,\infty\}$, $\{1,2,3,\infty\}$, причем $Q = \{\infty\}$. Таким образом, алгебра $\left(Z^t_3\right)^{\#}$ изоморфна четырехэлементной гейтинговой алгебре L_4.

Поймем, что шкале $\mathbf{V}^t_2$ соответствует алгебра $G_{2,0}$. В шкале $\mathbf{V}^t_2$ два несравнимых элемента $1,2$; ∞ — наибольший, 0 — наименьший элементы; $Q = \{\infty\}$. Непустые конусы шкалы $\mathbf{V}^t_2$: множества $\{\infty\}$, $a_1 = \{1,\infty\}$, $a_2 = \{2,\infty\}$, $\{1,2,\infty\}$, $\{0,1,2,\infty\}$.

Таким образом в алгебре $(V^t_2)^{\#}$ два несравнимых элемента a_1, a_2, $\{0,1,2,\infty\}$ — наибольший элемент, опремум $\Omega = a_1 \vee a_2$ и $\bot = Q = \{\infty\}$ — наименьший элемент алгебры.

Заметим, что в алгебре $G_{2,0}$ два несравнимых атома b_1, b_2, опремум $\Omega_{2,0} = b_1 \vee b_2$ и $\bot_{2,0} = \bigvee\limits_{2+1 \le i \le 2} b_i$ совпадает с наименьшим элементом $0_{2,0} = \bigvee\limits_{i \in \varnothing} b_i$. Получаем, что алгебра $\left(V_2^t\right)^\#$ изоморфна алгебре $G_{2,0}$.

Таким образом, предложение 2.4 можно сформулировать в терминах алгебраической семантики следующим образом:

$L \supseteq \mathrm{PJ7} \iff L_3^- \not\models L$ и $C \not\models L$ и $L_4 \not\models L$ и $G_{2,0} \not\models L$, где C — трехэлементная алгебра с носителем $\{a, b, c\}$ и $a < b < c$, $\bot = b$.

Заметим, что все рассматриваемые алгебры L_3^-, C, L_4, $G_{2,0}$ являются конечными (следовательно, конечно порожденными) и финитно неразложимыми алгебрами. Кроме того, ни одна из них не принадлежит классу K_0. Класс K_0 содержит все конечно порожденные финитно неразложимые алгебры, удовлетворяющие логике L_0. Следовательно, $L_3^- \not\models L_0$ и $C \not\models L_0$ и $L_4 \not\models L_0$ и $G_{2,0} \not\models L_0$. Таким образом, $L_0 \supseteq \mathrm{PJ7}$, и предложение доказано. □

Из предложений 4.1, 4.2 сразу следует, что логика PJ7 совпадает с логикой L_0. Так как L_0 обладает CIP [7], то верна

Теорема 4.3. *Предтабличная логика* PJ7 *обладает интерполяционным свойством Крейга* CIP.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compositio Math. 1937. N 4. P. 119–136.
2. *Craig W.* Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symbol. Logic. 1957. V. 22. P. 269–285.
3. *Максимова Л. Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 643–681.
4. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Расширения минимальной логики и проблема интерполяции // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 863–878.
5. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Проблема табличности над минимальной логикой // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1320–1332.
6. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Предтабличность и интерполяционное свойство Крейга над минимальной логикой // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 245–250.
7. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Проблема интерполяции в конечнослойных предгейтинговых логиках // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 2. С. 210–228.
8. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Слои над минимальной логикой // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 449–464.
9. *Hosoi T.* On intermediate logics I // J. Faculty Sci. Univ. Tokyo, Sec. Ia. 1967. V. 14. P. 293–312.
10. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Узнаваемые логики // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 252–274.
11. *Максимова Л. Л.* Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 6. С. 1281–1284.
12. *Segerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. 1968. V. 34. P. 26–61.
13. *Максимова Л. Л.* Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 627–648.
14. *Rautenberg W.* Klassische und nicht-classische Aussagenlogik. Braunschweig: Vieweg, 1979.
15. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
16. *Максимова Л. Л.* Неявная определимость и позитивные логики // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 65–93.
17. *Odintsov S.* Logic of classic refutability and class of extensions of minimal logic // Logic and

Logical Philosophy. 2001. V. 9. P. 91–107.

Поступила в редакцию 13 июля 2023 г.
После доработки 13 июля 2023 г.
Принята к публикации 28 января 2024 г.

Максимова Лариса Львовна (ORCID 0000-0002-4061-3982),
Юн Вета Федоровна (ORCID 0000-0002-4871-6281)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru