Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 510.67

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ С ТРИВИАЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛИМЫМ ЗАМЫКАНИЕМ

Б. Ш. Кулпешов

Аннотация. Описываются алгебры бинарных формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1, имеющих 1-транзитивную непримитивную группу автоморфизмов и тривиальное определимое замыкание. Найден критерий коммутативности таких алгебр.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.207

Ключевые слова: алгебра бинарных формул, счетно категоричная теория, слабая циклическая минимальность, циклически упорядоченная структура.

1. Предварительные сведения

Алгебры бинарных формул являются инструментом для описания связей между элементами множеств реализаций типов на бинарном уровне относительно суперпозиции бинарных определимых множеств. Будем рассматривать алгебры бинарных изолирующих формул, первоначально изученные в работах [1, 2], где под бинарной изолирующей формулой понимается формула вида $\varphi(x, y)$ такая, что для некоторого параметра a формула $\varphi(a, y)$ изолирует некоторый полный тип из $S_1(\{a\})$. Понятия и обозначения, относящиеся к этим алгебрам, можно также найти в [1, 2]. В последние годы алгебры бинарных формул изучаются интенсивно и получили свое продолжение в [3–9].

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду далее рассматриваются L-структуры и предполагается, что L содержит символ тернарного отношения K, интерпретируемый как циклический порядок в этих структурах (если не оговорено противное).

Пусть $M = \langle M, <\rangle$ — линейно упорядоченное множество. Если соединить две концевые точки множества M (возможно, ими являются $-\infty$ и $+\infty$), то получим циклический порядок. Более формально, *циклический порядок* описывается тернарным отношением K, удовлетворяющим следующим условиям:

(co1) $\forall x\forall y\forall z(K(x, y, z) \to K(y, z, x))$;
(co2) $\forall x\forall y\forall z(K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$;
(co3) $\forall x\forall y\forall z(K(x, y, z) \to \forall t[K(x, y, t) \vee K(t, y, z)])$;
(co4) $\forall x\forall y\forall z(K(x, y, z) \vee K(y, x, z))$.

Следующее наблюдение связывает линейные и циклические порядки.

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP19674850).

Факт 1.1 [10, теорема 11.9]. (i) *Если $\langle M, \leq \rangle$ — линейное упорядочение и K — тернарное отношение, получаемое из $\leq$ по правилу*

$$K(x, y, z) := (x \leq y \leq z) \vee (z \leq x \leq y) \vee (y \leq z \leq x),$$

то K — отношение циклического порядка на M.

(ii) *Если $\langle N, K \rangle$ — циклическое упорядочение и $a \in N$, то отношение $\leq_a$, определяемое на $M := N \setminus \{a\}$ по правилу*

$$y \leq_a z := K(a, y, z),$$

является отношением линейного порядка на M.

Таким образом, любая линейно упорядоченная структура является циклически упорядоченной, поскольку отношение циклического порядка $\varnothing$-определимо в произвольной линейно упорядоченной структуре. Однако обратное неверно. Следующий пример показывает, что существуют циклически упорядоченные структуры, не являющиеся линейно упорядоченными (в том смысле, что отношение линейного порядка не является $\varnothing$-определимым в произвольной циклически упорядоченной структуре).

Пример 1.2 [11, 12]. Пусть $\mathbb{Q}_2^* := \langle \mathbb{Q}_2, K, L \rangle$ — циклически упорядоченная структура, где $L = \left\{\sigma_0^2, \sigma_1^2\right\}$, для которой выполняются следующие условия:

(i) носитель $\mathbb{Q}_2$ является счетным плотно упорядоченным подмножеством единичной окружности и при этом никакие две точки не образуют центральный угол π;

(ii) для различных $a, b \in \mathbb{Q}_2$

$$(a, b) \in \sigma_0 \Leftrightarrow 0 < \arg(a/b) < \pi, \quad (a, b) \in \sigma_1 \Leftrightarrow \pi < \arg(a/b) < 2\pi,$$

где $\arg(a/b)$ означает величину центрального угла между a и b по часовой стрелке.

Действительно, можно проверить, что отношение линейного порядка не является $\varnothing$-определимым в данной структуре. Ранее в [13] было установлено, что $\mathbb{Q}_2^*$ является счетно категоричной 1-транзитивной слабо циклически минимальной структурой.

Понятие слабой циклической минимальности было первоначально изучено в [13]. Пусть $A \subseteq M$, где $\mathscr{M}$ — циклически упорядоченная структура. Множество A называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее свойство: для любого $c \in M$ с условием $K(a, c, b)$ имеет место $c \in A$ или для любого $c \in M$ с условием $K(b, c, a)$ справедливо $c \in A$. Структура $\mathscr{M}$ называется *слабо циклически минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество M является конечным объединением выпуклых множеств. Исследование слабо циклически минимальных структур было продолжено в работах [14–20].

Пусть $\mathscr{M}$ — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $G := \mathrm{Aut}(\mathscr{M})$. Следуя стандартной теоретико-групповой терминологии, группу G будем называть *k-однородной*, где $k \in \omega$, если для любых двух k-элементных множеств $A, B \subseteq M$ существует $g \in G$, для которого $g(A) = B$. Группа G называется *сильно однородной*, если G k-однородна для всех $k \in \omega$. Группа G называется *k-транзитивной*, если для любых попарно различных $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ и попарно различных $b_1, b_2, \ldots, b_k \in M$ существует $g \in G$, для которого $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \ldots, g(a_k) = b_k$. *Конгруэнцией* на $\mathscr{M}$ называется любое G-инвариантное отношение эквивалентности на $\mathscr{M}$. Группа G

называется *примитивной*, если G 1-транзитивна и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на $\mathscr{M}$.

Далее понадобится понятие определимого пополнения циклически упорядоченной структуры, введенное в [13]. Ее линейный аналог был введен в [21]. *Сечением* $C(x)$ в циклически упорядоченной структуре M является максимальное непротиворечивое множество формул вида $K(a,x,b)$, где $a,b \in M$. Сечение называется *алгебраическим*, если существует $c \in M$, реализующий его. В противном случае такое сечение называется *неалгебраическим*. Пусть $C(x)$ — неалгебраическое сечение. Если существует некоторый $a \in M$ такой, что либо $K(a,x,b) \in C(x)$ для всех $b \in M$, либо $K(b,x,a) \in C(x)$ для всех $b \in M$, то $C(x)$ называется *рациональным*. В противном случае такое сечение называется *иррациональным*. *Определимым сечением* в M называется сечение $C(x)$ со следующим свойством: существуют $a,b \in M$ такие, что $K(a,x,b) \in C(x)$ и множество $\{c \in M \mid K(a,c,b),\ K(a,x,c) \in C(x)\}$ определимое. *Определимое пополнение* $\overline{M}$ структуры M состоит из M вместе со всеми определимыми сечениями в M, являющимися иррациональными (по существу $\overline{M}$ состоит из концевых точек определимых подмножеств структуры M).

Обозначения 1.3. (1) $K_0(x,y,z) := K(x,y,z) \wedge y \neq x \wedge y \neq z \wedge x \neq z$.

(2) $K(u_1,\dots,u_n)$ обозначает формулу, согласно которой все подкортежи длины 3 кортежа $\langle u_1,\dots,u_n\rangle$ (в возрастающем порядке) удовлетворяют K; аналогичные обозначения для K_0.

(3) Пусть A,B,C — попарно не пересекающиеся выпуклые подмножества циклически упорядоченной структуры M. Будем писать $K(A,B,C)$, если для любых $a,b,c \in M$ всякий раз, когда $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, имеем $K(a,b,c)$. Расширим данное обозначение естественным образом, например, употребляя запись $K_0(A,d,B,C)$, если $d \notin A \cup B \cup C$ и выполняется $K_0(A,d,B)$ и $K_0(d,B,C)$.

Обозначения 1.4 [13]. Пусть $F(x,y)$ — L-формула такая, что $F(M,b)$ — выпуклое бесконечное ко-бесконечное множество для каждого $b \in M$. Пусть $F^\ell(y)$ — формула, сообщающая, что y — левая (начальная) концевая точка множества $F(M,y)$:

$$\exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1,y,z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1,t_1,y) \wedge t_1 \neq y \to \neg F(t_1,y)) \\ \wedge \forall t_2 (K(y,t_2,z_2) \wedge t_2 \neq y \to F(t_2,y))].$$

Будем говорить, что $F(x,y)$ *выпуклая вправо*, если

$$M \models \forall y \forall x [F(x,y) \to F^\ell(y) \wedge \forall z (K(y,z,x) \to F(z,y))].$$

Очевидно, что если $F(x,y)$ выпуклая вправо, то $M \models \forall y F(y,y)$. Если $F_1(x,y), F_2(x,y)$ — произвольные выпуклые вправо формулы, то говорят, что F_2 *больше чем* F_1, если $F_1(M,a) \subset F_2(M,a)$ для любого $a \in M$. Если M 1-транзитивная и последнее условие имеет место для некоторого a, то оно имеет место для всех a. Это дает полное упорядочение конечного множества всех выпуклых вправо формул $F(x,y)$ (с точностью до эквивалентности в $\mathrm{Th}(M)$).

Предположим, что для некоторого $a \in M$ формула $F(M,a)$ имеет правую концевую точку в M, и пусть $F^r(z)$ — формула, согласно которой z — правая концевая точка множества $F(M,a)$:

$$\exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1,z,z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1,t_1,z) \wedge t_1 \neq z \to F(t_1,a)) \\ \wedge \forall t_2 (K(z,t_2,z_2) \wedge t_2 \neq z \to \neg F(t_2,a))].$$

В общем случае правая концевая точка множества $F(M,a)$ может не лежать в M. Например, если для некоторого $a \in M$ выполняется $\mathrm{dcl}(a) = \{a\}$, то для любой выпуклой вправо формулы $F(x,y)$ и любого $a \in M$ формула $F(M,a)$ не имеет правой концевой точки в M. Будем писать $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$, подразумевая что $f(y)$ — правая концевая точка множества $F(M,y)$, которая лежит в общем случае в определимом пополнении $\overline{M}$ структуры M. Тогда f является функцией, отображающей M в $\overline{M}$.

Пусть $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула. Будем говорить, что $F(x,y)$ — *эквивалентность-генерирующая*, если для любых $a, b \in M$ таких, что $M \models F(b,a)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x(K(b,x,a) \land x \neq a \to [F(x,a) \leftrightarrow F(x,b)]).$$

Лемма 1.5 [22]. *Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, $F(x,y)$ — выпуклая вправо (влево) эквивалентность-генерирующая формула. Тогда $E(x,y) := F(x,y) \lor F(y,x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы.*

Обозначение 1.6. Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы. Предположим, что y лежит в $\overline{M}$ (необязательно в M). Тогда

$$E^*(x,y) := \exists y_1 \exists y_2 [y_1 \neq y_2 \land \forall t(K(y_1,t,y_2) \to E(t,x)) \land K_0(y_1,y,y_2)].$$

В общем случае отношение E^* не является формульным. Но если y — концевая точка определимого подмножества структуры M, то отношение E^* формульное, однако его запись в исходном языке будет чрезмерно громоздкой. Аналогично для следующей формулы.

Обозначение 1.7. Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на конечное число бесконечных выпуклых классов, $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула, $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ и $k \in \omega$. Тогда

$$\Phi_k^f(x) := \neg E^*(x, f(x)) \land \exists u_1 \ldots \exists u_k \left[\bigwedge_{i \neq j} \neg E(u_i,u_j) \land \bigwedge_{i=1}^{k} \{\neg E(u_i,x) \land \neg E^*(u_i, f(x))\} \right.$$
$$\left. \land K_0(x,u_1,\ldots,u_k,f(x)) \land \forall t \left[K(x,t,f(x)) \to \bigvee_{i=1}^{k} E(t,u_i) \lor E(t,x) \lor E^*(t,f(x)) \right] \right].$$

Формула $\Phi_k^f(x)$ влечет, что x и $f(x)$ не лежат в одном E-классе, и между E-классами, содержащими x и $f(x)$, имеется в точности k классов эквивалентности по E.

Пусть $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — циклически упорядоченные структуры. Назовем 2-*редуктом* структуры $\mathscr{M}$ циклически упорядоченную структуру с тем же носителем, что и $\mathscr{M}$, имеющую предикатный символ для каждого $\varnothing$-определимого отношения на $\mathscr{M}$ арности не более 2, а также тернарный предикатный символ K для циклического порядка, но не имеющую других предикатных символов большей арности. Будем говорить, что *$\mathscr{M}$ изоморфна $\mathscr{N}$ с точностью до бинарности*, если 2-редукт структуры $\mathscr{M}$ изоморфен 2-редукту структуры $\mathscr{N}$.

Пусть f — унарная функция из M в $\overline{M}$. Будем говорить, что f *монотонна вправо* (*влево*) *на* M, если она сохраняет (обращает) отношение K_0, т. е. для любых $a,b,c \in M$ таких, что $K_0(a,b,c)$, имеем $K_0(f(a),f(b),f(c))$ ($K_0(f(c),f(b),f(a))$).

Пусть $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула. Рассмотрим следующую формулу:

$$F'(x,y) := \exists t[F(t,y) \wedge F(x,t)].$$

Пусть $f^2(y) := \mathrm{rend}\, F'(M,y)$.

Лемма 1.8 [14]. *Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, $F(x,y)$ — выпуклая вправо, так что $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ — монотонная влево на M. Тогда $f^2(a) = a$ для любого $a \in M$.*

Будем говорить, что слабо циклически минимальная теория имеет *ранг выпуклости* 1, если не существует определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов.

Следующая теорема полностью характеризует счетно категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости 1 с тривиальным определимым замыканием с точностью до бинарности.

Теорема 1.9 [14]. *Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1 с $\mathrm{dcl}(a) = \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда M изоморфна с точностью до бинарности одной из следующих структур:*

- *$M'_n := \langle M, K^3, E^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, E — отношение эквивалентности, разбивающее M на n бесконечных выпуклых классов без концевых точек ($n \geq 2$);*
- *$M'_* := \langle M, K^3, R^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, $R(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $R(M,a)$ не имеет правой концевой точки в M для всех $a \in M$ и $r(y) := \mathrm{rend}\, R(M,y)$ — монотонная влево на M;*
- *$M^3_{n,k} := \langle M, K^3, E^2, R^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, E — отношение эквивалентности, разбивающее M на n бесконечных выпуклых классов без концевых точек, $R(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $R(M,a)$ не имеет правой концевой точки в M для всех $a \in M$ и $r(y) := \mathrm{rend}\, R(M,y)$ — монотонная вправо на M, $\neg E^*(a, r(a))$ и существует $k \geq 0$ с условием $\Phi^r_k(a)$ для всех $a \in M$, $k+1$ делит n ($n \geq 2$);*
- *$M^4_{n,k} := \langle M, K^3, E^2, R^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, E — отношение эквивалентности, разбивающее M на n бесконечных выпуклых классов без концевых точек, $R(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $R(M,a)$ не имеет правой концевой точки в M для всех $a \in M$, $r(y) := \mathrm{rend}\, R(M,y)$ — монотонная влево на каждом E-классе, r — монотонная вправо на M/E, $\neg E^*(a, r(a))$ и существует $k \geq 0$ с условием $\Phi^r_k(a)$ для всех $a \in M$, $k+1$ делит n, n четно ($n \geq 4$).*

В [7] описаны алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий с примитивной группой автоморфизмов. В [8] описаны алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1, имеющих 1-транзитивную непримитивную группу автоморфизмов и нетривиальное определимое замыкание. В настоящей работе описаны алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1, имеющих 1-транзитивную непримитивную группу автоморфизмов и тривиальное определимое замыкание.

2. Коммутативный случай

Пример 2.1. Рассмотрим структуру $M_2' := \langle M, K^3, E^2\rangle$ из теоремы 1.9. Утверждается, что $\mathrm{Th}(M_2')$ имеет четыре бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_1(x,y) := E(x,y) \wedge x \neq y \wedge \forall t[K(x,t,y) \to E(x,t)],$$

$$\theta_2(x,y) := E(x,y) \wedge x \neq y \wedge \forall t[K(y,t,x) \to E(x,t)],$$

$$\theta_3(x,y) := \neg E(x,y).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

$$\text{метка } k \text{ для } \theta_k(x,y), \text{ где } 0 \leq k \leq 3.$$

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M_2'}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{3\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2\}$

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M_2'}$ коммутативна.

Теорема 2.2. *Алгебра $\mathfrak{P}_{M_n'}$ бинарных изолирующих формул имеет $n+2$ меток и является коммутативной для всех допустимых значений n.*

Доказательство. Основное множество M структуры M_n' разбивается отношением эквивалентности E на n бесконечных выпуклых классов. Возьмем произвольный элемент $a \in M$. Он попадает в один из этих выпуклых классов, в котором возникают три бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_1(x,y) := E(x,y) \wedge x \neq y \wedge \forall t[K(x,t,y) \to E(x,t)],$$

$$\theta_{n+1}(x,y) := E(x,y) \wedge x \neq y \wedge \forall t[K(y,t,x) \to E(x,t)].$$

Остаются еще $n-1$ выпуклых классов, где нет элементов, лежащих в алгебраическом замыкании элемента a, определяя дополнительно $n-1$ бинарных изолирующих формул. Эти формулы определяются следующим образом:

$$\theta_i(x,y) := \neg E(x,y) \wedge \forall t\left[K(x,t,y) \wedge \neg E(t,y) \to \bigvee_{s=1}^{i-1} \theta_s(x,t)\right], \quad 2 \leq i \leq n.$$

Таким образом, получается $3 + (n-1) = n+2$ бинарных изолирующих формул, причем формулы определены так, что для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a,M), \theta_1(a,M), \theta_2(a,M), \ldots, \theta_n(a,M), \theta_{n+1}(a,M)).$$

Докажем коммутативность. Во-первых, очевидно, что $0\cdot k = k\cdot 0 = \{k\}$ для любого $0 \le k \le n+1$. Предположим, что $k_1 \ne 0$ и $k_2 \ne 0$.

Случай 1. $k_1 + k_2 = n+2$. Если $k_1 = 1$, то $k_2 = n+1$. Тогда каждая из формул $\theta_{k_1}(x,y)$ и $\theta_{k_2}(x,y)$ содержит в качестве конъюнктивного члена формулу $E(x,y)$, т. е. формула $E(x,y)$ совместна с $\exists t[\theta_{k_1}(x,t) \wedge \theta_{k_2}(t,y)]$. Имеем: для любого t, удовлетворяющего формуле $\theta_{k_1}(x,t)$, следует, что $t \in E(x,M)$ и t находится правее элемента x; рассматривая произвольный y, удовлетворяющий формуле $\theta_{k_2}(t,y)$, получаем, что $y \in E(t,M)$ и y находится левее элемента t, т. е. получаем, что формула $\exists t[\theta_{k_1}(x,t) \wedge \theta_{k_2}(t,y)]$ совместна с любой формулой из списка формул с метками $\{0,1,n+1\}$. Следовательно, $k_1 \cdot k_2 = \{0,1,n+1\}$. Аналогично показывается, что $k_2 \cdot k_1 = \{0,1,n+1\}$.

Пусть $k_1 > 1$ и $k_1 \ne n+1$. Тогда $k_2 \ne n+1$ и $k_2 > 1$. Следовательно, каждая из формул $\theta_{k_1}(x,y)$ и $\theta_{k_2}(x,y)$ содержит в качестве конъюнктивного члена формулу $\neg E(x,y)$. Имеем: t лежит в (k_1-1)-м E-классе от $E(x,M)$; y лежит в (k_2-1)-м E-классе от $E(t,M)$. Тогда получаем, что y лежит в (k_1+k_2-2)-м E-классе от $E(x,M)$. Но $k_1+k_2-2 = n$, т. е. y попадает в $E(x,M)$. Поэтому $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{0,1,n+1\}$.

Случай 2. $k_1 + k_2 < n+2$. Вначале предположим, что $k_1 = 1$. Если $k_2 = 1$, то $\exists t[\theta_{k_1}(x,t) \wedge \theta_{k_2}(t,y)]$ совместна с формулой $E(x,y)$. Имеем: t лежит в одном E-классе с x и правее него; y лежит в одном E-классе с t и правее него. Следовательно, y лежит в одном E-классе с x и правее него, т. е. $1\cdot 1 = \{1\}$.

Пусть $k_2 \ne 1$. Ясно, что $k_2 \ne n+1$ (поскольку $k_1 + k_2 < n+2$). Имеем: t лежит в одном E-классе с x и правее него; y лежит в (k_2-1)-м E-классе от $E(t,M)$. Следовательно, y лежит в (k_2-1)-м E-классе от $E(x,M)$, т. е. $1\cdot k_2 = \{k_2\}$. Аналогично показывается, что $k_2 \cdot 1 = \{k_2\}$.

Предположим, что $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$. Ясно, что $k_1 < n+1$ и $k_2 < n+1$. Тогда каждая из формул $\theta_{k_1}(x,y)$ и $\theta_{k_2}(x,y)$ содержит в качестве конъюнктивного члена формулу $\neg E(x,y)$. Имеем: t лежит в (k_1-1)-м E-классе от $E(x,M)$; y лежит в (k_2-1)-м E-классе от $E(t,M)$. Тогда получаем что y лежит в (k_1+k_2-2)-м E-классе от $E(x,M)$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = \{k_1+k_2-1\}$. Аналогично показывается что $k_2 \cdot k_1 = \{k_1+k_2-1\}$.

Случай 3. $k_1 + k_2 > n+2$. В этом случае $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$ (поскольку иначе получили бы $k_1+k_2 \le n+2$). Имеем: t лежит в (k_1-1)-м E-классе от $E(x,M)$; y лежит в (k_2-1)-м E-классе от $E(t,M)$, но при этом y перескакивает через $E(x,M)$, совместный с тремя бинарными изолирующими формулами. Поэтому y лежит в $(k_1+k_2)[\operatorname{mod} n+2]$-м E-классе от $E(x,M)$. Следовательно, формула $\exists t[\theta_{k_1}(x,t) \wedge \theta_{k_2}(t,y)]$ однозначно определяет формулу $\theta_{(k_1+k_2+1)[\operatorname{mod} n+2]}(x,y)$. Аналогично показывается, что $k_2 \cdot k_1 = (k_1+k_2+1)[\operatorname{mod} n+2]$. $\square$

Пример 2.3. Рассмотрим структуру $M^3_{4,1} := \langle M, K^3, E^2, R^2\rangle$ из теоремы 1.9. Утверждаем что $\mathrm{Th}\big(M^3_{4,1}\big)$ имеет семь бинарных изолирующих формул:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_1(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge E(x,y),$$
$$\theta_2(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E^*(r(x),y),$$
$$\theta_3(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge E^*(r(x),y),$$
$$\theta_4(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge E^*(r(x),y),$$
$$\theta_5(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E^*(r(x),y),$$

$$\theta_6(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge E(x,y),$$

причем для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a,M),\theta_1(a,M),\theta_2(a,M),\ldots,\theta_5(a,M),\theta_6(a,M)).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

$$\text{метка } k \text{ для } \theta_k(x,y), \text{ где } 0 \le k \le 6.$$

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M^3_{4,1}}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$
3	$\{3\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$
5	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$
6	$\{6\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M^3_{4,1}}$ коммутативна.

Теорема 2.4. *Алгебра $\mathfrak{P}_{M^3_{n,k}}$ бинарных изолирующих формул имеет $n + \frac{n}{k+1} + 1$ меток и коммутативна для всех допустимых значений n, k.*

Доказательство. Основное множество M структуры $M^3_{n,k}$ разбивается отношением эквивалентности E на n бесконечных выпуклых классов. Возьмем произвольный элемент $a \in M$. Он попадает в один из этих выпуклых классов, в котором возникают три бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$
$$\theta_1(x,y) := E(x,y) \wedge K_0(x,y,r(x)),$$
$$\theta_{n+\frac{n}{k+1}}(x,y) := E(x,y) \wedge K_0(r^{\frac{n}{k+1}-1}(x),y,x).$$

Каждый из $\frac{n}{k+1} - 1$ выпуклых классов, куда попадает $r^s(a)$ для некоторого $1 \le s \le \frac{n}{k+1} - 1$, разбивается на две бинарные изолирующие формулы:

$$E^*(r^s(x),y) \wedge K_0(r^s(x),y,r^{s+1}(x)), \quad E^*(r^s(x),y) \wedge K_0(r^{s-1}(x),y,r^s(x)).$$

Остаются еще $n - \frac{n}{k+1}$ выпуклых классов, где нет $r^s(a)$ для любого $0 \le s \le \frac{n}{k+1} - 1$, определяя дополнительно $n - \frac{n}{k+1}$ бинарных изолирующих формул. Заметим, что число k определяет число таких выпуклых классов, лежащих между E-классами, содержащими $r^s(x)$ и $r^{s+1}(x)$ для каждого $0 \le s \le \frac{n}{k+1} - 1$. Например, выпуклые классы между E-классами, содержащими x и $r(x)$, определяются следующим образом:

$$\theta_i(x,y) := \neg E(x,y) \wedge \neg E^*(r(x),y) \wedge K_0(x,y,r(x)) \wedge \forall t\left[K(x,t,y) \wedge \neg E(t,y) \to \bigvee_{j=1}^{i-1} \theta_j(x,t)\right], \quad 2 \le i \le k+1.$$

Таким образом, получается $3+2(\frac{n}{k+1}-1)+n-\frac{n}{k+1}=n+\frac{n}{k+1}+1$ бинарных изолирующих формул.

Докажем коммутативность. Возьмем произвольные метки s_1 и s_2 и докажем, что $s_1\cdot s_2=s_2\cdot s_1$. Во-первых, очевидно, что $0\cdot s=s\cdot 0=\{s\}$ для любого $0\le s\le n+\frac{n}{k+1}+1$. Пусть $m:=\frac{n}{k+1}$. В силу леммы 2.14 и следствия 2.15 из [14] $r^m(a)=a$ для любого $a\in M$. Предположим, что $s_1\ne 0$ и $s_2\ne 0$. Бинарными изолирующими формулами в этом случае могут быть формулы следующего вида:

$$E^*(r^s(x),y)\wedge K_0(r^s(x),y,r^{s+1}(x)),\quad 0\le s\le m-1,$$

$$\neg E^*(r^s(x),y)\wedge\neg E^*(r^{s+1}(x),y)\wedge K_0(r^s(x),y,r^{s+1}(x))\wedge D_j^s(x,y),\\ 0\le s\le m-1, 1\le j\le k,$$

где формула $D_j^s(x,y)$ означает, что y лежит в j-м E-классе от $E^*(r^s(x),M)$.

Рассмотрим вначале формулы

$$E^*(r^{s_1}(x),y)\wedge K_0(r^{s_1}(x),y,r^{s_1+1}(x)),\quad E^*(r^{s_2}(x),y)\wedge K_0(r^{s_2}(x),y,r^{s_2+1}(x)).$$

Нетрудно убедиться, что формулы

$$\exists t[E^*(r^{s_1}(x),t)\wedge K_0(r^{s_1}(x),t,r^{s_1+1}(x))\wedge E^*(r^{s_2}(t),y)\wedge K_0(r^{s_2}(t),y,r^{s_2+1}(t)),$$

$$\exists t[E^*(r^{s_2}(x),t)\wedge K_0(r^{s_2}(x),t,r^{s_2+1}(x))\wedge E^*(r^{s_1}(t),y)\wedge K_0(r^{s_1}(t),y,r^{s_1+1}(t))$$

однозначно определяют формулу

$$E^*(r^{(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]}(x),y)\wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]}(x),y,r^{(s_1+s_2+1)[\operatorname{mod} m]}(x)).$$

Если же в качестве второй формулы взять

$$E^*(r^{s_2}(x),y)\wedge K_0(r^{s_2-1}(x),y,r^{s_2}(x)),$$

то возможны следующие подслучаи.

Если $(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]\ne 0$, то формулы

$$\exists t[E^*(r^{s_1}(x),t)\wedge K_0(r^{s_1}(x),t,r^{s_1+1}(x))\wedge E^*(r^{s_2}(t),y)\wedge K_0(r^{s_2-1}(t),y,r^{s_2}(t)),$$

$$\exists t[E^*(r^{s_2}(x),t)\wedge K_0(r^{s_2-1}(x),t,r^{s_2}(x))\wedge E^*(r^{s_1}(t),y)\wedge K_0(r^{s_1}(t),y,r^{s_1+1}(t))$$

совместны с формулами

$$E^*(r^{(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]}(x),y)\wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]}(x),y,r^{(s_1+s_2+1)[\operatorname{mod} m]}(x)),$$

$$E^*(r^{(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]}(x),y)\wedge K_0(r^{(s_1+s_2-1)[\operatorname{mod} m]}(x),y,r^{(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]}(x)).$$

Если же $(s_1+s_2)[\operatorname{mod} m]=0$, то эти формулы совместны с формулами

$$x=y, E(x,y)\wedge K_0(x,y,r(x)) \text{ и } E(x,y)\wedge K_0(r^{m-1}(x),y,x).$$

Рассмотрим в качестве второй формулы

$$\neg E^*(r^{s_2}(x),y)\wedge\neg E^*(r^{s_2+1}(x),y)\wedge K_0(r^{s_2}(x),y,r^{s_2+1}(x))\wedge D_j^{s_2}(x,y)$$

для некоторого $1\le j\le k$. Тогда формула

$$\exists t[E^*(r^{s_1}(x),t)\wedge K_0(r^{s_1}(x),t,r^{s_1+1}(x))\\ \wedge\neg E^*(r^{s_2}(t),y)\wedge\neg E^*(r^{s_2+1}(t),y)\wedge K_0(r^{s_2}(t),y,r^{s_2+1}(t))\wedge D_j^{s_2}(x,t)]$$

однозначно определяет формулу

$$\neg E^*(r^{(s_1+s_2)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \\ \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x)) \wedge D_j^{(s_1+s_2)[\mathrm{mod}\, m]}(x, y).$$

Аналогично показывается в обратную сторону.

Рассмотрим формулы

$$\neg E^*(r^{s_1}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{s_1+1}(x), y) \wedge K_0(r^{s_1}(x), y, r^{s_1+1}(x)) \wedge D_{j_1}^{s_1}(x, y) \\ \neg E^*(r^{s_2}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{s_2+1}(x), y) \wedge K_0(r^{s_2}(x), y, r^{s_2+1}(x)) \wedge D_{j_2}^{s_2}(x, y)$$

для некоторых $1 \le j_1, j_2 \le k$.

Случай 1. $j_1 + j_2 \le k$. В этом случае

$$\exists t\big[\neg E^*(r^{s_1}(x), t) \wedge \neg E^*(r^{s_1+1}(x), t) \wedge K_0(r^{s_1}(x), t, r^{s_1+1}(x)) \wedge D_{j_1}^{s_1}(x, t) \\ \wedge \neg E^*(r^{s_2}(t), y) \wedge \neg E^*(r^{s_2+1}(t), y) \wedge K_0(r^{s_2}(t), y, r^{s_2+1}(t)) \wedge D_{j_2}^{s_2}(t, y)\big]$$

однозначно определяет формулу

$$\neg E^*(r^{(s_1+s_2)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \\ \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x)) \wedge D_{j_1+j_2}^{s_1+s_2}(x, y).$$

Аналогично показывается в обратную сторону.

Случай 2. $j_1 + j_2 > k$.

Подслучай 2a. $(j_1+j_2)[\mathrm{mod}\, k+1] = 0$. Если при этом $(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m] = 0$, то исследуемая формула совместна с формулами

$$x = y, \quad E(x, y) \wedge K_0(x, y, r(x)), \quad E(x, y) \wedge K_0(r^{m-1}(x), y, x).$$

Если же $(s_1 + s_2 + 1)[\mathrm{mod}\, m] \ne 0$, то наша формула совместна с формулами

$$E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\mathrm{mod}\ m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x)),$$

$$E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \wedge K_0(r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+2)[\mathrm{mod}\, m]}(x)).$$

Подслучай 2b. $(j_1 + j_2)[\mathrm{mod}\, k + 1] \ne 0$. В этом случае наша формула однозначно определяет формулу

$$\neg E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{(s_1+s_2+2)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y) \\ \wedge K_0(r^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+2)[\mathrm{mod}\, m]}(x)) \wedge D_{(j_1+j_2)[\mathrm{mod}\, k+1]}^{(s_1+s_2+1)[\mathrm{mod}\, m]}(x, y).$$

Аналогично показывается в обратную сторону. □

3. Некоммутативный случай

Пример 3.1. Рассмотрим структуру $M'_* := \langle M, K^3, R^2 \rangle$ из теоремы 1.9. Поскольку функция $r(y) := \mathrm{rend}\, R(M, y)$ монотонна влево на M, то в силу леммы 2.2 из [14] возникает $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на два выпуклых класса и определяемое следующим образом:

$$E(x, y) := R'(x, y) \vee R'(y, x),$$

где $R'(x, y) := R(x, y) \wedge \forall z(R(z, x) \to R(z, y))$.

Утверждаем, что $\mathrm{Th}(M_*)$ имеет пять бинарных изолирующих формул:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_1(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge E(x,y),$$
$$\theta_2(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge \neg E(x,y),$$
$$\theta_3(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge \neg E(x,y),$$
$$\theta_4(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge E(x,y),$$

причем для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a,M),\theta_1(a,M),\theta_2(a,M),\theta_3(a,M),\theta_4(a,M)).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

$$\text{метка } k \text{ для } \theta_k(x,y), \text{ где } 0 \leq k \leq 4.$$

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M'_*}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{4,0,1\}$
2	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{4,0,1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{4,0,1\}$	$\{2,3\}$
4	$\{4\}$	$\{4,0,1\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$	$\{4\}$

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M'_*}$ некоммутативна.

Предложение 3.2. *Алгебра $\mathfrak{P}_{M'_*}$ бинарных изолирующих формул имеет пять меток и некоммутативна.*

Пример 3.3. Рассмотрим структуру $M^4_{4,1} := \langle M, K^3, E^2, R^2\rangle$ из теоремы 1.9. Утверждаем, что $\mathrm{Th}(M^4_{4,1})$ имеет семь бинарных изолирующих формул:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$

$$\theta_1(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge E(x,y),$$
$$\theta_2(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E^*(r(x),y),$$
$$\theta_3(x,y) := K_0(x,y,r(x)) \wedge E^*(r(x),y),$$
$$\theta_4(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge E^*(r(x),y),$$
$$\theta_5(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E^*(r(x),y),$$
$$\theta_6(x,y) := K_0(r(x),y,x) \wedge E(x,y),$$

причем для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a,M),\theta_1(a,M),\theta_2(a,M),\ldots,\theta_5(a,M),\theta_6(a,M)).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

$$\text{метка } k \text{ для } \theta_k(x,y), \text{ где } 0 \leq k \leq 6.$$

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M^4_{4,1}}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$
3	$\{3\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$
5	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$	$\{5\}$
6	$\{6\}$	$\{6,0,1\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M^4_{4,1}}$ некоммутативна.

Теорема 3.4. *Алгебра $\mathfrak{P}_{M^4_{n,k}}$ бинарных изолирующих формул имеет $n+\frac{n}{k+1}+1$ меток и некоммутативна для всех допустимых значений n,k.*

Доказательство. Основное множество M структуры $M^4_{n,k}$ разбивается отношением эквивалентности E на n бесконечных выпуклых классов. Произвольный элемент $a\in M$ попадает в один из этих выпуклых классов, при этом в нем возникают три бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x,y):=x=y,$$
$$\theta_1(x,y):=E(x,y)\wedge K_0(x,y,r(x)),$$
$$\theta_{n+\frac{n}{k+1}}(x,y):=E(x,y)\wedge K_0(r^{\frac{n}{k+1}-1}(x),y,x).$$

Каждый из $\frac{n}{k+1}-1$ выпуклых классов, куда попадает $r^s(a)$ для некоторого $1\le s\le\frac{n}{k+1}-1$, разбивается на две бинарные изолирующие формулы:

$$E^*(r^s(x),y)\wedge K_0(r^s(x),y,r^{s+1}(x)),\quad E^*(r^s(x),y)\wedge K_0(r^{s-1}(x),y,r^s(x)).$$

Остается еще $n-\frac{n}{k+1}$ выпуклых классов, где нет $r^s(a)$ для любого $0\le s\le\frac{n}{k+1}-1$, определяя дополнительно $n-\frac{n}{k+1}$ бинарных изолирующих формул. Таким образом, получаются $3+2\big(\frac{n}{k+1}-1\big)+n-\frac{n}{k+1}=n+\frac{n}{k+1}+1$ бинарных изолирующих формул.

Рассмотрим следующие бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_{k_1}(x,y):=E(x,y)\wedge K_0(x,y,r(x)),\quad \theta_{k_2}(x,y):=E^*(r(x),y)\wedge K_0(x,y,r(x)).$$

Поскольку f монотонна влево на каждом E-классе, то

$$\exists t[E(x,y)\wedge K_0(x,y,r(x))\wedge E^*(r(t),y)\wedge K_0(t,y,r(t))]$$

однозначно определяет формулу $E^*(r(x),y)\wedge K_0(x,y,r(x))$.

С другой стороны, поскольку для любого $a\in M$ выполняется $K_0(a,\ r(a),\ r^2(a),\ \ldots,\ r^{m-1}(a))$, то

$$\exists t[E^*(r(x),t)\wedge K_0(x,t,r(x))\wedge E(t,y)\wedge K_0(t,y,r(t))]$$

совместна с формулами

$$E^*(r(x),y)\wedge K_0(x,y,r(x))\text{ и }E^*(r(x),y)\wedge K_0(r(x),y,x)$$

независимо от поведения функции r.

Следовательно, $k_1\cdot k_2\ne k_2\cdot k_1$, т. е. алгебра $\mathfrak{P}_{M^4_{n,k}}$ некоммутативна. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1 с $\mathrm{dcl}(a) = \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда алгебра $\mathfrak{P}_M$ бинарных изолирующих формул коммутативна в том и только в том случае, если для любой выпуклой вправо формулы $R(x, y)$, не являющейся эквивалентность-генерирующей, функция $r(y) := \mathrm{rend}\, R(M, y)$ монотонна вправо на M.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Судоплатов С. В.* Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1, 2. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018.
2. *Shulepov I. V., Sudoplatov S. V.* Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Sib. Electron. Math. Rep. 2014. V. 11. P. 380–407.
3. *Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В.* Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2015. Т. 300, № 2. С. 5–13.
4. *Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В.* Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 1. С. 20–54.
5. *Байкалова К. А., Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Палютин Е. А., Судоплатов С. В.* Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул теорий абелевых групп и их упорядоченных обогащений // Изв. вузов. Математика. 2018. Т. 4. С. 3–15.
6. *Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В.* Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 6. С. 662–683.
7. *Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В.* Алгебры бинарных формул для композиций теорий // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4. С. 432–457.
8. *Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.* Algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories with non-trivial definable closure // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 12. P. 3532–3540.
9. *Алтаева А. Б., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В.* Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 4. С. 369–399.
10. *Bhattacharjee M., Macpherson H. D., Möller R. G., Neumann P. M.* Notes on infinite permutation groups. Berlin: Springer, 1998. (Lect. Notes Math.; V. 1698).
11. *Cameron P. J.* Orbits of permutation groups on unordered sets. II // J. London Math. Soc. 1981. V. 2. P. 249–264.
12. *Droste M., Giraudet M., Macpherson H. D., Sauer N.* Set-homogeneous graphs // J. Combinat. Theory. Ser. B. 1994. V. 62, N 1. P. 63–95.
13. *Kulpeshov B. Sh., Macpherson H. D.* Minimality conditions on circularly ordered structures // Math. Logic Quart. 2005. V. 51, N 4. P. 377–399.
14. *Kulpeshov B. Sh.* On $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures // Math. Logic Quart. 2006. V. 52, N 6. P. 555–574.
15. *Кулпешов Б. Ш.* Определимые функции в $\aleph_0$-категоричных слабо циклически минимальных структурах // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 356–379.
16. *Kulpeshov B. Sh., Verbovskiy V. V.* On weakly circularly minimal groups // Math. Logic Quart. 2015. V. 61, N 1-2. P. 82–90.
17. *Кулпешов Б. Ш.* О неразличимости множества в циклически упорядоченных структурах // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 255–266.
18. *Кулпешов Б. Ш., Алтаева А. Б.* Бинарные формулы в счетно категоричных слабо циклически минимальных структурах // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 3. С. 341–365.
19. *Kulpeshov B. Sh.* On almost binarity in weakly circularly minimal structures // Euras. Math. J. 2016. V. 7, N 2. P. 38–49.
20. *Алтаева А. Б., Кулпешов Б. Ш.* О почти бинарности счетно-категоричных слабо циклически минимальных структур // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 6. С. 803–823.
21. *Macpherson H. D. Marker D., Steinhorn C.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352, N 12. P. 5435–5483.

22. *Кулпешов Б. Ш., Алтаева А. Б.* Эквивалентность-генерирующие формулы в слабо циклически минимальных структурах // Докл. НАН РК. 2014. Т. 2. С. 5–10.

Поступила в редакцию 23 ноября 2022 г.
После доработки 15 мая 2023 г.
Принята к публикации 28 января 2024 г.

Кулпешов Бейбут Шайыкович (ORCID 0000-0002-4242-0463)
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан;
Институт математики и математического моделирования,
ул. Шевченко, 28, Алматы 050010, Казахстан
`b.kulpeshov@kbtu.kz`, `kulpesh@mail.ru`