Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 514.752.8+514.763+514.765+514.764.227

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КРАТЧАЙШИЕ НЕКОТОРЫХ СУБРИМАНОВЫХ МЕТРИК НА ГРУППАХ ЛИ $\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}$ И $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$ С ТРЕХМЕРНЫМИ ПОРОЖДАЮЩИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

И. А. Зубарева

Аннотация. Найдены геодезические, множества разреза, первая каустика, выделены кратчайшие для некоторых левоинвариантных субримановых метрик на группах Ли $\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}$ и $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.206

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, геодезическая, левоинвариантная субриманова метрика, кратчайшая, первая каустика, множество разреза.

§ 1. Введение

В статье [1] Г. М. Мубаракзянова получена классификация (с точностью до изоморфизма) всех четырехмерных вещественных алгебр Ли. В [2] приведена модифицированная версия этой классификации, указаны все автоморфизмы рассматриваемых алгебр Ли и дана классификация всех связных групп Ли с этими алгебрами Ли. Согласно [2] четырехмерная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}_{3,6}\oplus\mathfrak{g}_1$ имеет базис E_1, E_2, E_3, E_4, удовлетворяющий следующим коммутационным соотношениям:

$$[E_1,E_2]=-E_3,\quad [E_2,E_3]=E_1,\quad [E_3,E_1]=E_2,\quad [E_i,E_4]=0,\ i=1,2,3. \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathfrak{g}_{3,6}\oplus\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$.

Известно (см., например, [2]), что $\mathfrak{so}(2,1)$ — единственная трехмерная алгебра Ли, односвязная группа Ли $\widetilde{A}$ которой не имеет линейного представления. Всякая связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2,1)$ либо изоморфна $\widetilde{A}$, либо есть n-листное покрытие A_n укороченной группы Лоренца $\mathrm{SO}_0(2,1)$, $n\geq 1$. При этом $\mathrm{SO}_0(2,1)$ изоморфна $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, двулистное покрытие A_2 изоморфно $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, четырехлистное покрытие A_4 изоморфно $\mathrm{M}_p(2,\mathbb{R})$.

Согласно [2] существует шесть типов связных групп Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$:

1) односвязная группа Ли $\widetilde{A}\times\mathbb{R}$;

2) n-листные покрытия $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/\exp(2n\pi\mathbb{Z}E_3)\cong A_n\times\mathbb{R}$ группы $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$;

3) группа $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/\exp(\mathbb{Z}E_4)\cong\widetilde{A}\times\mathbb{T}$;

Работа автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

4) n-листные покрытия $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/\exp(n\mathbb{Z}(2\pi E_3+E_4))$ группы Ли $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/\exp(\mathbb{Z}(2\pi E_3+E_4))$;

5) n-листные покрытия $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/(\exp(2n\pi\mathbb{Z}E_3)\exp(\mathbb{Z}E_4))\cong A_n\times\mathbb{T}$ группы Ли $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/(\exp(\mathbb{Z}E_3)\exp(\mathbb{Z}E_4))\cong \mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{T}$;

6) n^2-листные покрытия $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/(\exp(n\mathbb{Z}(2\pi E_3+\alpha E_4))\exp(n\mathbb{Z}E_4))$ группы Ли $(\widetilde{A}\times\mathbb{R})/(\exp(\mathbb{Z}(2\pi E_3+\alpha E_4))\exp(\mathbb{Z}E_4))$.

В [3] доказано следующее

Предложение 1. *Трехмерное подпространство $\mathfrak{q}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$ порождает $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{so}(2,1)$ и проекция $\mathfrak{q}$ на $\mathfrak{so}(2,1)$ вдоль $\mathbb{R}$ не является двумерной подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1)$. Существует пять неэквивалентных классов эквивалентных, т. е. переводимых друг в друга автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$, таких подпространств.*

Положим

$$\mathfrak{q}_1=\mathrm{span}\{E_1,E_4-E_3,E_2\},\quad \mathfrak{q}_2=\mathrm{span}\{E_1,E_4,E_2\},\quad \mathfrak{q}_3=\mathrm{span}\{E_1,E_4,E_3\},$$

$$\mathfrak{q}_4=\mathrm{span}\{E_1,E_4-E_2,E_3\},\quad \mathfrak{q}_5=\mathrm{span}\{E_4+(E_2-E_3)/2,E_2+E_3,E_1\}.$$

Нетрудно показать, что каждое подпространство $\mathfrak{q}_i$, $i=1,\dots,5$, порождает алгебру Ли $\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$ и эти подпространства попарно неэквивалентны.

С использованием результатов работы [4] в этой статье найдены геодезические субримановых метрик d_i, $i=1,2$, на связной группе Ли G (с единичным элементом Id) с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$, заданных левоинвариантными вполне неголономными распределениями D_i с $D_i(\mathrm{Id})=\mathfrak{q}_i$ и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ с ортонормированным базисом E_1,E_4-E_3,E_2 при $i=1$ и E_1,E_4,E_2 при $i=2$. С помощью методов и результатов работ [5–11] найдены множества разреза, первые каустики, выделены непродолжаемые кратчайшие на группах Ли $\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}$ и $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$, снабженных этими метриками.

§ 2. Предварительные результаты

Теорема 1. *Пусть задан базис*

$$e_1=E_1,\quad e_2=E_4-E_3,\quad e_3=E_2,\quad e_4=-E_3 \tag{2}$$

алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$, $D_1(\mathrm{Id})=\mathrm{span}(e_1,e_2,e_3)$ и на $D_1(\mathrm{Id})$ задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ с ортонормированным базисом e_1,e_2,e_3. Тогда левоинвариантное распределение D_1 на связной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ вполне неголономно и пара $(D_1(\mathrm{Id}),\langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d_1 на G. При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma_1=\gamma_1(t)$, $t\in\mathbb{R}$, в (G,d_1), удовлетворяющая условию $\gamma_1(0)=\mathrm{Id}$, есть произведение двух однопараметрических подгрупп

$$\gamma_1(t)=\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t)=\exp(t(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\beta e_4))\exp(-t\beta e_4), \tag{3}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ — некоторые вещественные постоянные, причем

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1. \tag{4}$$

Доказательство. В силу (1), (2)

$$[e_1,e_2]=[e_1,e_4]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_2,e_3]=-[e_3,e_4]=e_1,\quad [e_2,e_4]=0. \tag{5}$$

Отсюда вытекает первое утверждение теоремы 1.

Из (5) и [3, теорема 3] следует, что каждая анормальная экстремаль в (G, d_1) нестрого анормальна, следовательно, является геодезической. По [4, теорема 9] всякая нормальная геодезическая $\gamma_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_1(0) = \mathrm{Id}$, в (G, d_1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\gamma}(t) = dl_{\gamma(t)}(u(t)), \quad u(t) = \psi_1(t)e_1 + \psi_2(t)e_2 + \psi_3(t)e_3, \quad |u(0)| = 1, \tag{6}$$

причем абсолютно непрерывные функции $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, удовлетворяют системе ОДУ

$$\dot{\psi}_j(t) = \sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} C_{ij}^k \psi_i(t)\psi_k(t), \quad j = 1, \dots, 4. \tag{7}$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

С учетом (5) система (7) принимает вид

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_3(\psi_2 + \psi_4), \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1(\psi_2 + \psi_4), \quad \dot{\psi}_4 = 0.$$

Зададим произвольные начальные данные этой системы: $\psi_i(0) = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$; $\psi_4(0) = -\alpha_2 - \beta$. Нетрудно видеть, что тогда $\psi_4(t) \equiv -\alpha_2 - \beta$,

$$\psi_1(t) = \alpha_1 \cos\beta t + \alpha_3 \sin\beta t, \quad \psi_2(t) \equiv \alpha_2, \quad \psi_3(t) = -\alpha_1 \sin\beta t + \alpha_3 \cos\beta t, \tag{8}$$

причем условие $|u(0)| = 1$ равносильно равенству (4).

Докажем, что (3) является решением дифференциального уравнения (6). Из (5) следует, что $(\mathrm{ad}(e_4)) = e_{13} - e_{31}$, где (f) обозначает матрицу линейного отображения $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4. Здесь e_{ij} — матрица четвертого порядка, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю. Дифференцируя (3) и используя (6), (8), получаем

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1(t) &= \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4))(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)\exp(-t\beta e_4) \\
&+ \gamma_1(t)(-\beta e_4) = \gamma_1(t)\exp(t\beta e_4)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)\exp(-t\beta e_4) + \gamma_1(t)(-\beta e_4) \\
&= \gamma_1(t)\exp(t\beta e_4)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)\exp(-t\beta e_4) + \gamma_1(t)(\beta e_4) + \gamma_1(t)(-\beta e_4) \\
&= \gamma_1(t) \cdot [\mathrm{Ad}(\exp(t\beta e_4))(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)] \\
&= \gamma_1(t) \cdot [\exp(t\beta(\mathrm{ad}(e_4)))(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)] \\
&= \gamma_1(t) \cdot [(\alpha_1 \cos\beta t + \alpha_3 \sin\beta t)e_1 + \alpha_2 e_2 + (-\alpha_1 \sin\beta t + \alpha_3 \cos\beta t)e_3] \\
&= \gamma_1(t)u(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть задан базис*

$$e_1 = E_1, \quad e_2 = E_4, \quad e_3 = E_2, \quad e_4 = -E_3 \tag{9}$$

алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbb{R}$, $D_2(\mathrm{Id}) = \mathrm{span}(e_1, e_2, e_3)$ и на $D_2(\mathrm{Id})$ задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Тогда левоинвариантное распределение D_2 на связной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ вполне неголономно и пара $(D_2(\mathrm{Id}), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d_2 на G. При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma_2 = \gamma_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (G, d_2), удовлетворяющая условию $\gamma_2(0) = \mathrm{Id}$, есть произведение двух однопараметрических подгрупп

$$\gamma_2(t) = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4))\exp(-t\beta e_4), \tag{10}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ — *некоторые вещественные постоянные и выполнено* (4).

Доказательство. В силу (1), (9)

$$[e_1, e_2] = [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_3, \quad [e_3, e_4] = -e_1. \quad (11)$$

Отсюда вытекает первое утверждение теоремы 2.

Из (11) и [3, теорема 3] следует, что каждая анормальная экстремаль субриманова пространства (G, d_2) нестрого анормальна, стало быть, является геодезической. При этом с учетом (11) система (7) принимает вид

$$\dot\psi_1 = -\psi_3\psi_4, \quad \dot\psi_2 = 0, \quad \dot\psi_3 = \psi_1\psi_4, \quad \dot\psi_4 = 0.$$

Зададим произвольные начальные данные этой системы: $\psi_i(0) = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, $\psi_4(0) = -\beta$. Нетрудно видеть, что тогда $\psi_4(t) \equiv -\beta$, а функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, определены формулами (8). Из (11) следует, что $(\mathrm{ad}(e_4)) = e_{13} - e_{31}$. Повторяя вычисления последнего абзаца доказательства теоремы 1, получаем, что (10) — решение ОДУ (6). Это завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Предложение 2. *Для любых* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{S}^2$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и для каждого* $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_2; t) \exp(t\alpha_2 e_4).$$

Доказательство. Вследствие (2), (3), (9), (10)

$$\begin{aligned} &\gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_2; t) \exp(t\alpha_2 e_4) \\ &\quad = \exp(t(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_4 + \alpha_3 E_2 - (\beta + \alpha_2) E_3)) \exp(t(\beta + \alpha_2) E_3) \exp(-t\alpha_2 E_3) \\ &= \exp(t(\alpha_1 E_1 + \alpha_2(E_4 - E_3) + \alpha_3 E_2 - \beta E_3)) \exp(t\beta E_3) = \gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t). \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 3. *Каждая параметризованная длиной дуги анормальная экстремаль субриманова пространства* (G, d_i), $i = 1, 2$, *нестрого анормальна и является одной из двух однопараметрических подгрупп*

$$\gamma_i(0, \alpha_2, 0, \beta; t) = \exp(t\alpha_2 e_2), \quad \alpha_2 = \pm 1, \ \beta \in \mathbb{R},$$

или ее левым сдвигом на (G, d_i).

Доказательство. Если $\alpha_2 = \pm 1$, то $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ в силу (4). Из (3), (5), (10), (11) и равенства $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$, если $[X, Y] = 0$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ (см., например, [12, гл. II, § 5]) следует, что при любом $\beta \in \mathbb{R}$

$$\gamma_i(0, \alpha_2, 0, \beta; t) = \exp(t(\alpha_2 e_2 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4) = \exp(\alpha_2 t e_2).$$

Отсюда и из [3] вытекают остальные утверждения предложения 3. $\square$

Предложение 4. *Пусть* $\gamma_i(t) = \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, — *геодезическая в* (G, d_i), $i = 1, 2$, *определяемая формулами* (3), (10). *Тогда для каждого* $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\gamma_i(t_0)^{-1}\gamma_i(t) = \gamma_i(\alpha_1 \cos\beta t_0 + \alpha_3 \sin\beta t_0, \alpha_2, -\alpha_1 \sin\beta t_0 + \alpha_3 \cos\beta t_0, \beta; t - t_0).$$

Доказательство. На основании (3), (10), равенства $(\mathrm{ad}(e_4)) = e_{13} - e_{31}$, упомянутого в доказательствах теорем 1 и 2, и формулы (5) в [12, гл. II, § 5] получаем

$$\begin{aligned} \gamma_i(t_0)^{-1}\gamma_i(t) &= \exp(t_0\beta e_4) \exp(-t_0(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \\ &\quad \times \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4) \\ &= \exp(t_0\beta e_4) \exp((t - t_0)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t_0\beta e_4) \exp(-(t - t_0)\beta e_4) \\ &= \exp[\mathrm{Ad}(\exp(t_0\beta e_4))((t - t_0)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4))] \cdot \exp(-(t - t_0)\beta e_4) \\ &= \exp[\exp(\mathrm{ad}(t_0\beta e_4))((t - t_0)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4))] \cdot \exp(-(t - t_0)\beta e_4) \\ &= \exp((t - t_0)((\alpha_1 \cos\beta t_0 + \alpha_3 \sin\beta t_0) e_1 + \alpha_2 e_2 \\ &\quad + (-\alpha_1 \sin\beta t_0 + \alpha_3 \cos\beta t_0) e_3 + \beta e_4) \cdot \exp(-(t - t_0)\beta e_4) \\ &= \gamma_i(\alpha_1 \cos\beta t_0 + \alpha_3 \sin\beta t_0, \alpha_2, -\alpha_1 \sin\beta t_0 + \alpha_3 \cos\beta t_0, \beta; t - t_0). \quad \square \end{aligned}$$

§ 3. Субримановы геодезические на $\mathbf{SU(1,1)} \times \mathbb{R}$

Напомним, что $\mathrm{SU}(1,1)$ есть группа Ли комплексных матриц второго порядка с определителем 1, сохраняющих индефинитную эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$ в $\mathbb{C}^2$:

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{(A,B) := \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathbb{C},\ |A|^2 - |B|^2 = 1\right\}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{s}u(1,1)$ группы Ли $\mathrm{SU}(1,1)$ есть

$$\left\{\mathfrak{s}u(1,1) = \begin{pmatrix} iX & Y \\ \overline{Y} & -iX \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R},\ Y \in \mathbb{C}\right\}, \quad \mathfrak{s}u(1,1) \cong \mathfrak{so}(2,1).$$

Тривиальное абелево расширение

$$SU(1,1) \times \mathbb{R} = \left\{(A,B,v) := \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ \overline{B} & \overline{A} & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathbb{C},\ |A|^2 - |B|^2 = 1;\ v \in \mathbb{R}\right\} \tag{12}$$

группы Ли $\mathrm{SU}(1,1)$ есть группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{s}u(1,1) \oplus \mathbb{R}$ которой имеет базис E_1, E_2, E_3, E_4, удовлетворяющий (1):

$$E_1 = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}), \quad E_2 = \frac{i}{2}(e_{12} - e_{21}), \quad E_3 = \frac{i}{2}(e_{11} - e_{22}), \quad E_4 = e_{33}; \tag{13}$$

здесь через e_{ij}, $i, j = 1, \dots, 3$, обозначена матрица третьего порядка, у которой в i-й строке и в j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю.

Замечание 1. Группа Ли $\mathrm{SU}(1,1)$ изоморфна специальной линейной группе Ли $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, состоящей из всех вещественных матриц второго порядка с определителем 1. Искомый изоморфизм $\Omega : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, задаваемый формулой

$$\Omega(g) = hgh^{-1},\ h = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},\ \Omega(A,B) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(A) + \mathrm{Im}(B) & \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Re}(B) \\ \mathrm{Re}(B) - \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) - \mathrm{Im}(B) \end{pmatrix},$$

естественным образом можно продлить до изоморфизма $\widetilde{\Omega} : \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что дифференциал $d\widetilde{\Omega}(\mathrm{Id})$ есть изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{s}u(1,1) \oplus \mathbb{R}$ и $\mathfrak{s}l(2) \oplus \mathbb{R}$, переводящий базис E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры Ли $\mathfrak{s}u(1,1) \oplus \mathbb{R}$, заданный формулами (13), в одноименный базис алгебры Ли $\mathfrak{s}l(2) \oplus \mathbb{R}$, заданный формулами

$$E_1 = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}), \quad E_2 = \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}), \quad E_3 = \frac{1}{2}(e_{12} - e_{21}), \quad E_4 = e_{33}.$$

Теорема 3. *Пусть*

$$m_2 = t/2, \quad n_2 = 1, \quad \textit{если} \ \ \beta^2 = 1 - \alpha_2^2; \tag{14}$$

$$m_2 = \frac{\mathrm{sh}\,\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}}{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}, \quad n_2 = \mathrm{ch}\,\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}, \quad \textit{если}\ \beta^2 < 1 - \alpha_2^2; \tag{15}$$

$$m_2 = \frac{\sin\frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}, \quad n_2 = \cos\frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}, \quad \textit{если}\ \beta^2 > 1 - \alpha_2^2. \tag{16}$$

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ *геодезическая* $\widetilde{\gamma}_2(t) = \widetilde{\gamma}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = (A, B, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$, *определяемая равенством* (10), *задается формулами*

$$A = \left(n_2 \cos\frac{\beta t}{2} + \beta m_2 \sin\frac{\beta t}{2}\right) + \left(n_2 \sin\frac{\beta t}{2} - \beta m_2 \cos\frac{\beta t}{2}\right) i, \tag{17}$$

$$B = m_2\sqrt{1-\alpha_2^2}\left[\cos\left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0\right) i\right], \quad v = \alpha_2 t, \tag{18}$$

где

$$\cos\varphi_0 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}, \quad \sin\varphi_0 = -\frac{\alpha_3}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}. \tag{19}$$

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ *геодезическая субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$, *определяемая формулой* (10), *равна* $\widetilde{\gamma}_2(t) = (e, \alpha_2 t)$, $t \in \mathbb{R}$, *где* e *— единичная* 2×2*-матрица.*

Доказательство. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$. Используя (4), (9), (13), (14)–(16), нетрудно получить, что

$$\exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) = \begin{pmatrix} n_2 - \beta m_2 i & (\alpha_1 + \alpha_3 i) m_2 & 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_3 i) m_2 & n_2 + \beta m_2 i & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix},$$

$$\exp(-t\beta e_4) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta t}{2} + i\sin\frac{\beta t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\beta t}{2} - i\sin\frac{\beta t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основании (10) осталось перемножить эти матрицы.

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ утверждение теоремы 3 следует из предложения 3, (9), (13). □

Следующая теорема сразу вытекает из теоремы 3 и предложений 1, 2.

Теорема 4. *Пусть*

$$m_1 = \frac{t}{2}, \quad n_1 = 1, \quad \text{если } (\alpha_2 + \beta)^2 = 1 - \alpha_2^2;$$

$$m_1 = \frac{\operatorname{sh}\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-(\alpha_2+\beta)^2}}{2}}{\sqrt{1-\alpha_2^2-(\alpha_2+\beta)^2}}, \quad n_1 = \operatorname{ch}\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-(\alpha_2+\beta)^2}}{2},$$

если $(\alpha_2 + \beta)^2 < 1 - \alpha_2^2$*;*

$$m_1 = \frac{\sin\frac{t\sqrt{(\alpha_2+\beta)^2+\alpha_2^2-1}}{2}}{\sqrt{(\alpha_2+\beta)^2+\alpha_2^2-1}}, \quad n_1 = \cos\frac{t\sqrt{(\alpha_2+\beta)^2+\alpha_2^2-1}}{2},$$

если $(\alpha_2 + \beta)^2 > 1 - \alpha_2^2$*.*

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ *геодезическая* $\widetilde{\gamma}_1(t) = \widetilde{\gamma}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = (A, B, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$, *определяемая равенством* (3), *задается формулами*

$$A = \left(n_1 \cos\frac{\beta t}{2} + (\alpha_2 + \beta) m_1 \sin\frac{\beta t}{2}\right) + \left(n_1 \sin\frac{\beta t}{2} - (\alpha_2 + \beta) m_1 \cos\frac{\beta t}{2}\right) i,$$

$$B = m_1\sqrt{1-\alpha_2^2}\left[\cos\left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0\right) i\right], \quad v = \alpha_2 t,$$

причем выполнено (19).

При $\alpha_2 = \pm 1$ *геодезическая* $\widetilde{\gamma}_1(t) = (A, B, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$, *определяемая равенством* (3), *задается формулами*

$$A = e^{-i(\alpha_2 t/2)}, \quad B \equiv 0, \quad v = \alpha_2 t. \tag{20}$$

Замечание 2. При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическую $\widetilde{\gamma}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$ будем также обозначать через $\widetilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, если выполнено (19).

§ 4. Множество разреза и первая каустика в $\mathbf{SU(1,1)} \times \mathbb{R}$

Следующие определения адаптированы из обзора [10] для рассматриваемой в § 2 группы Ли G.

Момент времени $\widehat{t} > 0$ называется *сопряженным временем* для нормальной геодезической $\gamma_i(t) = \mathrm{Exp}_i(\lambda, t)$, $\lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \in C := \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, субриманова пространства (G, d_i), задаваемой формулой (3) при $i = 1$ или (10) при $i = 2$, если $(\lambda, \widehat{t})$ есть критическая точка экспоненциального отображения, т. е. дифференциал

$$(\mathrm{Exp}_i)_{*(\lambda, \widehat{t})} : T_{(\lambda, \widehat{t})}(C \times \mathbb{R}_+) \to T_{\widehat{g}_i} G, \quad \text{где } \widehat{g}_i = \mathrm{Exp}_i(\lambda, \widehat{t}),$$

вырожденный. Первое сопряженное время вдоль геодезической $\gamma_i(t)$ есть

$$t^1_{\mathrm{conj}} = \inf\{t > 0 \mid t \text{ — сопряженное время вдоль } \gamma_i(\cdot)\}.$$

Если $t^1_{\mathrm{conj}} > 0$, то $\gamma_i\big(t^1_{\mathrm{conj}}\big)$ называется *первой сопряженной точкой.*

Первой каустикой субриманова пространства (G, d_i) называется множество Conj^1_i всех первых сопряженных точек нормальных геодезических $\gamma_i(t)$, $\gamma_i(0) = \mathrm{Id}$. *Множеством разреза* (для точки Id) субриманова пространства (G, d_i) называется множество Cut_i всех концов $g \in G$ непродолжаемых за g кратчайших, соединяющих Id с точкой g.

Легко показать, учитывая предложение 3, что $t^1_{\mathrm{conj}} = 0$ вдоль нестрого анормальной экстремали $\gamma_i(t) = \exp(\pm t e_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 5. *Положим*

$$w_1 = \sqrt{(\alpha_2 + \beta)^2 + \alpha_2^2 - 1}, \quad w_2 = \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}, \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup (i\mathbb{R}_+)\,. \tag{21}$$

Момент времени $\widehat{t} > 0$ *— сопряженное время вдоль геодезической* $\widetilde{\gamma}_i(t) = \widetilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, *в* $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, *тогда и только тогда, когда* $w_i > 0$ *и*

$$\sin \frac{w_i \widehat{t}}{2} \left(\sin \frac{w_i \widehat{t}}{2} - \frac{w_i \widehat{t}}{2} \cos \frac{w_i \widehat{t}}{2} \right) = 0.$$

Доказательство. Пусть $i = 2$. Для удобства записи опустим нижний индекс у функций $\widetilde{\gamma}_2(t)$, w_2, $n_2(t)$, $m_2(t)$. На основании (12), (13)

$$\widetilde{\gamma}(t) = 2B_1(t)E_1 + 2B_2(t)E_2 + 2A_2(t)E_3 + e^{\alpha_2 t}E_4 + 2A_1(t)E_5,$$

где $E_5 = \frac{1}{2}(E - E_4)$, E — единичная матрица третьего порядка,

$$A_1 = \mathrm{Re}(A), \quad A_2 = \mathrm{Im}(A), \quad B_1 = \mathrm{Re}(B), \quad B_2 = \mathrm{Im}(B). \tag{22}$$

Пусть $w \neq 0$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 4 в [13], получаем, что если при $t \neq 0$ векторы $\widetilde{\gamma}_t'$, $\widetilde{\gamma}_{\alpha_2}'$, $\widetilde{\gamma}_\beta'$, $\widetilde{\gamma}_{\varphi_0}'$ линейно зависимы, то

$$\frac{m(2m-nt)\big(1-\alpha_2^2\big)t}{4w^2} = 0, \tag{23}$$

т. е. $m = 0$ или $m = nt/2$. Если $m = 0$, то $\widetilde{\gamma}_{\varphi_0}' = 0$; если $m = nt/2$, то $\widetilde{\gamma}_\beta' \parallel \widetilde{\gamma}_{\varphi_0}'$. Таким образом, в обоих случаях векторы $\widetilde{\gamma}_t'$, $\widetilde{\gamma}_{\alpha_2}'$, $\widetilde{\gamma}_\beta'$, $\widetilde{\gamma}_{\varphi_0}'$ линейно зависимы.

Заметим, что при $w^2 < 0$ равенство (23) выполнено только при $t = 0$, т. е. при $w^2 < 0$ геодезическая $\widetilde{\gamma}(t)$ не содержит сопряженных точек.

Пусть теперь $w = 0$. Легко видеть, что при $t \neq 0$ векторы $\widetilde{\gamma}_t'$, $\widetilde{\gamma}_{\alpha_2}'$, $\widetilde{\gamma}_{\varphi_0}'$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $t\widetilde{\gamma}_t' - \alpha_2\widetilde{\gamma}_{\alpha_2}'$ и $\widetilde{\gamma}_{\varphi_0}'$ коллинеарны. В этом случае необходимо, чтобы

$$t[(B_1)_{\varphi_0}'(B_2)_t' - (B_1)_t'(B_2)_{\varphi_0}'] - \alpha_2[(B_1)_{\varphi_0}'(B_2)_{\alpha_2}' - (B_1)_{\alpha_2}'(B_2)_{\varphi_0}'] = 0. \tag{24}$$

Из (14) и (18) вытекает, что $(B_1)_{\varphi_0}' = B_2$, $(B_2)_{\varphi_0}' = -B_1$. Поэтому равенство (24) можно записать в виде

$$t\big(B_1^2 + B_2^2\big)_t' - \alpha_2\big(B_1^2 + B_2^2\big)_{\alpha_2}' = 0.$$

Вследствие (18) $B_1^2 + B_2^2 = t^2(1-\alpha_2^2)/4$. Получаем

$$0 = t\big(t^2\big(1-\alpha_2^2\big)/4\big)_t' - \alpha_2\big(t^2\big(1-\alpha_2^2\big)/4\big)_{\alpha_2}' = t^2/2.$$

Следовательно, при $w = 0$ геодезическая $\widetilde{\gamma}(t)$ не содержит сопряженных точек.

Случай $i = 1$ рассматривается аналогично. $\square$

Следствие 1. 1. *n-е сопряженное время t_{conj}^n вдоль геодезической $\widetilde{\gamma}_i(t) = \widetilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, где $w_i > 0$, в $(SU(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, имеет вид*

$$t_{\mathrm{conj}}^{2m-1} = \frac{2\pi m}{w_i}, \quad t_{\mathrm{conj}}^{2m} = \frac{2x_m}{w_i}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\{x_1, x_2, \dots\}$ — упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

2. *Первая каустика Conj_i^1 субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, имеет вид*

$$\mathrm{Conj}_i^1 = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \mid |A| = 1,\ B = 0,\ v \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство. Первое утверждение следствия 1 вытекает из предложения 5. Далее, в силу теорем 3 и 4

$$\widetilde{\gamma}_j\big(t_{\mathrm{conj}}^1\big) = \widetilde{\gamma}_j\left(\frac{2\pi}{w_j}\right) = \left(-e^{i(\beta\pi/w_j)}, 0, \frac{2\alpha_2\pi}{w_j}\right), \quad j = 1, 2. \tag{25}$$

Рассмотрим функции

$$f_j(\alpha_2, \beta) = \frac{\beta\pi}{w_j}, \quad v_j(\alpha_2, \beta) = \frac{2\alpha_2\pi}{w_j}, \quad (\alpha_2, \beta) \in (-1, 1) \times \mathbb{R},\ w_j > 0, \quad j = 1, 2.$$

В силу (21) области значений функций $f_2(\alpha_2, \beta)$ и $v_2(\alpha_2, \beta)$ суть $\mathbb{R}\backslash[-\pi, \pi]$ и $\mathbb{R}$ соответственно, причем

$$v_2(\alpha_2, \beta) = \frac{2\alpha_2\sqrt{f_2^2(\alpha_2, \beta) - \pi^2}}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}.$$

Отсюда и из (25) получаем Conj_2^1.

В силу (21) область значений каждой из функций $f_1(\alpha_2, \beta)$, $v_1(\alpha_2, \beta)$ есть действительная прямая $\mathbb{R}$ и

$$f_1(\alpha_2, \beta) + \frac{1}{2}v_1(\alpha_2, \beta) = f_2(\alpha_2, \alpha_2 + \beta) \in \mathbb{R}\backslash[-\pi, \pi].$$

Отсюда получаем Conj_1^1. $\square$

Предложение 6. *При* $\alpha_2 = \pm 1$ *геодезическая* $\widetilde{\gamma}_i(t) = \exp(t\alpha_2 e_2)$, $t \in \mathbb{R}$, *субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, *— метрическая прямая, т. е. для любых* $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ *отрезок* $\widetilde{\gamma}_i(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, *— кратчайшая.*

Доказательство. Из теорем 3, 4 следует, что длина анормальной экстремали в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, соединяющей Id и (A, B, v), $0 \neq v \in \mathbb{R}$, равна $|v|$, а длина дуги нормальной геодезической $\widetilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, соединяющей эти элементы, равна $|v/\alpha_2| > |v|$. $\square$

Предложение 7. 1. *Геодезическая* $\widetilde{\gamma}_1(t) = \widetilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, -\alpha_2; t)$, $t \in \mathbb{R}$, *субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}, d_1)$ *— метрическая прямая.*

2. *Геодезическая* $\widetilde{\gamma}_2(t) = \widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, 0; t)$, $t \in \mathbb{R}$, *субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}, d_2)$ *— метрическая прямая.*

Доказательство. Докажем п. 2. Пусть $\alpha_2^* \neq \pm 1$, $\varphi_0^* \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Обозначим $(A, B, v) := \widetilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, 0; T)$. Из теоремы 3 следует, что

$$A = \operatorname{ch}\frac{T\sqrt{1-\alpha_2^{*2}}}{2},\ |B| = \operatorname{sh}\frac{T\sqrt{1-\alpha_2^{*2}}}{2},\ v = \alpha_2^* T \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{v^2 + 4\operatorname{arsh}^2|B|}. \tag{26}$$

Предположим, что Id и (A, B, v) можно соединить еще одной геодезической субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}, d_2)$, т. е. $(A, B, v) = \widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t_0)$. Тогда $\beta \neq 0$ в силу (26) и (18). На основании теоремы 3

$$|B| = |m_2(t_0)|\sqrt{1-\alpha_2^2}, \quad v = \alpha_2 t_0. \tag{27}$$

Вследствие (26), (27)

$$|t_0| > T \quad \Leftrightarrow \quad |t_0|\sqrt{1-\alpha_2^2} > 2\operatorname{arsh}|B|. \tag{28}$$

Лемма 1. *Пусть* $|B| > 0$, $0 < \mu < 1$, $0 < \eta \le 1/|B|$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\frac{|B|}{\sqrt{1+|B|^2}} < \operatorname{arsh}|B| < |B|, \quad \operatorname{arsh}(\mu|B|) > \mu\cdot\operatorname{arsh}|B|, \quad \arcsin(\eta|B|) > \eta\cdot\operatorname{arsh}|B|.$$

Доказательство. Для доказательства первого неравенства достаточно заметить, что функции $f_1(\varkappa) = \varkappa - \operatorname{arsh}\varkappa$, $f_2(\varkappa) = \operatorname{arsh}\varkappa - \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$ возрастают на луче $[0, +\infty)$ и $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Для доказательства второго неравенства достаточно заметить, что заданная на отрезке $[0, 1]$ функция $F_2(\varkappa) = \operatorname{arsh}(\varkappa|B|) - \varkappa\operatorname{arsh}|B|$ возрастает на $[0, \varkappa_0]$ и убывает на $[\varkappa_0, 1]$, где $\varkappa_0 = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{arsh}^2|B|} - \frac{1}{|B|^2}} \in (0, 1)$, и $F_2(0) = F_2(1) = 0$.

Для доказательства третьего неравенства достаточно заметить, что заданная на $[0, 1/|B|)$ функция $F_3(\varkappa) = \arcsin(\varkappa|B|) - \varkappa\operatorname{arsh}|B|$ возрастает и $F_3(0) = 0$, поскольку

$$F_3'(\varkappa) = \frac{|B|}{\sqrt{1-\varkappa^2|B|^2}} - \operatorname{arsh}|B| > |B| - \operatorname{arsh}|B| > 0. \quad \square$$

Пусть $\beta^2 = 1 - \alpha_2^2$. В силу (14) и (27) $|t_0| = \frac{2|B|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}$. Отсюда, из (28) и леммы 1 следует, что $|t_0| > T$.

Пусть $\beta^2 < 1-\alpha_2^2$. Обозначим $\varkappa = \sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}$. Из (15), (27), (28) следует, что

$$|t_0| = \frac{2}{\varkappa}\operatorname{arsh}\frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\varkappa^2+\beta^2}} > T \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{arsh}\frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\varkappa^2+|B|^2}} > \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+|B|^2}}\operatorname{arsh}|B|.$$

Последнее неравенство выполнено на основании леммы 1.

Пусть $\beta^2 > 1-\alpha_2^2$. Обозначим $\varkappa = \sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}$. Из (16), (27), (28) следует, что

$$|t_0| = \frac{2}{\varkappa}\arcsin\frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\beta^2-\varkappa^2}} > T \quad\Leftrightarrow\quad \arcsin\frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\beta^2-\varkappa^2}} > \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta^2-\varkappa^2}}\operatorname{arsh}|B|.$$

Последнее неравенство выполнено на основании леммы 1.

П. 1 предложения 7 доказывается аналогичным образом. □

Нам понадобится следующее известное

Предложение 8. *Если в группе Ли с левоинвариантной субримановой метрикой две точки соединяются двумя разными параметризованными длиной дуги нормальными геодезическими одинаковой длины, то каждая из этих геодезических либо не является кратчайшей, либо не может быть частью более длинной кратчайшей.*

Предложение 9. *Если отрезок* $\widetilde{\gamma}_i(t) = \widetilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \le t \le T$, *геодезической субриманова пространства* $(\mathrm{SU}(1,1), d_i)$, $i = 1, 2$, *является кратчайшей и* $w_i > 0$, *то* $T \le 2\pi/w_i$.

Доказательство. Из (25) следует, что $\widetilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; 2\pi/w_i)$ не зависит от φ_0. Остается применить предложение 8. □

Предложение 10. *Множество разреза* Cut_2 *в* $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}, d_2)$, *соответствующее* Id, *есть* $\mathrm{Cut}_2 = \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, *где*

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R} \mid A \ne 1,\ B = 0,\ v \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R} \mid \mathrm{Re}(A) < -1,\ \mathrm{Im}(A) = 0,\ v \in \mathbb{R}\}.$$

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{Cut}_2$. Пусть $g = (A, B, v) \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$. В силу теоремы 3, предложения 6 и теоремы Кон-Фоссена о существовании кратчайших существует кратчайшая $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \le t \le T$, соединяющая Id и g. Так как $B = 0$, то $m_2(T) = 0$ по теореме 3. Тогда $\beta^2 > 1-\alpha_2^2$ и $T = \frac{2\pi}{w_2}$ (см. предложение 9); при этом в силу (25) $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T) = \widetilde{\gamma}_2(\varphi, \alpha_2, \beta; T)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$. Значит, $g \in \mathrm{Cut}_2$ в силу предложения 8.

Покажем, что $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}} \subset \mathrm{Cut}_2$. Пусть $g = (A, B, v) \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$ и $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \le t \le T$, — кратчайшая, соединяющая Id и g. Из (17) и (26) следует, что $A = -\sqrt{n_2^2(T) + \beta^2 m_2^2(T)}$, $\beta \ne 0$. Отсюда, из (18) и нечетности функции $m_2(t)$ вытекает, что

$$\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T) = \widetilde{\gamma}_2(\beta T + \varphi_0 + \pi, \alpha_2, \beta; -T).$$

Поэтому $g \in \mathrm{Cut}_2$ на основании предложения 8.

Из теоремы 3 и предложений 6, 8 следует, что $(1, 0, v) \notin \mathrm{Cut}_2$, $v \in \mathbb{R}$. Предположим, что для некоторого $g = (A, B, v) \notin \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$ существуют две различные кратчайшие $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; t)$, $0 \le t \le T$, в $(\mathrm{SU}(1,1), d_2)$, соединяющие Id и g. Вследствие предложения 7 $\beta \neq 0$ и $\beta^* \neq 0$. Поскольку $v = \alpha_2 T = \alpha_2^* T$, то $\alpha_2 = \alpha_2^*$. Из (18) следует, что

$$m_2(\alpha_2, \beta, T) = m_2(\alpha_2, \beta^*, T). \tag{29}$$

Согласно (14)–(16) знак функции $m_2(\alpha_2, \beta, t) - \frac{t}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, совпадает со знаком числа $1 - \alpha_2^2 - \beta^2$. Тем самым числа $1 - \alpha_2^2 - \beta^2$ и $1 - \alpha_2^2 - \beta^{*2}$ имеют одинаковые знаки. Если эти числа равны нулю, то $|\beta| = |\beta^*|$. Если $1 - \alpha_2^2 - \beta^2 > 0$, то $|\beta| = |\beta^*|$ в силу (29), (15) и возрастания функции $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ при $x > 0$.

Если $1 - \alpha_2^2 - \beta^2 < 0$, то $T < \frac{2\pi}{w_2}$ в силу предложения 9 и условия $g \notin \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$. Тогда $|\beta| = |\beta^*|$ на основании (29), (16) и убывания функции $\frac{\sin x}{x}$ на интервале $(0, \pi)$.

Пусть $\beta = \beta^*$. Из (18) и (29) следует, что либо $\varphi_0^* = \varphi_0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, либо $B = 0$. В первом случае кратчайшие $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; t)$, $0 \leq t \leq T$, совпадают, что невозможно. Во втором случае $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$ и $T = \frac{2\pi}{w_2}$, т. е. $g \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$ на основании следствия 1.

Пусть $\beta^* = -\beta$, $\beta > 0$. Из (14)–(16), (17) следует, что $\mathrm{Im}(A)$ нечетна относительно β. Поэтому $\mathrm{Im}(A) = 0$.

Если $\beta^2 = 1 - \alpha_2^2$, то в силу (14) равенство $\mathrm{Im}(A) = 0$ можно переписать в виде $\operatorname{tg} \frac{\beta T}{2} = \frac{\beta T}{2}$. Тогда $\pi < \frac{\beta T}{2} < \frac{3\pi}{2}$ и с учетом (17) $\mathrm{Re}(A) = \cos \frac{\beta T}{2} + \frac{\beta T}{2} \sin \frac{\beta T}{2} < 0$.

Если $\beta^2 < 1 - \alpha_2^2$, то в силу (15) равенство $\mathrm{Im}(A) = 0$ можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} kx = k \operatorname{th} x, \quad k = \frac{|\beta|}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}} > 0,\ x = \frac{T\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}}{2} > 0. \tag{30}$$

Заметим, что функция $f(x) = \operatorname{tg} kx - k \operatorname{th} x$ возрастает на $(0, +\infty)$, $f\left(\frac{\pi}{k}\right) < 0$,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2k} - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2k} + 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{3\pi}{2k} - 0} f(x) = +\infty.$$

Поэтому $f(x) > 0$ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2k}\right)$, $f(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{k}\right]$ и $f(x)$ имеет единственный нуль на интервале $\left(\frac{\pi}{k}, \frac{3\pi}{2k}\right)$. Тогда $\pi < \frac{\beta T}{2} < \frac{3\pi}{2}$. С учетом (15), (17) и равенства $\mathrm{Im}(A) = 0$

$$\sin \frac{\beta T}{2} = \frac{-\beta m_2}{\sqrt{\beta^2 m_2^2 + n_2^2}},\ \cos \frac{\beta T}{2} = \frac{-n_2}{\sqrt{\beta^2 m_2^2 + n_2^2}} \ \Rightarrow\ \mathrm{Re}(A) = -\sqrt{\beta^2 m_2^2 + n_2^2} < 0. \tag{31}$$

Пусть $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$. Если $n_2(T) = 0$, то $T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}$, $m_2(T) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}$ в силу (16). Из равенства $\mathrm{Im}(A) = 0$ вытекает, что $\cos \frac{\beta T}{2} = 0$, т. е. $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}} = 1 + 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Если $l = 1$, то $\mathrm{Re}(A) = \beta m_2(T) \sin \frac{\beta T}{2} < 0$.

Если $l > 1$, то $\frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} < \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $T > \frac{3\pi}{\beta}$. Из дальнейших рассуждений будет следовать, что в этом случае отрезок геодезической $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, не является кратчайшей.

Если $n_2(T) \neq 0$, то в силу (16) равенство $\mathrm{Im}(A) = 0$ можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} kx = k \operatorname{tg} x, \quad k = \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}} > 1,\ x = \frac{T\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}{2} \in (0, \pi). \tag{32}$$

В доказательстве теоремы 6 в [8] показано, что уравнение (32) не имеет решений при $k \in (1, 2]$ и $k = 3$. Наименьший положительный корень этого уравнения принадлежит интервалу $\left(\frac{3\pi}{2k}, \frac{\pi}{k-1}\right)$ при $2 < k < 3$, $\left(\frac{\pi}{k-1}, \frac{3\pi}{2k}\right)$ при $k > 3$. Следовательно, $\cos x < 0$, $\cos kx > 0$ при $2 < k < 3$ и $\cos x > 0$, $\cos kx < 0$ при $k > 3$. Отсюда, учитывая (16), (17) и равенство $\operatorname{Im}(A) = 0$, снова получаем (31). Тогда $g \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, что невозможно. $\square$

Предложение 11. *Пусть $\widetilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \le t \le T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(SU(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$. Тогда $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \le t \le T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(SU(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$. Верно и обратное.*

Доказательство. Обозначим $g_1 = (A, B, v) = \widetilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T)$. По теореме 4 $v = \alpha_2 T$. Тогда $g_2 := \widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; T) = (Ae^{iv/2}, Be^{-iv/2}, v)$ на основании предложения 2 и (13). Предположим, что $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; t)$, $0 \le t \le T_1 < T$, — кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$, соединяющая Id и g_2; $v = \alpha_2^* T_1$ по теореме 4. В силу предложения 2 отрезок геодезической $\widetilde{\gamma}_1(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^* - \alpha_2^*; t)$, $0 \le t \le T_1$, в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$ соединяет Id и g_1, что невозможно. Следовательно, $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \le t \le T$, — кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$. Легко проверить, что если отрезок геодезической $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \le t \le T_2$, $T_2 > T$, — кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$, то $\widetilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T)$, $0 \le t \le T_2$, $T_2 > T$, является кратчайшей в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$, что невозможно. Таким образом, $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \le t \le T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$.

Обратное утверждение доказывается аналогичным образом. $\square$

Предложение 12. *Множество разреза* Cut_1 *в* $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_1)$, *соответствующее* Id, *есть* $\mathrm{Cut}_1 = \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}$, *где*

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \mid A \ne e^{-iv/2},\ B = 0,\ v \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R} \mid B \ne 0,\ \pi - v/2 \in \mathrm{Arg}(A),\ v \in \mathbb{R}\},$$

где $\mathrm{Arg}(A)$ *— множество всех значений аргумента комплексного числа A.*

Доказательство. Из определения множества разреза, предложений 2 и 11, теоремы 4 следует, что

$$g_2 = (A, B, v) \in \mathrm{Cut}_2 \ \Leftrightarrow\ g_1 = (A, B, v)\exp(-vE_3) = (Ae^{-iv/2}, Be^{iv/2}, v) \in \mathrm{Cut}_1\,.$$

Отсюда и из следствия 1 вытекает, что $g_2 \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$ тогда и только тогда, когда $g_1 \in \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}}$.

Если $g_2 \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, т. е. $\operatorname{Im}(A) = 0$, $\operatorname{Re}(A) < -1$ на основании предложения 10, то $Ae^{-iv/2} = |\operatorname{Re}(A)|e^{i(\pi - v/2)}$, $|B|^2 = \operatorname{Re}^2(A) - 1 > 0$, поэтому $g_1 \in \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}$.

Обратно, если $g_1 := (A_0, B_0, v_0) \in \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}$, т. е. $B_0 \ne 0$, $\pi - \frac{v_0}{2} \in \mathrm{Arg}(A_0)$, то

$$B = B_0 e^{-iv_0/2} \ne 0, \quad A = A_0 e^{iv_0/2} = |A_0| e^{i(\pi - v_0/2)} e^{iv_0/2} = |A_0| e^{i\pi} = -|A_0| < -1,$$

следовательно, $g_2 = (A, B, v) \in \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}$. $\square$

§ 5. Непродолжаемые кратчайшие в группе Ли $\mathbf{SU(1,1)} \times \mathbb{R}$

Вследствие предложения 4 для поиска кратчайших в $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, достаточно исследовать отрезки геодезических $\widetilde{\gamma}_i(t)$, $0 \le t \le T$, где $\widetilde{\gamma}_i(0) = \mathrm{Id}$.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha_2 \neq \pm 1$, $\beta \neq 0$ *и* $\widetilde{\gamma}_2(t) = \widetilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \le t \le T$, *— непродолжаемая кратчайшая в* $(\mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{R}, d_2)$*. Тогда*

1. *Если* $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}$, *то* $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$.

2. *Если* $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = 1$, *то* $T \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos\frac{\beta T}{2} = \frac{-2}{\sqrt{4+\beta^2 T^2}}, \quad \sin\frac{\beta T}{2} = \frac{-\beta T}{\sqrt{4+\beta^2 T^2}}.$$

3. *Если* $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < 1$, *то* $T \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{th}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{th} x}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{th}^2 x}},$$

где k *и* x *определены формулами* (30).

4. *Если* $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, *то* $T = \frac{3\pi}{|\beta|}$.

5. *Если* $\frac{3}{2\sqrt{2}} < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, *то* $\frac{3\pi}{|\beta|} < T < \frac{2\pi(|\beta|+\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1})}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{4\pi}{|\beta|}$ *и* T *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{1}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где k *и* x *определены формулами* (32).

6. *Если* $1 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{3}{2\sqrt{2}}$, *то* $\frac{2\pi}{|\beta|} < \frac{2\pi(|\beta|+\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1})}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < T < \frac{3\pi}{|\beta|}$ *и* T *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где k *и* x *определены формулами* (32).

Доказательство. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$, $\beta \neq 0$ и $\widetilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \le t \le T$, — непродолжаемая кратчайшая. В силу предложения 10 $g = (A, B, v) := \widetilde{\gamma}_2(T)$ принадлежит объединению множеств $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$ и $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$.

Если $g \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$, то $\beta^2 > 1-\alpha_2^2$, $m_2(T) = 0$ и $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$ в силу теоремы 3.

Пусть теперь $g \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$. Тогда в силу (17)

$$n_2 \sin\frac{\beta T}{2} - \beta m_2 \cos\frac{\beta T}{2} = 0, \quad n_2 \cos\frac{\beta T}{2} + \beta m_2 \sin\frac{\beta T}{2} < 0. \tag{33}$$

Если $\beta^2 = 1 - \alpha_2^2$, то с учетом (14) условия (33) можно переписать в виде $\operatorname{tg}\frac{\beta T}{2} = \frac{\beta T}{2}$, $\cos\frac{\beta T}{2} < 0$, откуда следует $\pi < \frac{\beta T}{2} < \frac{3\pi}{2}$. Тогда

$$\cos\frac{\beta T}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\beta T/2)}} = \frac{-2}{\sqrt{4+\beta^2 T^2}}, \quad \sin\frac{\beta T}{2} = \frac{-\beta T}{\sqrt{4+\beta^2 T^2}}$$

и п. 2 доказан.

Если $\beta^2 < 1 - \alpha_2^2$, то с учетом (15) условия (33) можно переписать в виде (30), причем $\cos kx < 0$. В доказательстве предложения 10 показано, что тогда $\pi < kx = \frac{|\beta| T}{2} < \frac{3\pi}{2}$, поэтому

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 kx}} = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{th}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{th} x}{\sqrt{1+k^2 \operatorname{th}^2 x}},$$

и п. 3 доказан.

Пусть $\beta^2 > 1-\alpha_2^2$. Если $n_2(T)=0$, то, как показано в доказательстве предложения 10, $T=\frac{\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$ и $\frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}=3$. Отсюда следует п. 4.

Пусть $n_2(T)\neq 0$. С учетом (16) условия (33) можно переписать в виде (32), причем $\cos kx<0$. В доказательстве теоремы 6 в [8] показано, что уравнение (32) не имеет решений при $1<k\leq 2$ и $k=3$.

Если $2<k<3$, то наименьший положительный корень уравнения (32) принадлежит интервалу $\left(\frac{3\pi}{2k},\frac{\pi}{k-1}\right)$. С учетом (32) это означает, что

$$\frac{3}{2\sqrt{2}}<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \frac{3\pi}{|\beta|}<T<\frac{2\pi\left(|\beta|+\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}\right)}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{4\pi}{|\beta|}.$$

Тогда $\cos x<0$, $\operatorname{tg} x<0$, $\cos kx>0$ и на основании (33)

$$\cos kx=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 kx}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2 x}},\quad \sin kx=\frac{k\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2 x}}.$$

П. 5 доказан.

Если $k>3$, то наименьший положительный корень уравнения (32) принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{k-1},\frac{3\pi}{2k}\right)$. С учетом (32) это означает, что

$$1<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{3}{2\sqrt{2}},\quad \frac{2\pi}{|\,\beta\,|}<\frac{2\pi\left(|\beta|+\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}\right)}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<T<\frac{3\pi}{|\beta|}.$$

Тогда $\cos x>0$, $\cos kx<0$ и на основании (33)

$$\cos kx=\frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 kx}}=\frac{-1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2 x}},\quad \sin kx=\frac{-k\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2 x}}.$$

П. 6 доказан. □

Из предложения 11 вытекает, что если $\widetilde{\gamma}_1(\varphi_0,\alpha,\beta,t)$, $0\leq t\leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},d_1)$, то T удовлетворяет пп. 1–6 теоремы 5 после замены β на $\beta+\alpha_2$.

Следующее предложение непосредственно следует из предложений 2, 11.

Предложение 13. *Для любого* $(A,B,v)\in\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}$

$$d_1(\mathrm{Id},(A,B,v))=d_2(\mathrm{Id},(Ae^{iv/2},Be^{-iv/2},v)).$$

Доказательство следующей теоремы повторяет доказательство теоремы 7 в [8].

Теорема 6. *Пусть* $\beta\neq 0$ *и* $\widetilde{\gamma}_2(t)=\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, $0\leq t\leq T$, *— непродолжаемая кратчайшая в* $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},d_2)$. *Тогда*

1. *Функция* $T=T(|\beta|)$ *строго убывает на* $\left(0,\frac{3\sqrt{1-\alpha_2^2}}{2\sqrt{2}}\right]$, $\left[\frac{2\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ *и строго возрастает на отрезке* $\left[\frac{3\sqrt{1-\alpha_2^2}}{2\sqrt{2}},\frac{2\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{3}}\right]$.

2. *Функция* $T=T(|\beta|)$ *непрерывна, кусочно вещественно аналитична и* $T(0,+\infty)=(0,+\infty)$.

3. *Функция* $T=T(|\beta|)$ *имеет локальный минимум* $\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}$ *при* $\frac{3\sqrt{1-\alpha_2^2}}{2\sqrt{2}}$ *и локальный максимум* $\frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}$ *при* $\frac{2\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{3}}$.

В работе [13] доказана следующая

Теорема 7. *Пусть $\mathbb{H}\times\mathbb{R}$ — связная $(n+1)$-мерная группа Ли (с единицей $\mathrm{Id}=(e,1)$ и алгеброй Ли $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}_1$) с левоинвариантной субримановой метрикой d, порожденной вполне неголономным распределением D с*

$$D(\mathrm{Id})=\mathrm{span}(e_1,\dots,e_{n-1},e_{n+1})\subset\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}_1,\quad e_1,\dots,e_{n-1}\in\mathfrak{g},\ e_{n+1}=1\in\mathfrak{g}_1,$$

и заданным на $D(\mathrm{Id})$ скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с ортонормированным базисом $e_1,\dots,e_{n-1},\ e_{n+1}$. Тогда $d^2(\mathrm{Id},(g,e^v))=v^2+d^2(\mathrm{Id},(g,1))$ для любого $(g,e^v)\in\mathbb{H}\times\mathbb{R}$.

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы 7 и (9).

Предложение 14. *Для любого $(A,B,v)\in SU(1,1)\times\mathbb{R}$ выполнено*

$$d_2^2(\mathrm{Id},(A,B,v))=v^2+d_2^2(\mathrm{Id},(A,B,0)).$$

Из замечания 1 следует, что $d_2(\mathrm{Id},(A,B,v))=d_2(\mathrm{Id},\widetilde{\Omega}(A,B,v))$, где левоинвариантная внутренняя метрика d_2 в правой части равенства определена на $SL(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ теоремой 3. В [9] найдены точные формулы для $d_2(\mathrm{Id},\widetilde{\Omega}(A,B,0))$. Используя их и предложения 13, 14, можно легко получить точные формулы для $d_i(\mathrm{Id},(A,B,v))$, $i=1,2$.

§ 6. Субримановы геодезические на $\mathbf{SO_0(2,1)}\times\mathbb{R}$

Псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}^{2,1}$ есть векторное пространство $\mathbb{R}^3$ с псевдоскалярным произведением $\{x,y\}:=-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, где $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$. Группа Лоренца $\mathrm{SO}_0(2,1)$ — компонента связности единицы группы $P(2,1)$ всех линейных сохраняющих псевдоскалярное произведение $\{\cdot,\cdot\}$ преобразований пространства $\mathbb{E}^{2,1}$. Она состоит из тех элементов группы $\mathrm{P}(2,1)$, которые одновременно сохраняют и направление времени (первой координаты), и ориентацию пространства $\mathbb{E}^{2,1}$. Таким образом,

$$\mathrm{SO}_0(2,1)=\{g\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})\mid g^TJg=J,\ J=\mathrm{diag}(-1,1,1),\ \det(g)=1,\ g_{11}>0\}.$$

Ее алгебра Ли есть $\mathfrak{so}(2,1)=\{A\in\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})\mid A^TJ+JA=0,\ J=\mathrm{diag}(-1,1,1)\}$.

Будем работать с тривиальным абелевым расширением группы $\mathrm{SO}_0(2,1)$:

$$\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}=\left\{(C,v):=\begin{pmatrix} C & & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & e^v\end{pmatrix}\mid C\in\mathrm{SO}_0(2,1),\ v\in\mathbb{R}\right\}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$ группы Ли $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$ имеет базис E_1,E_2,E_3,E_4, удовлетворяющий (1):

$$E_1=e_{13}+e_{31},\quad E_2=e_{12}+e_{21},\quad E_3=e_{23}-e_{32},\quad E_4=e_{44},\tag{34}$$

где через e_{ij}, $i,j=1,\dots,4$, здесь обозначена матрица четвертого порядка, у которой в i-й строке и в j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю.

Для удобства обозначим через ρ_i, $i=1,2$, левоинвариантную субриманову метрику на $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$ (с единицей Id), задаваемую вполне неголономным левоинвариантным распределением Δ_i с $\Delta_i(\mathrm{Id})=\mathrm{span}(e_1,e_2,e_3)$, где векторы e_1,e_2,e_3 заданы формулами (2) при $i=1$ и (9) при $i=2$; на $\Delta_i(\mathrm{Id})$ определено скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$, относительно которого векторы e_1,e_2,e_3 образуют ортонормированный базис.

Теорема 8. *Пусть*

$$\mu_2 = t, \quad \nu_2 = t^2/2, \quad \text{если } \beta^2 = 1 - \alpha_2^2;$$

$$\mu_2 = \frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}\bigr)}{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}, \quad \nu_2 = \frac{\operatorname{ch}\bigl(t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}\bigr)-1}{1-\alpha_2^2-\beta^2}, \quad \text{если } \beta^2 < 1-\alpha_2^2;$$

$$\mu_2 = \frac{\sin\bigl(t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}\bigr)}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}, \quad \nu_2 = \frac{1-\cos\bigl(t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}\bigr)}{\beta^2+\alpha_2^2-1}, \quad \text{если } \beta^2 > 1-\alpha_2^2.$$

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая $\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t)$, $t\in\mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$, задаваемая формулой (10), равна $(C,v)(t)$, где $v(t)=\alpha_2 t$ и столбцы $C_j(t)$, $j=1,2,3$, матрицы $C(t)\in\mathrm{SO}_0(2,1)$ имеют вид

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 1+\nu_2(1-\alpha_2^2) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\cos\varphi_0 - \beta\nu_2\sin\varphi_0) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\sin\varphi_0 + \beta\nu_2\cos\varphi_0) \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\cos(\beta t+\varphi_0) + \beta\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-\beta^2\nu_2)\cos\beta t + \beta\mu_2\sin\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ -(1-\beta^2\nu_2)\sin\beta t + \beta\mu_2\cos\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$C_3(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\sin(\beta t+\varphi_0) - \beta\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-\beta^2\nu_2)\sin\beta t - \beta\mu_2\cos\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ (1-\beta^2\nu_2)\cos\beta t + \beta\mu_2\sin\beta t + (1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1-\alpha_2^2}\sin\varphi_0, \quad \alpha_3 = \sqrt{1-\alpha_2^2}\cos\varphi_0. \tag{35}$$

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$, определяемая формулой (10), равна $\gamma_2(t) = (E,v)(t)$, $t\in\mathbb{R}$, где E — единичная квадратная матрица третьего порядка, $v(t)=\alpha_2 t$.

Доказательство. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$. Используя (4), (9), (34), нетрудно получить, что

$$\exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) = \begin{pmatrix} 1+(1-\alpha_2^2)\nu_2 & \alpha_3\mu_2+\alpha_1\beta\nu_2 & \alpha_1\mu_2-\alpha_3\beta\nu_2 & 0 \\ \alpha_3\mu_2-\alpha_1\beta\nu_2 & 1+(\alpha_3^2-\beta^2)\nu_2 & \alpha_1\alpha_3\nu_2-\beta\mu_2 & 0 \\ \alpha_1\mu_2+\alpha_3\beta\nu_2 & \alpha_1\alpha_3\nu_2+\beta\mu_2 & 1+(\alpha_1^2-\beta^2)\nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 t \end{pmatrix},$$

$$\exp(-t\beta e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta t & \sin\beta t & 0 \\ 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основании (10) осталось перемножить эти матрицы.

Утверждение теоремы 8 для $\alpha_2 = \pm 1$ следует из предложения 3, (9), (34). $\square$

Следующая теорема сразу вытекает из теоремы 8, предложений 2 и 3.

Теорема 9. *Пусть*

$$\mu_1 = t, \quad \nu_1 = t^2/2, \quad \textit{если } (\beta+\alpha_2)^2 = 1-\alpha_2^2;$$

$$\mu_1 = \frac{\operatorname{sh}\bigl(t\sqrt{1-\alpha_2^2-(\beta+\alpha_2)^2}\bigr)}{\sqrt{1-\alpha_2^2-(\beta+\alpha_2)^2}}, \quad \nu_1 = \frac{\operatorname{ch}\bigl(t\sqrt{1-\alpha_2^2-(\beta+\alpha_2)^2}\bigr)-1}{1-\alpha_2^2-(\beta+\alpha_2)^2},$$

если $(\beta+\alpha_2)^2 < 1-\alpha_2^2$;

$$\mu_1 = \frac{\sin\bigl(t\sqrt{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1}\bigr)}{\sqrt{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1}}, \ \nu_1 = \frac{1-\cos\bigl(t\sqrt{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1}\bigr)}{(\beta+\alpha_2)^2+\alpha_2^2-1},$$

если $(\beta+\alpha_2)^2 > 1-\alpha_2^2$.

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ *геодезическая* $\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t)$, $t\in\mathbb{R}$, *субриманова пространства* $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_1)$, *задаваемая формулой* (3), *равна* $(C,v)(t)$, $t\in\mathbb{R}$, *где* $v(t)=\alpha_2 t$ *и столбцы* $C_j(t)$, $j=1,2,3$, *матрицы* $C(t)\in\mathrm{SO}_0(2,1)$ *имеют вид*

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 1+\nu_2(1-\alpha_2^2) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\cos\varphi_0 - \beta\nu_2\sin\varphi_0) \\ \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\sin\varphi_0 + \beta\nu_2\cos\varphi_0) \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\cos(\beta t+\varphi_0)+(\beta+\alpha_2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\cos\beta t+(\beta+\alpha_2)\mu_2\sin\beta t+(1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ -(1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\sin\beta t+(\beta+\alpha_2)\mu_2\cos\beta t+(1-\alpha_2^2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$C_3(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\alpha_2^2}(\mu_2\sin(\beta t+\varphi_0)-(\beta+\alpha_2)\nu_2\cos(\beta t+\varphi_0)) \\ (1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\sin\beta t-(\beta+\alpha_2)\mu_2\cos\beta t+(1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\cos\varphi_0 \\ (1-(\beta+\alpha_2)^2\nu_2)\cos\beta t+(\beta+\alpha_2)\mu_2\sin\beta t+(1-\alpha_2^2)\nu_2\sin(\beta t+\varphi_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix},$$

причем выполнено (35).

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ *геодезическая субриманова пространства* $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_1)$, *определяемая формулой* (3), *равна* $\gamma_1(t)=(C,v)(t)$, $t\in\mathbb{R}$, *где* $v(t)=\alpha_2 t$,

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 t & -\sin\alpha_2 t \\ 0 & \sin\alpha_2 t & \cos\alpha_2 t \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическую $\gamma_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t)$ будем также обозначать через $\gamma_i(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, если выполнено (35).

§ 7. Множество разреза и первая каустика в $\mathbf{SO_0(2,1)}\times\mathbb{R}$

Группа Ли $\mathrm{SU}(1,1)$ есть односвязная накрывающая группы $\mathrm{SO}_0(2,1)$; двулистное накрытие $\Pi:\mathrm{SU}(1,1)\to\mathrm{SO}_0(2,1)$ можно задать следующим образом:

$$\Pi(A,B) = \begin{pmatrix} A_1^2+A_2^2+B_1^2+B_2^2 & 2(A_1B_2-A_2B_1) & 2(A_1B_1+A_2B_2) \\ 2(A_1B_2+A_2B_1) & A_1^2-A_2^2-B_1^2+B_2^2 & 2(A_1A_2+B_1B_2) \\ 2(A_1B_1-A_2B_2) & 2(B_1B_2-A_1A_2) & A_1^2-A_2^2+B_1^2-B_2^2 \end{pmatrix},$$

где A_1,A_2,B_1,B_2 определены формулами (22). Тогда отображение

$$\widetilde{\Pi}:\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}\to\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}, \quad \widetilde{\Pi}(A,B,v) = (\Pi(A,B),v),$$

есть двулистное накрытие группы Ли $\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}$ группой Ли $\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}$.

Нетрудно проверить, что дифференциал $d\widetilde{\Pi}(\mathrm{Id})$ есть изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{su}(1,1)\oplus\mathbb{R}$ и $\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$, переводящий базис E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры Ли $\mathfrak{su}(1,1)\oplus\mathbb{R}$, заданный формулами (13), в одноименный базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1)\oplus\mathbb{R}$, заданный формулами (34). Поэтому на основании теорем 1, 2 отображение $\widetilde{\Pi}:(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R}, d_i)\to(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_i)$, $i=1,2$, является локальной изометрией и для любых $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{S}^2$, $\beta, t\in\mathbb{R}$ выполнено

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t))=\gamma_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta;t),\quad i=1,2. \tag{37}$$

Отсюда, из (36) и из следствия 1 вытекает

Следствие 2. 1. *n-е сопряженное время t^n_{conj} вдоль геодезической $\gamma_i(t)=\gamma_i(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, где $w_i>0$ (w_i определены формулами (21)), субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_i)$, $i=1,2$, имеет вид*

$$t^{2m-1}_{\mathrm{conj}}=\frac{2\pi m}{w_i},\quad t^{2m}_{\mathrm{conj}}=\frac{2x_m}{w_i},\quad m\in\mathbb{N},$$

где $\{x_1,x_2,\dots\}$ — упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $\operatorname{tg}x=x$.

2. *Первая каустика Conj^1_i субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_i)$, $i=1,2$, имеет вид*

$$\mathrm{Conj}^1_j=\left\{(C,v)\in\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}\mid C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix},\ \psi,\,v\in\mathbb{R}\right\}.$$

Доказательство следующего предложения аналогично доказательству предложения 9 в [13].

Предложение 15. *Пусть $\gamma_i(t)$, $0\le t\le T$, — кратчайшая в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_i)$, $i=1,2$, причем $\gamma_i(0)=\mathrm{Id}$. Существует единственная кратчайшая $\widetilde{\gamma}_i(t)$, $0\le t\le T$, в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},d_i)$, такая, что $\widetilde{\gamma}_i(0)=\mathrm{Id}$ и $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_i(t))=\gamma_i(t)$ для каждого $t\in[0,T]$.*

Следующее предложение — непосредственное следствие (37) и предложений 6, 7.

Предложение 16. 1. *При $\alpha_2=\pm1$ геодезическая $\gamma_i(t)=\exp(t\alpha_2e_2)$, $t\in\mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_i)$, $i=1,2$, — метрическая прямая.*

2. *Геодезическая $\gamma_1(t)=\gamma_1(\varphi_0,\alpha_2,-\alpha_2;t)$, $t\in\mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_1)$ — метрическая прямая.*

3. *Геодезическая $\gamma_2(t)=\gamma_2(\varphi_0,\alpha_2,0;t)$, $t\in\mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$ — метрическая прямая.*

Предложение 17. *Множество разреза Cut_2 в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$, соответствующее Id, есть $\mathrm{Cut}_2=\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}\cup\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, где*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}&=\{\widetilde{\Pi}(A,0,v)\mid (A,0,v)\in\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},\ A\ne\pm1,\ B=0,\ v\in\mathbb{R}\}\\&=\left\{(C,v)\in\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}\mid C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix},\ \psi\in(0,2\pi),\ v\in\mathbb{R}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}&=\{\widetilde{\Pi}(A,B,v)\mid (A,B,v)\in\mathrm{SU}(1,1),\ \mathrm{Re}(A)=0,\ B\ne0,\ v\in\mathbb{R}\}\\&=\{(C,v)\in\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R}\mid c_{21}=-c_{12},\ c_{31}=-c_{13},\ c_{23}=c_{32},\ c_{22}+c_{33}<-2,\ v\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Покажем, что $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{Cut}_2$. Пусть $g \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$ и $\gamma_2(t)$, $0 \le t \le T$, — кратчайшая в $(SO_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$, соединяющая Id и g. В силу предложения 15 существует единственная кратчайшая $\widetilde{\gamma}_2(t)$, $0\le t\le T$, в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},d_2)$ такая, что $\widetilde{\gamma}_2(0)=\mathrm{Id}$ и $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2(t))=\gamma_2(t)$, $t\in[0,T]$. Из следствия 2 и доказательства предложения 10 вытекает, что $\widetilde{g}:=\widetilde{\gamma}_2(T)$ принадлежит множеству разреза субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},d_2)$, соответствующему Id, и существует отличная от $\widetilde{\gamma}_2(t)$ кратчайшая $\widetilde{\gamma}_2^*(t)$, $0\le t\le T$, соединяющая Id и $\widetilde{g}$, $\widetilde{\Pi}(\widetilde{g})=g$. Тогда отрезок геодезической $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2^*(t))\neq\gamma_2(t)$, $0\le t\le T$, в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$ является кратчайшей, соединяющей Id и g, и $g\in\mathrm{Cut}_2$ в силу предложения 8.

Покажем, что $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}\subset\mathrm{Cut}_2$. Пусть $g\in\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$ и $\gamma_2(t)$, $0\le t\le T$, — кратчайшая в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$, соединяющая Id и g. В силу предложения 15 существует единственная кратчайшая $\widetilde{\gamma}_2(t)=\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, $0\le t\le T$, в $(\mathrm{SU}(1,1)\times\mathbb{R},d_2)$ такая, что $\widetilde{\gamma}_2(0)=\mathrm{Id}$ и $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2(t))=\gamma_2(t)$ для каждого $t\in[0,T]$. Обозначим $\widetilde{\gamma}_2(T)=(A,B,v)$. Так как $\mathrm{Re}(A)=0$, то $\beta\neq0$. Из (17), (18) вытекает, что тогда

$$\widetilde{\gamma}_2(\pi+\varphi_0+\beta T,\alpha_2,-\beta;T)=(\bar{A},-B,v)=(-A,-B,v).$$

Отсюда и из (36), (37) следует, что $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2(\pi+\varphi_0+\beta T,\alpha_2,-\beta;T))=\gamma_2(T)=g$, т. е. точки Id и g в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$ соединяются двумя разными параметризованными длиной дуги кратчайшими. По предложению 8 $g\in\mathrm{Cut}_2$.

Из теоремы 3 и предложений 8, 16 следует, что $(E,v)\notin\mathrm{Cut}_2$, где $v\in\mathbb{R}$, E — единичная матрица третьего порядка. Предположим, что для некоторого $g\notin\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}\cup\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$ существуют две различные кратчайшие $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t))$, $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2^*(\varphi_0^*,\alpha_2^*,\beta^*;t))$, $0\le t\le T$, в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$, соединяющие Id и g. Пусть $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;T):=(A,B,v)$, $\widetilde{\gamma}_2^*(\varphi_0^*,\alpha_2^*,\beta^*;T):=(A^*,B^*,v^*)$. На основании (36) $(A,B,v)=(A^*,B^*,v^*)$ или $(A,B,v)=(-A^*,-B^*,v^*)$. В первом случае $g\in\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$, что невозможно. Во втором случае без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{Re}(A)<0$. Поскольку $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, $0\le t\le T$, соединяет Id и (A,B,v), причем $\mathrm{Re}(A)<0$, то найдется $t_1\in(0,T)$ такое, что $\mathrm{Re}(A_1)=0$, где $\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t_1)=(A_1,B_1,v_1)$. Тогда $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t_1))\in\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$. Это противоречит тому, что $\widetilde{\Pi}(\widetilde{\gamma}_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t))$, $0\le t\le T$, — кратчайшая. □

Доказательство следующего предложения аналогично доказательству предложения 11.

Предложение 18. *Пусть* $\gamma_1(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, $0\le t\le T$, *— непродолжаемая кратчайшая в* $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_1)$. *Тогда* $\gamma_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta+\alpha_2;t)$, $0\le t\le T$, *— непродолжаемая кратчайшая в* $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$. *Верно и обратное.*

Предложение 19. *Множество разреза* Cut_1 *в* $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_1)$, *соответствующее* Id, *есть* $\mathrm{Cut}_1=\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}}\cup\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}$, *где*

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}}=\left\{(C,v)\mid C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix},\ v\in\mathbb{R},\ \psi\neq v+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\};$$

$$\mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}=\left\{(C^*,v)\mid\ C^*=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\cos v+c_{13}\sin v&c_{13}\cos v-c_{12}\sin v\\c_{21}&c_{22}\cos v+c_{23}\sin v&c_{23}\cos v-c_{22}\sin v\\c_{31}&c_{32}\cos v+c_{33}\sin v&c_{33}\cos v-c_{32}\sin v\end{pmatrix},\right.$$

$$\left. C=(c_{ij})\in SO_0(2,1),\ c_{21}=-c_{12},\ c_{31}=-c_{13},\ c_{23}=c_{32},\ c_{22}+c_{33}<-2,\ v\in\mathbb{R}\right\}.$$

Доказательство. Из определения множества разреза, предложений 2, 18 и теоремы 4 следует, что $g_2=(C,v)\in \mathrm{Cut}_2$ тогда и только тогда, когда

$$g_1=(C,v)\exp(-vE_3)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cos v+c_{13}\sin v & c_{13}\cos v-c_{12}\sin v\\ c_{21} & c_{22}\cos v+c_{23}\sin v & c_{23}\cos v-c_{22}\sin v\\ c_{31} & c_{32}\cos v+c_{33}\sin v & c_{33}\cos v-c_{32}\sin v\end{pmatrix}\in \mathrm{Cut}_1\,.$$

Отсюда и из предложения 17 вытекает, что $g_2\in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$ ($g_2\in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$) тогда и только тогда, когда $g_1\in \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{loc}}$ (соответственно $g_1\in \mathrm{Cut}_1^{\mathrm{glob}}$). $\square$

§ 8. Непродолжаемые кратчайшие в группе Ли $\mathbf{SO_0(2,1)}\times\mathbb{R}$

В силу предложения 4 для поиска кратчайших в $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_i)$, $i=1,2$, достаточно исследовать отрезки геодезических $\gamma_i(t)$, $0\le t\le T$, где $\gamma_i(0)=\mathrm{Id}$.

Теорема 10. *Пусть* $\alpha_2\neq\pm1$, $\beta\neq0$ *и* $\gamma_2(t)=\gamma_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, $0\le t\le T$, — *непродолжаемая кратчайшая в* $(\mathrm{SO}_0(2,1)\times\mathbb{R},\rho_2)$.

1. *Если* $0<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<1$, *то* $T\in\left(\frac{\pi}{|\beta|},\frac{2\pi}{|\beta|}\right)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos\frac{|\beta|T}{2}=-\frac{|\beta|\,\mathrm{sh}\big(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2\big)}{\sqrt{\big(1-\alpha_2^2\big)\,\mathrm{ch}^2\big(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2\big)-\beta^2}},$$

$$\sin\frac{|\beta|T}{2}=\frac{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}\,\mathrm{ch}\big(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2\big)}{\sqrt{\big(1-\alpha_2^2\big)\,\mathrm{ch}^2\big(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2\big)-\beta^2}}.$$

2. *Если* $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}=1$, *то* $T\in\left(\frac{\pi}{|\beta|},\frac{2\pi}{|\beta|}\right)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos\frac{\beta T}{2}=-\frac{\beta T/2}{\sqrt{1+\beta^2T^2/4}},\quad \sin\frac{\beta T}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2T^2/4}}.$$

3. *Если* $1<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{2}{\sqrt3}$, *то* $T\in\left(\frac{\pi}{|\beta|},\frac{2\pi}{|\beta|}\right)$ *удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos\frac{|\beta|T}{2}=-\frac{|\beta|\sin\big(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2\big)}{\sqrt{\beta^2-\big(1-\alpha_2^2\big)\cos^2\big(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2\big)}},\tag{38}$$

$$\sin\frac{|\beta|T}{2}=\frac{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}\cos\big(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2\big)}{\sqrt{\beta^2-\big(1-\alpha_2^2\big)\cos^2\big(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2\big)}}.\tag{39}$$

4. *Если* $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}=\frac{2}{\sqrt3}$, *то* $T=\frac{2\pi}{|\beta|}$.

5. *Если* $\frac{2}{\sqrt3}<\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}<\frac{3}{\sqrt5}$, *то* $T\in\left(\frac{2\pi}{|\beta|},\frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ *удовлетворяет системе уравнений* (38), (39).

6. *Если* $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}\ge\frac{3}{\sqrt5}$, *то* $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$.

Доказательство. Пусть $\alpha_2\neq\pm1$, $\beta\neq0$ и $\gamma_2(t)=\gamma_2(\varphi_0,\alpha_2,\beta;t)$, $0\le t\le T$, — непродолжаемая кратчайшая. В силу предложения 17 $g=\gamma_2(T)$

принадлежит объединению множеств $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$ и $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$. Из теоремы 3 следует, что

1) если $g \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$, то $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > 1$ и $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$ вследствие (14)–(16);

2) если $g \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, то выполнено

$$n_2(T)\cos\frac{\beta T}{2} + \beta m_2(T)\sin\frac{\beta T}{2} = 0. \tag{40}$$

Пусть T_0 — наименьший положительный корень уравнения (40). Если $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \leq 1$, то $T = T_0$. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > 1$, то $T = \min\bigl\{T_0, \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}\bigr\}$.

Пусть $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < 1$. Определим на отрезке $\bigl[0, \frac{2\pi}{|\beta|}\bigr]$ функцию

$$F_1(t) = \operatorname{ch}\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}\cos\frac{|\beta|t}{2} + \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}\operatorname{sh}\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}\sin\frac{|\beta|t}{2},$$

которая в силу (15) есть левая часть уравнения (40). Нетрудно видеть, что

$$F_1(0) = 1, \quad F_1\left(\frac{2\pi}{|\beta|}\right) < 0, \quad F_2'(t) = \frac{(1-\alpha_2^2)\cos\frac{|\beta|t}{2}\operatorname{sh}\frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}}{2\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}.$$

Функция $F_1(t)$ возрастает на отрезке $\bigl[0, \frac{\pi}{|\beta|}\bigr]$, убывает на отрезке $\bigl[\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}\bigr]$ и имеет единственный нуль $T_0 \in \bigl(\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}\bigr)$. Отсюда следует п. 1.

Пусть $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = 1$. В силу (14) уравнение (40) запишется в виде

$$\cos\frac{|\beta|T}{2} + \frac{|\beta|T}{2}\sin\frac{|\beta|T}{2} = 0.$$

Легко видеть, что наименьший положительный корень этого уравнения принадлежит интервалу $\bigl(\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}\bigr)$. Отсюда следует п. 2.

Пусть $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > 1$. Определим на отрезке $\bigl[0, \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}\bigr]$ функцию

$$F_2(t) = \cos\frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}\cos\frac{|\beta|t}{2} + \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}\sin\frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}\sin\frac{|\beta|t}{2}, \tag{41}$$

которая в силу (16) есть левая часть в (40). Нетрудно видеть, что $F_2(0) = 1$,

$$F_2\left(\frac{2\pi}{|\beta|}\right) = -\cos\frac{\pi\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}{|\beta|}, \quad F_2'(t) = \frac{(1-\alpha_2^2)\cos\frac{|\beta|t}{2}\sin\frac{t\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}{2}}{2\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}.$$

Ясно, что $F_2(t)$ возрастает на отрезках $\bigl[0, \frac{\pi}{|\beta|}\bigr]$, $\bigl[\frac{2\pi}{|\beta|}, \min\bigl\{\frac{3\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}\bigr\}\bigr]$ и убывает на отрезке $\bigl[\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}\bigr]$.

Если $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $F_2\bigl(\frac{2\pi}{|\beta|}\bigr) < 0$. Следовательно, наименьший положительный корень T_0 уравнения (40) принадлежит интервалу $\bigl(\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}\bigr)$ и $T = T_0$. Отсюда и из (41) следует п. 3.

Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $F_2\bigl(\frac{2\pi}{|\beta|}\bigr) = 0$. Отсюда следует п. 4.

Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $F_2\big(\frac{2\pi}{|\beta|}\big) > 0$ и функция $F_2(t)$ положительна на отрезке $\big[0, \frac{2\pi}{|\beta|}\big]$. Если при этом $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}} \leq \frac{3\pi}{|\beta|}$, т. е. $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}}$, то $F_2(t) > 0$ на отрезке $\big[0, \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}\big]$. Поэтому $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}$, и п. 6 доказан.

Если же $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}} > \frac{3\pi}{|\beta|}$, т. е. $\frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{3}{\sqrt{5}}$, то

$$F_2\left(\frac{3\pi}{|\beta|}\right) = -\cos\frac{\pi|\beta|}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}} < 0, \quad T_0 \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right).$$

Отсюда и из (41) следует п. 5. $\square$

Из предложения 18 вытекает, что если $\gamma_1(\varphi_0, \alpha, \beta, t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$, то T удовлетворяет пп. 1–6 теоремы 7 после замены β на $\beta + \alpha_2$.

Следующее предложение непосредственно следует из предложений 2, 18.

Предложение 20. *Для любого* $(C, v) \in \mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}$

$$\rho_1(\mathrm{Id}, (C, v)) = \rho_2(\mathrm{Id}, (\widetilde{C}, v)),$$

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cos v - c_{13}\sin v & c_{13}\cos v + c_{12}\sin v \\ c_{21} & c_{22}\cos v - c_{23}\sin v & c_{23}\cos v + c_{22}\sin v \\ c_{31} & c_{32}\cos v - c_{33}\sin v & c_{33}\cos v + c_{32}\sin v \end{pmatrix}.$$

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы 7 и (9).

Предложение 21. *Для любого* $(C, v) \in \mathrm{SO}_0(2,1) \times \mathbb{R}$

$$\rho_2^2(\mathrm{Id}, (C, v)) = v^2 + \rho_2^2(\mathrm{Id}, (C, 0)).$$

В [7] найдены точные формулы для $\rho_2(\mathrm{Id}, (C, 0))$. Используя их и предложения 20, 21, можно легко получить точные формулы для $\rho_i(\mathrm{Id}, (C, v))$, $i = 1, 2$.

Благодарность. Автор благодарит В. Н. Берестовского за полезные дискуссии и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. 1963. № 1. С. 114–123.
2. *Biggs R., Remsing C.* On the classification of real four-dimensional Lie groups // J. Lie Theory. 2016. V. 26. P. 1001–1035.
3. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 748–767.
4. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* ПМП, (ко)присоединенное представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли // Чебышев. сб. 2020. Т. 21, № 2. С. 43–64.
5. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Carathéodory metrics on $\mathbb{S}^3$, $SO(3)$, $SL(2)$, and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47, N 4. P. 1851–1878.
6. *Берестовский В. Н.* (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе $SO_0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 1. С. 3–22.
7. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Субриманово расстояние в группе Ли $SO_0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 4. С. 62–79.
8. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SL(2)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 527–542.
9. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Субриманово расстояние в группе Ли $SL(2)$ // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 22–35.

10. *Сачков Ю. Л.* Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификация и задачи, интегрируемые в элементарных функциях // Успехи. мат. наук. 2022. Т. 77, № 1. С. 109–176.

11. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Субриманово расстояние в группах Ли $SU(2)$ и $SO(3)$ // Мат. тр. 2015. Т. 18, № 2. С. 1–19.

12. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М.: Факториал Пресс, 2005.

13. *Зубарева И. А.* Геодезические и кратчайшие некоторых субримановых метрик на группах Ли $SU(2)\times\mathbb{R}$ и $SO(3)\times\mathbb{R}$ с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 521–539.

Поступила в редакцию 11 мая 2023 г.
После доработки 3 декабря 2023 г.
Принята к публикации 28 января 2024 г.

Зубарева Ирина Александровна (ORCID 0000-0001-6937-9985)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`i_gribanova@mail.ru`