Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 513.88

О K–ФУНКЦИОНАЛАХ АБСОЛЮТНО КАЛЬДЕРОНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БАНАХОВОЙ ПАРЫ (l_1, c_0)

В. И. Дмитриев, Е. В. Журавлева, О. Ю. Михайлова, И. Н. Бурилич

Аннотация. Исследуется задача характеризации абсолютно кальдероновых элементов канонической пары (l_1, c_0) пространств последовательностей в терминах K-функционала Петре. Соответствующий результат был известен первому автору достаточно давно. Впервые приведено доказательство этого результата. Сформулированы нерешенные задачи.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.204

Ключевые слова: банахова пара, интерполяционная орбита, K-функционал Петре.

1. Введение. Необходимые сведения

Рассматриваются банаховы пространства над полем действительных чисел и используются только линейные операторы.

Пусть $\overline{A} = (A_0, A_1)$ — пара банаховых пространств [1–3]. Для любого элемента $a \in A_0 + A_1$ определяется его K-функционал (функционал Петре): $K(t, a; \overline{A}) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a_0 + a_1 = a\}$, где $t > 0$. При фиксированном $a \neq 0$ функция $K(t) = K(t, a; \overline{A})$ является положительной вогнутой функцией на $(0, \infty)$. Функция $K(t)$ характеризует в некотором смысле местоположение элемента a в паре $\overline{A}$. Функция $K(t)$ имеет обратную $K^{-1} : (K(0+), K(\infty)) \to (0, \infty)$.

Если $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — две банаховы пары, то для каждого $a \in A_0 + A_1$ определяется его K-*орбита в паре* $\overline{B}$:

$$\text{K-orb}(a; \overline{A} \to \overline{B}) = \left\{ b \in B_0 + B_1 : \sup_{t>0} \frac{K(t, b; \overline{B})}{K(t, a; \overline{A})} < \infty \right\}.$$

Просто *орбитой* $\mathrm{Orb}(a; \overline{A} \to \overline{B})$ называется множество $\{Ta\}$, где T пробегает совокупность всех линейных ограниченных из пары $\overline{A}$ в пару $\overline{B}$ операторов (имеется в виду ограниченное действие $T : A_0 \to B_0$ и $T : A_1 \to B_1$). Всегда $\mathrm{Orb}(a; \overline{A} \to \overline{B}) \subset \text{K-orb}(a; \overline{A} \to \overline{B})$.

Многие классические результаты в теории интерполяции операторов, относящиеся к конкретным парам $\overline{A}$ и $\overline{B}$, имеют вид $\mathrm{Orb}\, a = \text{K-orb}\, a$ для всех $a \in A_0 + A_1$. Однако для многих банаховых пар аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места, что означает, что найдутся элементы $a \in A_0 + A_1$, для которых вложение $\mathrm{Orb}\, a \subset \text{K-orb}\, a$ оказывается строгим по крайней мере в некоторых банаховых парах $\overline{B}$. В такой ситуации представляют некоторый интерес те элементы a заданной пары $\overline{A}$, с которыми подобного случиться не может. В общем случае эта задача, по-видимому, весьма трудна [4]. (Нильссон, персональное сообщение 2021 г., писал о попытках исследований в этом направлении).

Элемент $a \in A_0 + A_1$ назовем *абсолютно кальдероновым* (АКЭ), если $\mathrm{Orb}(a; \overline{A} \to \overline{X}) = \text{K-orb}(a; \overline{A} \to \overline{X})$ для любой банаховой пары $\overline{X}$ (с несущественным ограничением: $\overline{X}$ должна обладать свойством так называемой относительной полноты [1, 3]).

Сформулируем основную задачу: охарактеризовать абсолютно кальдероновы элементы заданной банаховой пары $\overline{A}$. В настоящей работе мы исследуем эту задачу для канонической пары пространств последовательностей: $\overline{A} = (l_1, c_0)$. Имеются различные характеризации абсолютно кальдероновых элементов этой пары, но все они являются довольно непрямыми (к примеру, абсолютно кальдероновы элементы — это неподвижные точки линейных операторов, ядерных из c_0 в c_0 и ограниченных из l_1 в l_1). Об описаниях такого рода см. [5]. Мы приводим максимально простое описание абсолютно кальдероновых элементов в терминах K-функционала — теоремы 3, 4.

Пересечение $A_0 \cap A_1$ целиком состоит из АКЭ. Особый интерес представляют АКЭ, лежащие вне $A_0 \cap A_1$. Ниже в задаче описания АКЭ мы ограничиваемся довольно частным случаем банаховых пространств последовательностей.

Если F — банахово идеальное пространство (БИП) последовательностей $f = (f_n)_{n=1}^{\infty}$, а $w = (w_n)$ — положительная последовательность — вес, то весовое пространство $F(w)$ образовано такими последовательностями $g = (g_n)$, для которых $w \cdot g = (w_n g_n) \in F$, и снабжено нормой $\|g\|_{F(w)} = \|wg\|_F$.

Через F' обозначается дуальное к F пространство,

$$\|h\|_{F'} = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} h_n f_n : \|f\|_F \le 1\right\}.$$

В доказательстве теоремы 2 используется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_n f_n| \le \|h\|_{F'} \|f\|_F.$$

БИП F последовательностей назовем *правильным*, если множество финитных последовательностей плотно в F. В соответствии с этим пару $\overline{F} = (F_0, F_1)$ БИП последовательностей будем называть *правильной*, если F_0 и F_1 правильны.

Основной результат настоящей работы получим довольно элементарными ходами, основываясь на следующем не вполне элементарном факте [6].

Теорема 1. *Предположим, что пара $\overline{F}$ правильная, $f \in F_0 + F_1$. Последовательность f является* АКЭ *тогда и только тогда, когда существует пара $(l_1(v_0), l_1(v_1))$ такая, что $l_1(v_i) \supset F_i$, $i = 0, 1$, и*

$$K(t, f; F_0, F_1) \le K(t, f; l_1(v_0), l_1(v_1))$$

при всех $t > 0$.

Доказательство. Будем действовать по схеме работы [6]. Сначала заметим, что абсолютную кальдероновость элемента $f \in F_0 + F_1$ можно проверить только на одной паре $\overline{X} = \overline{L_1}$. Здесь $\overline{L_1}$ — стандартная весовая пара, образованная пространствами L_1 и $L_1(1/t)$ функций на $((0, \infty), dt/t)$.

Лемма 1. *Последовательность f есть АКЭ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})=\mathrm{K\text{-}orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})$.

Пояснения требует только достаточность. Пусть $\overline{X}$ — произвольная (относительно полная) пара и $x\in\mathrm{K\text{-}orb}(f;\overline{F}\to\overline{X})$. Найдем элемент $g\in L_1+L_1(1/t)$ такой, что функция $K(t,g;\overline{L_1})$ эквивалентна функции $K(t,f;\overline{F})$. Это можно сделать, так как пара $\overline{L_1}$ является K_0-полной [3]. Тогда $g\in\mathrm{K\text{-}orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})=\mathrm{Orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})$, т. е. $g=Pf$, где $P:\overline{F}\to\overline{L_1}$. Кроме того, поскольку интерполяция из пары $\overline{L_1}$ в пару $\overline{X}$ K-монотонна (см. например, [3]), а $K(t,x;\overline{X})\le\mathrm{const}\cdot K(t,g;\overline{L_1})$, имеем $x=Rg$ с некоторым оператором $R:\overline{L_1}\to\overline{X}$. В итоге $x=RPf$, где $RP:\overline{F}\to\overline{X}$, т. е. $x\in\mathrm{Orb}(f;\overline{F}\to\overline{X})$.

Лемма 2. *Если $a=Tf$, где оператор $T:\overline{F}\to\overline{A}$ абсолютно суммирует из F_i в $A_i, i=0,1$, то найдется пара $\overline{l_1(v)}=(l_1(v_0),l_1(v_1))$ такая, что $\overline{l_1(v)}\supset\overline{F}$, т. е. $l_1(v_i)\supset F_i$, для которой*

$$K(t,a;\overline{A})\le K(t,f;\overline{l_1(v)})$$

при всех $t>0$.

Доказательство. Абсолютно суммирующую норму оператора T как оператора из F_i в A_i обозначим через k_i. Пусть (e_n) — стандартный базис пространства F_0+F_1 (и F_0, и F_1). В силу абсолютной суммируемости для каждой последовательности $\varphi=(\varphi_n)\in F_i$ и любого конечного множества σ номеров имеем

$$\sum_{n\in\sigma}|\varphi_n|\|Te_n\|_{A_i}=\sum_{n\in\sigma}\|T(\varphi_n e_n)\|_{A_i}\le k_i\max_{\varepsilon_n=\pm1}\Big\|\sum_{n\in\sigma}\varepsilon_n\varphi_n e_n\Big\|_{F_i}$$
$$=k_i\|\varphi\cdot\chi_\sigma\|_{F_i}\le k_i\|\varphi\|_{F_i}.$$

Это означает, что $(\|Te_n\|_{A_i})\in F_i'$, $i=0,1$. Возьмем какую-нибудь положительную последовательность$(\varepsilon_n)\in F_0'\cap F_1'$ (таковые существуют). Положим $v_{in}=\|Te_n\|_{A_i}$, если $Te_n\ne0$, и $v_{in}=\varepsilon_n$, если $Te_n=0$. Имеем $v_i=(v_{in})\in F_i'$, что равносильно $l_1(v_i)\supset F_i$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nTe_n$ (λ_n — числа). Если $\lambda=(\lambda_n)\in l_1(v_i)$, то этот ряд сходится абсолютно в A_i:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\|Te_n\|_{A_i}\le\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|v_{in}=\|\lambda\|_{l_1(v_i)}.$$

Для $\lambda\in l_1(v_0)+l_1(v_1)$ определим

$$S\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nTe_n.$$

Оператор S действует из пары $\overline{l_1(v)}=(l_1(v_0),l_1(v_1))$ в пару $\overline{A}=(A_0,A_1)$ ($\|S\|\le 1$). Поскольку (e_n) — шаудеровский базис в F_0+F_1, а T непрерывен из F_0+F_1 в A_0+A_1, то

$$Sf=\sum_{n=1}^{\infty}f_nTe_n=T\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_ne_n\right)=Tf=a.$$

Следовательно, $K(t,a;\overline{A})\le K(t,f;\overline{l_1(v)})$, а именно это нам и нужно.

Приведем описание орбит элементов $f\in F_0+F_1$ в паре весовых L_1-пространств.

Лемма 3. $\mathrm{Orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})=\bigcup\mathrm{Orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1})$, *где объединение берется по всевозможным парам* $\overline{l_1(v)}$ *таким, что* $\overline{l_1(v)}\supset\overline{F}$.

Доказательство. Если x принадлежит правой части доказываемого равенства, т. е. x лежит в какой-нибудь орбите $\mathrm{Orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1})$, то $x=Hf$, где $H:\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1}$. Тогда сужение оператора H на пару $\overline{F}$ дает оператор из $\overline{F}$ в $\overline{L_1}$, переводящий элемент f в элемент x. Стало быть, x принадлежит и левой части доказываемого равенства.

Обоснуем обратное вложение. Пусть $x\in\mathrm{Orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})$, т. е. $x=Tf$, где $T:\overline{F}\to\overline{L_1}$. Возьмем пару $(L_2,L_2(1/t))=\overline{L_2}$ пространств функций на $((0,\infty),dt/t)$ и рассмотрим элемент $y\in L_2+L_2(1/t)$, у которого K-функция, т. е. $K(t,y;\overline{L_2})$, эквивалентна функции $K(t,x;\overline{L_1})$. Так как интерполяция из $\overline{L_1}$ в $\overline{L_2}$ является K-монотонной [6], существует оператор $S:\overline{L_1}\to\overline{L_2}$ такой, что $Sx=y$. По теореме Гротендика этот оператор абсолютно суммирует из L_1 в L_2 и из $L_1(1/t)$ в $L_2(1/t)$. Поэтому оператор ST абсолютно суммирует из F_0 в L_2 и из F_1 в $L_2(1/t)$. Кроме того, $STf=Sx=y$. По лемме 2 найдется пара $\overline{l_1(v)}\supset\overline{F}$, для которой $K(t,y;\overline{L_2})\le K(t,f;\overline{l_1(v)})$, а следовательно, и $K(t,x;\overline{L_1})\le\mathrm{const}\cdot K(t,f;\overline{l_1(v)})$. Так как интерполяция из $\overline{l_1(v)}$ в $\overline{L_1}$ K-монотонна, то $x\in\mathrm{Orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1})$.

Замечание. Поскольку в интерполяционной ситуации $\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1}$ орбиты совпадают с K-орбитами, то

$$\mathrm{Orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})=\bigcup\text{K-orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1}),\quad \overline{l_1(v)}\supset\overline{F}.$$

Отметим для полноты картины, что утверждение леммы 3 остается справедливым при замене пары $\overline{L_1}$ произвольной весовой парой $\overline{L_1(w)}$.

Завершим доказательство теоремы. Пусть f — АКЭ пары $\overline{F}$. Тогда (лемма 1) любой $x\in\text{K-orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})$ лежит (лемма 3) в некотором множестве $\mathrm{Orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1})=\text{K-orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1})$, $\overline{l_1(v)}\supset\overline{F}$. Выберем в качестве x такой элемент z, чтобы функция $K(t,z;\overline{L_1})$ оказалась эквивалентной функции $K(t,f;\overline{F})$. Имеем $z\in\text{K-orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})$, и для подходящей пары $\overline{l_1(v)}\supset\overline{F}$ получаем

$$K(t,f;\overline{F})\le cK(t,z;\overline{L_1})\le c_1K(t,f;\overline{l_1(v)}).$$

При необходимости постоянную c_1 можно превратить в 1, умножив веса v_0,v_1 на подходящее число (что, очевидно, никак не меняет всей ситуации).

Обратно, пусть для некоторой пары $\overline{l_1(v)}$ выполнено $\overline{l_1(v)}\supset\overline{F}$ и

$$K(t,f;\overline{F})\le K(t,f;\overline{l_1(v)}).$$

Если $x\in\text{K-orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})$, то

$$K(t,x;\overline{L_1})\le cK(t,f;\overline{F})\le cK(t,f;\overline{l_1(v)}).$$

Следовательно, $x\in\text{K-orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1})=\mathrm{Orb}(f;\overline{l_1(v)}\to\overline{L_1})\subset\mathrm{Orb}(f;\overline{F}\to\overline{L_1})$ (лемма 3).

Таким образом, K-орбита и орбита элемента f совпадают в $\overline{L_1}$, значит (лемма 1), f — это АКЭ. Теорема доказана.

В дополнение к формулировке теоремы 1 укажем, что

$$K(t,f;l_1(v_0),l_1(v_1))\le\mathrm{const}\cdot K(t,f;F_0,F_1),$$

и напомним общий вид K-функционала для пар весовых l_1-пространств:

$$K(t,f;l_1(v_0),l_1(v_1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \min(v_{on}, tv_{1n})|f_n|.$$

Кроме того, напомним, что $l_1(v) \supset F \Leftrightarrow v \in F'$ (этот факт уже использован при доказательстве леммы 2).

2. Случай тривиального множества АКЭ

Рассмотрим пару $\overline{F} = (F_0, F_1)$ БИП последовательностей.

Теорема 2. *Допустим, что*
(1) пара (F_0, F_1) правильна и относительно полна,
(2) пара (F_0', F_1') правильна.
Тогда множество АКЭ этой пары есть $F_0 \cap F_1$.

Доказательство. Пусть $f = (f_n) \in F_0 + F_1$ является АКЭ. В силу теоремы 1 существуют положительные $v_i = (v_{in}) \in F_i'$, $i = 0, 1$, такие, что

$$K(t,f;F_0,F_1) \le \sum_n \min(v_{0n}, tv_{1n})|f_n|$$

при всех $t > 0$. Воспользовавшись правильностью F_i, $i = 0, 1$, выберем N так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|v_i \chi_{\{n>N\}}\|_{F_i'} \le \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} K(t,f;F_0,F_1) &\le \Big(\sum_{n\le N} + \sum_{n>N}\Big) \min(v_{0n}, tv_{1n})|f_n| \\ &\le \sum_{n\le N} \min(v_{0n}, tv_{1n})|f_n| + \max_{i=0,1}(\|v_i\chi_{\{n>N\}}\|_{F_i'}) K(t, f\chi_{\{n>N\}}; F_0, F_1) \\ &\le \sum_{n\le N} \min(v_{0n}, tv_{1n})|f_n| + \frac{1}{2} K(t,f;F_0,F_1), \end{aligned}$$

откуда находим

$$K(t,f;F_0,F_1) \le 2\sum_{n\le N} \min(v_{0n}, tv_{1n})|f_n|$$

и, далее,

$$K(t,f;\overline{F}) \le c\min(1,t), \tag{1}$$

где $c = 2\sum_{n\le N} \max(v_{0n}, v_{1n})|f_n|$, при всех $t > 0$.

Из неравенства (1) и относительной полноты пары (F_0, F_1) получаем $f \in F_0 \cap F_1$.

Теорема доказана.

Заметим, что теорема 2 имеет своим следствием тот факт, что задача описания АКЭ пары (F_0, F_1), где F_i, $i = 0, 1$, берутся из совокупности пространств l_p $(1 < p < \infty)$, c_0, априори может получить нетривиальное решение ($\ne F_0 \cap F_1$) лишь в случае, когда среди пространств F_0, F_1 встречается пространство l_1. Таким образом, интересные в этом смысле «лебеговские» пары суть (l_1, l_p), где $1 < p < \infty$, и (l_1, c_0).

Ниже, в теореме 3, выясняется нетривиальность множества АКЭ «крайней» пары (l_1, c_0) и предлагается описание этого множества в терминах K-функционала.

3. Основной результат

Теорема 3. *Пусть* $f = (f_n) \in l_1 + c_0 = c_0$, $f \neq 0$. *Положим для краткости* $K(t, f; l_1, c_0) = K(t)$. *Последовательность* f *является АКЭ пары* (l_1, c_0), *если и только если найдется* $c > 1$ *такое, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{-1}\left(\frac{K(n)}{c}\right)}{n^2} < \infty.$$

Будем доказывать эту теорему в несколько другой формулировке.

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность* f *являлась* АКЭ *пары* (l_1, c_0), *необходимо и достаточно, чтобы существовали* $c > 0$ *и положительная неубывающая последовательность* $(t(n))$, *обладающая свойством*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} < \infty,$$

такие, что $K(n) \leq cK(t(n))$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Заметим сначала, что если $K(t, f; l_1, c_0) = K(t, g; l_1, c_0)$ при всех $t > 0$, то f и g одновременно являются или не являются АКЭ, поскольку f и g орбитально эквивалентны [3–9]. Из этого замечания и из того, что $K(t, f; l_1, c_0) = K(t, f^*; l_1, c_0)$, где f^* — последовательность, представляющая собой невозрастающую перестановку последовательности $|f|$, следует, что f является АКЭ тогда и только тогда, когда f^* является АКЭ. Поэтому будем в дальнейшем считать, что $f = f^*$.

Из теоремы 1, как и при доказательстве теоремы 2, имеем: f является АКЭ лишь тогда, когда существуют $v_0 = (v_{0m}) \in l_1' = l_\infty$, $v_1 = (v_{1m}) \in c_0' = l_1$, такие, что

$$K(t, f; l_1, c_0) \leq K(t, f; l_1(v_0), l_1(v_1)), \quad t > 0. \tag{2}$$

Так как функции $K(t, \ldots)$ в (2) неотрицательны и вогнуты, функция $K(t, f; l_1, c_0)$ линейна в промежутках $(0, 1]$, $[n, n+1]$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{t \to 0+} K(t, f; l_1, c_0) = 0,$$

то неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$K(n, f; l_1, c_0) \leq K(n, f; l_1(v_0), l_1(v_1)), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

или

$$K(n) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \min(v_{0m}, nv_{1m})|f_m|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Из (3) получаем

$$K(n) \leq c \sum_{m=1}^{\infty} \min(1, nv_m)|f_m|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $c = \|v_0\|_{l_\infty}$, $v_m = \frac{v_{1m}}{\|v_0\|_{l_\infty}}$. Ясно, что и, обратно, из неравенства типа (4), где c — постоянная и $v = (v_m) \in l_1$, вытекает неравенство типа (3).

Очевидно, кроме того, что, поскольку $f = f^*$, можно считать $v = v^*$.

Пусть (4) имеет место. Положим $s(n) = \mathrm{card}\{m : v_m \geq \frac{1}{n}\}$; $(s(n))$ — неотрицательная неубывающая неограниченная последовательность.

Оценим

$$\sum_m v_m \ge \sum_n \sum_{\frac{1}{n+1} \le v_m < \frac{1}{n}} \ge \sum_n \frac{1}{n+1} \operatorname{card}\left\{m : \frac{1}{n+1} \le v_m < \frac{1}{n}\right\}$$
$$= \sum_n \frac{s(n+1) - s(n)}{n+1}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{s(n+1) - s(n)}{n+1} = -\frac{s(1)}{2} + \sum_{n+2}^{N} \frac{s(n)}{n(n+1)} + \frac{s(N+1)}{N+1},$$

делаем вывод, что ряд $\sum\limits_n \frac{s(n)}{n(n+1)}$ сходится, а следовательно,

$$\sum_n \frac{s(n)}{n^2} < \infty. \tag{5}$$

Кроме того, $s(n) = O(n)$ (и даже $o(n)$), $n \to \infty$. В самом деле, если задано $\varepsilon > 0$, то для всех n, начиная с некоторого,

$$\varepsilon > \sum_{m=n}^{\infty} \frac{s(m)}{m(m+1)} \ge s(n) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = s(n)\frac{1}{n}.$$

Далее, находим

$$\sum_{m=s(n)+1}^{\infty} v_m f_m = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{p=s(m)+1}^{s(m+1)} v_p f_p \le (\text{в действительности } \asymp)$$
$$\le \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=s(m)+1}^{s(m+1)} f_p = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{K(s(m+1)) - K(s(m))}{m}. \tag{6}$$

Но так как

$$\sum_{m=n}^{n+q} \frac{K(s(m+1)) - K(s(m))}{m} = -\frac{K(s(n))}{n} + \sum_{m=n+1}^{n+q} \frac{K(s(m))}{(m-1)m} + \frac{K(s(n+q+1))}{n+q}$$

и $K(s(n+q+1)) = o(s(n+q+1))$ и тем самым $K(s(n+q+1)) = o(n+q)$, $q \to \infty$, то

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{K(s(m+1)) - K(s(m))}{m} = -\frac{K(s(n))}{n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m}. \tag{7}$$

Пользуясь (4), (6), (7), получаем

$$K(n) \le c \sum_{m=1}^{s(n)} f_m + cn \sum_{m=s(n)+1}^{\infty} v_m f_m$$
$$\le cK(s(n)) + cn\left(-\frac{K(s(n))}{n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m}\right) = cn \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m}. \tag{8}$$

Зафиксируем какое-нибудь натуральное число γ,

$$\gamma \ge 3c. \tag{9}$$

Будем рассматривать, кроме того, достаточно большие n, а именно такие, для которых

$$\sum_{s(m)>n} \frac{s(m)}{(m-1)m} \le \frac{1}{6c}. \tag{10}$$

Разобьем сумму $\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m}$ на три части:

$$\sum_{m>n} = \sum_{\substack{m>n,\\ m\le\gamma n}} + \sum_{\substack{m>\gamma n,\\ s(m)\le n}} + \sum_{\substack{m>\gamma n,\\ s(m)>n}},$$

и оценим каждую из них сверху:

$$\sum_{\substack{m>n,\\ m\le\gamma n}} \frac{K(s(m))}{(m-1)m} \le K(s(\gamma n)) \sum_{m>n} \frac{1}{(m-1)m} = \frac{K(s(\gamma n))}{n},$$

$$\sum_{\substack{m>\gamma n,\\ s(m)\le n}} \le K(n) \sum_{m>\gamma n} \frac{1}{(m-1)m} = \frac{K(n)}{\gamma n},$$

$$\sum_{\substack{m>\gamma n,\\ s(m)>n}} \frac{K(s(m))}{s(m)} \frac{s(m)}{(m-1)m} \le \frac{K(n)}{n} \sum_{s(m)>n} \frac{s(m)}{(m-1)m}.$$

Из этих оценок и (8) вытекает неравенство

$$K(n) \le cK(s(\gamma n)) + K(n)\biggl(\frac{c}{\gamma} + c\sum_{s(m)>n} \frac{s(m)}{(m-1)m}\biggr),$$

следовательно, в силу (9) и (10)

$$K(n) \le cK(s(\gamma n)) + K(n)(1/3 + 1/6).$$

Таким образом,

$$K(n) \le 2cK(s(\gamma n)) \tag{11}$$

для всех n, начиная с некоторого. Увеличив при необходимости постоянную c, добьемся того, чтобы (11) выполнялось уже для всех натуральных n.

Положим $t(n) = s(\gamma n)$. Ввиду соотношений (5) и (11) необходимость в доказываемой теореме установлена.

Проверим достаточность. Пусть $(t(n))$ — положительная неубывающая последовательность, $\sum\limits_{n} \frac{t(n)}{n^2} < \infty$, $K(n) \le cK(t(n))$, $n = 1, 2, \ldots$, где c — некоторая постоянная. Положим $s(n) = [t(n) + n^{\frac{1}{2}}]$. Отметим, что последовательность $(s(n))$ неограниченная, $\sum\limits_{n} \frac{s(n)}{n^2} < \infty$ (и, значит, $s(n) = o(n)$, $n \to \infty$). Определим последовательность $v = (v_m)$ правилом:

$$v_m = \frac{1}{n}, \text{ где } \ n = \min\{l : s(l) \ge m\}.$$

Имеем $v = v^*$. Легко сообразить, исходя из определения (v_m), что

$$\{m : v_m \ge 1/n\} = \{m : 1 \le m \le s(n)\}.$$

Поэтому, во-первых,

$$\sum_{m=s(1)+1}^{s(N+1)} v_m = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=s(n)+1}^{s(n+1)} v_m \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(s(n+1)-s(n)) \le \sum_{n=2}^{N} \frac{s(n)}{(n-1)n} + \frac{s(N+1)}{N},$$

так что ряд $\sum\limits_m v_m$ сходится, т. е. $v = (v_m) \in l_1$, а во-вторых,

$$K(n) \le cK(t(n)) \le cK(s(n)) = c\sum_{m=1}^{s(n)} f_m = c\sum_{v_m \ge \frac{1}{n}} f_m \le c\sum_{m=1}^{\infty} \min(1, nv_m) f_m,$$

т. е. выполнено неравенство типа (4). Следовательно, достаточность в доказываемой теореме установлена.

Перейдем к начальной формулировке теоремы 3. Действительно, если f — АКЭ, то, имея в виду необходимую часть доказанного утверждения и записав неравенство $K(n) \le cK(t(n))$, где, разумеется, $c > 1$, в виде $K^{-1}\bigl(\frac{K(n)}{c}\bigr) \le t(n)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{-1}\bigl(\frac{K(n)}{c}\bigr)}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} < \infty.$$

Если известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{K^{-1}(\frac{K(n)}{c})}{n^2}$ сходится, то, положив $t(n) = K^{-1}\bigl(\frac{K(n)}{c}\bigr)$, получаем, что $(t(n))$ неубывающая, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} < \infty$ и $K(n) = cK(t(n))$, и достаточная часть доказанного утверждения гарантирует нам принадлежность f к классу АКЭ.

Теорема 4 доказана.

4. О K-функциях АКЭ пары (l_1, c_0)

Оценка $K(n) \le cK(t(n))$ из теоремы 4, конечно, дает сильные ограничения на рост функции $K(t)$ на бесконечности. Во всяком случае у любого АКЭ K-функция растет медленнее любой степенной. Точнее, справедливо следующее

Предложение. *Пусть f — АКЭ банаховой пары (l_1, c_0), $K(t, f; l_1, c_0) = K(t)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем $K(t) = o(t^\varepsilon)$, $t \to \infty$.*

Доказательство. Используя теорему 2, найдем неубывающую последовательность натуральных чисел $(t(n))$, $\sum\limits_n \frac{t(n)}{n^2} < \infty$, и постоянную $c > 1$ такие, что $K(n) \le cK(t(n))$, $n = 1, 2, \ldots$. Зафиксируем какое-нибудь η,

$$0 < \eta < c^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{12}$$

Найдем $n_0 = n_0(\eta)$, обладающее тем свойством, что $t(n) \le \eta n$ при $n \ge n_0$. Будем считать $t(\cdot)$ отображением $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение степени $t^2(\cdot), t^3(\cdot), \ldots$ этого отображения. Заметим, что если $t^p(n) \ge n_0$, то $t^{p+1}(n) = t[t^p(n)] \le \eta t^p(n)$, поэтому

$$t^{p+1}(n) \le \eta t^p(n) \le \eta^2 t^{p-1}(n) \le \cdots \le \eta^p t(n) \le \eta^{p+1} n. \tag{13}$$

Пусть $n \ge \frac{n_0}{\eta}$. Выберем натуральное $p = p(n;\eta)$ так, чтобы $\eta^{p+1} n < n_0 \le \eta^p n$, т. е.

$$p = \left[\frac{\ln \frac{n}{n_0}}{\ln \frac{1}{\eta}}\right]. \tag{14}$$

Тогда в силу (13)

$$t^{p+1}(n) < n_0. \tag{15}$$

Итерируя неравенство $K(n) \le cK(t(n))$, получаем

$$K(n) \le cK(t(n)) \le c^2K(t^2(n)) \le \cdots \le c^{p+1}K(t^{p+1}(n)).$$

Следовательно,

$$K(n) \le (\text{см. } (15)) \le K(n_0)c^{p+1} \le (\text{см. } (14)) \le cK(n_0)e^{\ln c \cdot \frac{\ln \frac{n}{n_0}}{\ln \frac{1}{\eta}}}$$
$$= cK(n_0)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{\ln c}{\ln \frac{1}{\eta}}} \le (\text{см. } (12)) \le cK(n_0)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\varepsilon} = \frac{cK(n_0)}{n_0^{\varepsilon}}n^{\varepsilon}.$$

Таким образом, существует $c(\varepsilon)$ такое, что $K(n) \le c(\varepsilon)n^{\varepsilon}$, $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть любым, легко получаем $K(t) = o(t^{\varepsilon})$, $t \to \infty$.

Предложение доказано.

5. Заключительные замечания

1. АКЭ банаховой пары (l_1, l_p), $1 < p < \infty$, не изучались, и их характеризация нам неизвестна.

2. Работа [10] имеет дело с оценками погрешностей приближений некоторых функций специального вида в нормах пространств L_p $(1 \le p \le \infty)$. Мы не исключаем, что соответствующая дискретизация может привести к задаче об оценках для элементов специального вида из пространств l_1, l_p $(p > 1)$, c_0, как в нашей работе. Пока требуемые подходы не изучались.

3. Рассмотрим функцию $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$; назовем ее *медленной вогнутой функцией*, если φ вогнута, $\varphi(0+) = 0$ и существует такое μ, $0 < \mu < 1$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{-1}(\mu\varphi(n))}{n^2} < \infty.$$

Совокупность всех медленных вогнутых функций обозначим через SConc.

Переформулируем теорему 4 в терминах класса SConc: f — АКЭ пары $(l_1; c_0)$ тогда и только тогда, когда $K(\cdot, f; l_1, c_0) \in \mathrm{SConc}$.

По-видимому, было бы полезным изучить структуру множества SConc. Простой пример функции из SConc — функция, эквивалентная $\ln t$ при $t \to \infty$. Более сложный пример — почти степенная функция, эквивалентная на бесконечности функции $t^{\varepsilon(t)}$, где $\varepsilon(t)$ исчезает на бесконечности: $\varepsilon(t) = \frac{1}{\ln \ln t}$.

Конкретный вопрос, ответ на который нам неизвестен: как относится (в частности, совпадает ли) класс SConc с классом вогнутых функций $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\varphi(0+) = 0$, допускающих «самооценку»

$$\varphi(t) \le c\varphi\left(\frac{t}{\ln t}\right) \quad (t \ge e)$$

(см. также [11]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
2. *Берг Й, Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
3. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 24. С. 3–163.
4. *Dmitriev V. I., Semenov E. M.* Orbits and K-orbits // List of open problems. Israel Math. Conf. Proc. 1992. V. 5.
5. *Дмитриев В. И., Студеникина Л. И., Шевцова Т. В.* Об абсолютно кальдероновых элементах банаховой пары (l_1, c_0) // Науч. ведомости Белгород. ун-та. Математика. Физика. 2017. № 20. С. 34–39.
6. *Дмитриев В. И.* Об интерполяции операторов в пространствах L_p // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 5. С. 1051–1054.
7. *Дмитриев В. И.* Об оценках интерполяционных орбит функций из $L_1 + L_\infty$ // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 62–71.
8. *Овчинников В. И.* Об оценках интерполяционных орбит // Мат. сб. 1981. Т. 114, № 4. С. 642–652.
9. *Овчинников В. И.* Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега // Функцион. анализ и его прил. 2005. Т. 39, № 1. С. 56–68.
10. *Пастухова С. Е., Евсеева О. А.* Асимптотика решения уравнения диффузии в периодической среде на больших временах и ее применение к оценкам усреднения // Рос. технолог. журн. 2017. Т. 5, № 5. С. 60–69.
11. *Овчинников В. И.* Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса — Петре // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 4. С. 103–168.

Поступила в редакцию 10 июля 2023 г.
После доработки 12 декабря 2023 г.
Принята к публикации 28 января 2024 г.

Дмитриев Вячеслав Иванович,
Журавлева Елена Вадимовна (ORCID 0000-0001-8607-9992),
Михайлова Ольга Юрьевна
МИРЭА — Российский технологический университет,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
mikhajlova@mirea.ru

Бурилич Ирина Николаевна
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33, Курск 305000
mois@kursksu.ru