

КВАЗИПЛОТНОСТЬ В  $\mathbb{R}^N$   
И ПРОЕКТИВНЫЕ ПАРАЛЛЕЛОТОПЫ  
А. Е. Гутман, И. А. Емельяненко

**Аннотация.** Предложены два новых критерия замкнутости архимедовых конусов в счетномерных локально выпуклых пространствах — в терминах проективных параллелотопов и проективных автоморфизмов. Получены ответы на некоторые открытые вопросы, связанные с понятиями квазивнутренности и квазиплотности.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.203

**Ключевые слова:** архимедово упорядоченное векторное пространство, локально выпуклое пространство, слабая топология, конус, квазивнутренность, квазиплотное множество.

В работе [1] предложено исчерпывающее описание класса локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. А именно, введено понятие квазиплотного подмножества локально выпуклого пространства и показано, что описываемый класс составляют конечномерные пространства, а также все счетномерные пространства  $X$ , у которых топологически сопряженное пространство  $X'$  квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве  $X^\#$ , снабженном слабой топологией  $\sigma(X^\#, X)$ . Привлечение понятия квазиплотности позволило решить ряд проблем, связанных с архимедовыми конусами, но это понятие остается новым и малоисследованным, о чем, в частности, свидетельствует список открытых вопросов, приведенный в конце статьи [1]. Поскольку в случае  $\dim X = |\mathbb{N}|$  локально выпуклое пространство  $(X^\#, \sigma(X^\#, X))$  изоморфно  $\mathbb{R}^N$ , первоочередной задачей в рассматриваемом направлении является характеристика квазиплотных подмножеств  $\mathbb{R}^N$ . Статья посвящена решению этой задачи.

В параграфах 1 и 2, имеющих вспомогательный характер, приведены предварительные сведения и изучены автоморфизмы пространств последовательностей. В центральном параграфе 3 введено и исследовано понятие проективного параллелотопа и доказаны два новых критерия квазиплотности в  $\mathbb{R}^N$ . В параграфах 4 и 5 даны ответы на четыре открытых вопроса, сформулированных в [1], а также на вопросы о представительности параллелотопов в их связи с квазиплотностью и квазивнутренностью.

### § 1. Предварительные сведения

Начнем с того, что уточним обозначения и термины общего характера, а также воспроизведем некоторые используемые в дальнейшем определения

---

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

и факты из [1], чтобы текст статьи был пригодным для независимого чтения. Более полный набор соответствующих сведений, включающий доказательства и примеры, имеется в работе [1] и цитируемой там литературе.

**1.1.** Символ « $\subset$ » обозначает нестрогое включение множеств. Знак присваивания « $:=$ » используется в значении «полагается равным» или «равно по определению».

Символ  $\mathbb{N}$  обозначает множество натуральных чисел  $\{1, 2, \dots\}$ . Множества рациональных и вещественных чисел обозначаются символами  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$ . Символ  $\mathbb{R}^+$  служит для обозначения совокупности  $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$  положительных вещественных чисел. Множество  $\mathbb{R}$  наделяется стандартными операциями и топологией, относительно которых оно является полем и локально выпуклым пространством. Символом  $\mathbb{R}_D$  условимся обозначать множество вещественных чисел, снабженное дискретной топологией. Замкнутые и открытые числовые промежутки обозначаются символами  $[\alpha, \beta]$  и  $] \alpha, \beta [$ .

Символы  $\text{lin } S$ ,  $\text{co } S$ ,  $\text{cl } S$  и  $\text{int } S$  служат для обозначения линейной оболочки, выпуклой оболочки, замыкания и внутренности множества  $S$  в рассматриваемом векторном или топологическом пространстве.

**1.2.** В дальнейшем под *векторным пространством* понимается векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Термин *подпространство* всюду означает векторное подпространство. Подмножество  $K$  векторного пространства называется *конусом*, если  $K + K \subset K$ ,  $\mathbb{R}^+ K \subset K$  и  $K \cap -K = \{0\}$ . Конус  $K$  в векторном пространстве  $X$  называется *архимедовым*, если архимедово упорядоченное векторное пространство  $(X, \leq_K)$ , где  $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ .

**1.3.** Если  $X$  и  $Y$  — векторные пространства, символом  $L(X, Y)$  обозначается векторное пространство линейных операторов из  $X$  в  $Y$ . Символ  $X^\#$  используется для обозначения алгебраически сопряженного к  $X$  векторного пространства  $L(X, \mathbb{R})$ . Если  $X$  и  $Y$  — топологические векторные пространства, символом  $\mathcal{L}(X, Y)$  обозначается векторное пространство непрерывных линейных операторов из  $X$  в  $Y$ , а символом  $X'$  — топологически сопряженное к  $X$  пространство  $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ . Записи  $L(X)$  и  $\mathcal{L}(X)$  служат сокращениями для  $L(X, X)$  и  $\mathcal{L}(X, X)$ . Символом  $\text{Aut}(X)$  условимся обозначать совокупность всех автоморфизмов топологического векторного пространства  $X$ , т. е. множество таких биекций  $T: X \rightarrow X$ , что  $T, T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ .

**1.4.** Символом  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  обозначается подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , состоящее из финитных последовательностей, т. е. функций  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  с конечными носителями  $\text{supp } s := \{n \in \mathbb{N} : s(n) \neq 0\}$ . Кортежи  $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , традиционно считаются функциями  $x: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ . В дальнейшем используются обозначения

$$e_n := \chi_{\{n\}} = (0, \dots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

$$\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}} := \text{lin}\{e_1, \dots, e_n\} = \{s \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} : \text{supp } s \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

Линейный оператор  $\pi_n: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  определяется формулой

$$\pi_n s := s|_{\{1, \dots, n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \quad (1)$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей  $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , но и для кортежей  $s \in \mathbb{R}^m$ , где  $m \geq n$ . Кроме того, для удобства положим  $\mathbb{R}^0 := \{0\}$  и  $\pi_0 s := 0 \in \mathbb{R}^0$ .

**1.5.** Говорят, что векторные пространства  $X$  и  $Y$  образуют *двойственную пару* относительно двойственности  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , если  $\langle \cdot | \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  — такой билинейный функционал, что  $\ker \langle \cdot | \cdot \rangle = \{0\}$  и  $\ker |\cdot\rangle = \{0\}$ , где  $\langle x | = \langle x | \cdot \rangle \in Y^\#$  ( $x \in X$ ) и  $|\cdot\rangle = \langle \cdot | y \rangle \in X^\#$  ( $y \in Y$ ). Такие пространства  $X$  и  $Y$  по умолчанию наделяются соответствующими слабыми топологиями  $\sigma(X, Y)$  и  $\sigma(Y, X)$  и тем самым становятся хаусдорфовыми локально выпуклыми пространствами, которые условимся обозначать символами  $X|Y$  и  $Y|X$ . При этом отображения  $\langle \cdot | : X \rightarrow Y'$  и  $|\cdot\rangle : Y \rightarrow X'$  (или, точнее,  $\langle \cdot | : X|Y \rightarrow (Y|X)'$  и  $|\cdot\rangle : Y|X \rightarrow (X|Y)'$ ) являются линейными и топологическими изоморфизмами.

**1.6.** Пространство  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) рассматривается в двойственной паре с  $\mathbb{R}^n$ , где  $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x(i)y(i)$ , а векторные пространства  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  и  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  по умолчанию считаются парой относительно двойственности  $\langle x | y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)y(n)$  и наделяются соответствующими слабыми топологиями:  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} := \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ . Эта же двойственность подразумевается при рассмотрении локально выпуклых пространств вида  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | Y$ , где  $Y$  — подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , удовлетворяющее следующим равносильным условиям (см. [1, 3.5, 3.6]):

- (а)  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  и  $Y$  образуют двойственную пару относительно  $\langle x | y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)y(n)$ ;
- (б) слабая топология  $\sigma(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}, Y)$  хаусдорфова;
- (в)  $Y$  плотно в  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ ;
- (г)  $Y$  плотно в  $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$ ;
- (д)  $\pi_n Y = \mathbb{R}^n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (е)  $\pi_n e_n \in \pi_n Y$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.7.** Множество  $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , называется *проективным* (см. [1, 7.1]), если оно замкнуто в  $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$  или, что то же самое, содержит каждую последовательность  $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , удовлетворяющую включениям  $\pi_n s \in \pi_n S$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Примерами проективных множеств служат произвольные декартовы произведения  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$ , где  $\Lambda_n \subset \mathbb{R}$ . Кроме того, любое замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  замкнуто также в  $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$  и поэтому проективно.

Последовательность множеств  $S_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) называется *проективной* (см. [1, 7.1]), если она обладает следующими равносильными свойствами:

- (а) существует такое множество  $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , что  $S_n = \pi_n S$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (б)  $S_n = \pi_n S_m$  при  $n \leq m$ ;
- (в)  $S_n = \pi_n S_{n+1}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

При этом множество

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}(S_n) = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n s \in S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$$

называется *проективным пределом* последовательности  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и обозначается символом  $\varprojlim S_n$  (см. [1, 7.3]). Проективный предел  $\varprojlim S_n$  представляет собой наибольшее среди множеств  $S$ , удовлетворяющих условию пункта (а), является единственным проективным среди таких множеств и совпадает с замыканием любого из них в топологическом пространстве  $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$ .

**1.8.** Квазивнутренность  $\text{qi } S$  подмножества  $S$  хаусдорфова локально выпуклого пространства  $X$  определяется следующим образом:

$$\text{qi } S := \{x \in S : \text{cl } \mathbb{R}^+(S - x) = X\}.$$

Элементы  $\text{qi } S$  называются *квазивнутренними точками* множества  $S$ . В случае  $\text{qi } S = S$  говорят, что множество  $S$  *квазиоткрыто*.

**Теорема** [1, 4.13]. Для любого выпуклого множества  $C \subset \mathbb{R}^N$  справедливо равенство

$$\text{qi } C = \{c \in C : \pi_n c \in \text{int } \pi_n C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, выпуклое множество  $C$  квазиоткрыто в  $\mathbb{R}^N$  тогда и только тогда, когда каждая проекция  $\pi_n C$  открыта в  $\mathbb{R}^n$ .

**1.9.** Подмножество  $\mathbb{R}^N$ , имеющее вид  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$ , где  $\Lambda_n$  — открытые подмножества  $\mathbb{R}$ , называется *открытой коробкой*. Топология на  $\mathbb{R}^N$ , для которой открытые коробки служат базовыми открытыми множествами, называется *коробочной топологией*. Как легко видеть, для любого элемента  $z \in \mathbb{R}^N$  выпуклые открытые коробки

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} |z(n) - r(n), z(n) + r(n)|, \quad r(n) > 0, \quad (2)$$

образуют базу окрестностей точки  $z$  в коробочной топологии.

**Предложение** [1, 7.8]. Всякая выпуклая открытая коробка в  $\mathbb{R}^N$  служит примером проективного ограниченного квазиоткрытого множества. Более того, все подмножества  $\mathbb{R}^N$ , открытые в коробочной топологии, квазиоткрыты.

**1.10.** Подмножество  $S$  локально выпуклого пространства  $X$  называют *квазиплотным* в  $X$ , если  $S \cap B \neq \emptyset$  для любого замкнутого ограниченного выпуклого множества  $B \subset X$ , имеющего непустую квазивнутренность (см. [1, 6.2]).

**Предложение** [1, 6.4]. В пространстве  $\mathbb{R}^N$  все квазиплотные множества являются плотными.

**1.11. Предложение** [1, 8.8]. Следующие свойства множества  $S \subset \mathbb{R}^N$  равносильны:

- (а)  $S$  квазиплотно в  $\mathbb{R}^N$ ;
- (б) если  $C$  — компактное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^N$  и  $\text{qi } C \neq \emptyset$ , то  $S \cap C \neq \emptyset$ ;
- (в) если  $B$  — непустое проективное ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^N$ , то  $S \cap B \neq \emptyset$ ;
- (г) если  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — проективная последовательность непустых ограниченных открытых выпуклых множеств, то  $S \cap \varprojlim B_n \neq \emptyset$ ;
- (е) если  $C$  — проективное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^N$  и  $\text{qi } C \neq \emptyset$ , то  $S \cap C \neq \emptyset$ .

**1.12. Теорема** [1, 8.5]. Пусть  $Y$  — плотное подпространство  $\mathbb{R}^N$ .

(а) В пространстве  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^N | Y$  все архимедовы конусы замкнуты тогда и только тогда, когда  $Y$  квазиплотно в  $\mathbb{R}^N$ .

(б) Если  $C$  — компактное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^N$ ,  $\text{qi } C \neq \emptyset$  и  $Y \cap C = \emptyset$  (см. предложение 1.11 (б)), то множество  $\{x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^N : \langle x | c \rangle \geq 0 \text{ при } c \in C\}$  служит примером архимедова, но не замкнутого (более того, плотного) конуса в  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^N | Y$ .

## § 2. Индуктивные и проективные автоморфизмы

В этом вспомогательном параграфе уточняется вид числовых матриц, задающих непрерывные линейные операторы в пространствах последовательностей, и исследуются операторы, соответствующие верхнетреугольным и нижнетреугольным матрицам.

**2.1.** Пусть  $X, Y$  — двойственная пара векторных пространств и  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Как известно, в этом случае существует единственное отображение  $T': Y \rightarrow Y$ , удовлетворяющее равенству  $\langle Tx | y \rangle = \langle x | T'y \rangle$  для всех  $x \in X$  и  $y \in Y$ . Отображение  $T'$  принадлежит  $\mathcal{L}(Y)$  и называется *сопряженным к  $T$  оператором* (см. [2, 11-1]). Аналогично для  $S \in \mathcal{L}(Y)$  определяется оператор  $S' \in \mathcal{L}(X)$ .

Всякий оператор  $T \in \mathcal{L}(X)$  является сопряженным к  $T' \in \mathcal{L}(Y)$ , а оператор  $S \in \mathcal{L}(Y)$  — сопряженным к  $S' \in \mathcal{L}(X)$ , т. е.  $T'' = T$  и  $S'' = S$ .

Для любого оператора  $T \in \mathcal{L}(X)$  включения  $T \in \text{Aut}(X)$  и  $T' \in \text{Aut}(Y)$  равносильны. При этом  $(T^{-1})' = (T')^{-1}$ .

В дальнейшем в роли  $X, Y$  будет выступать пара  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Заметим, что в силу соотношения  $(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})' = (\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})^{\#}$  все линейные операторы  $T: \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  непрерывны, т. е.  $L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ .

**2.2.** Условимся называть числовые семейства  $\mu \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  *матрицами*, а последовательности  $\mu(\cdot, n)$  и  $\mu(m, \cdot)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) — *столбцами* и *строками* матрицы  $\mu$ :

$$\begin{pmatrix} \mu(1,1) & \mu(1,2) & \mu(1,3) & \cdots & \mu(1,n) & \cdots \\ \mu(2,1) & \mu(2,2) & \mu(2,3) & \cdots & \mu(2,n) & \cdots \\ \mu(3,1) & \mu(3,2) & \mu(3,3) & \cdots & \mu(3,n) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu(m,1) & \mu(m,2) & \mu(m,3) & \cdots & \mu(m,n) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \mu(m, \cdot) \\ \mu(\cdot, n) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \mu(\cdot, n) &= (\mu(m, n))_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ — } n\text{-й столбец } (n \in \mathbb{N}) \text{ матрицы } \mu, \\ \mu(m, \cdot) &= (\mu(m, n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ — } m\text{-я строка } (m \in \mathbb{N}) \text{ матрицы } \mu. \end{aligned}$$

Транспонированная матрица  $\mu^T$  определяется формулой  $\mu^T(m, n) := \mu(n, m)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).

Матрицу  $\mu$  назовем *матрицей с финитными столбцами* (с *финитными строками*), если  $\mu(\cdot, n) \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  (соответственно,  $\mu(m, \cdot) \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ ). Частными случаями матриц с финитными столбцами и финитными строками служат *верхнетреугольные* и *нижнетреугольные матрицы* — такие  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ , что  $\mu(m, n) = 0$  при  $m > n$  и  $\lambda(m, n) = 0$  при  $n > m$ :

$$\begin{pmatrix} \mu(1,1) & \mu(1,2) & \mu(1,3) & \cdots & \mu(1,n) & \cdots \\ 0 & \mu(2,2) & \mu(2,3) & \cdots & \mu(2,n) & \cdots \\ 0 & 0 & \mu(3,3) & \cdots & \mu(3,n) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mu(n,n) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda(1,1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \lambda(2,1) & \lambda(2,2) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \lambda(3,1) & \lambda(3,2) & \lambda(3,3) & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda(m,1) & \lambda(m,2) & \lambda(m,3) & \cdots & \lambda(m,m) & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

**2.3.** Матрицам  $\mu$  с финитными столбцами и матрицам  $\lambda$  с финитными строками соответствуют отображения  $\mu^\wedge: \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  и  $\lambda^\vee: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , определяемые следующими формулами:

$$(\mu^\wedge x)(m) := \langle x | \mu(m, \cdot) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(m, n)x(n), \quad x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$(\lambda^\vee y)(m) := \langle \lambda(m, \cdot) | y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(m, n)y(n), \quad y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(Поясним, почему  $\mu^\wedge x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  при  $x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ . Действительно, благодаря финитности столбцов  $\mu(\cdot, n)$  имеется такая последовательность натуральных чисел  $m_n$ , что  $\mu(m, n) = 0$  для всех  $m \geq m_n$ . Пусть  $x(n) = 0$  при  $n > k$ . Тогда для всех чисел  $m \geq \max\{m_1, \dots, m_k\}$  имеем  $(\mu^\wedge x)(m) = \sum_{n=1}^k \mu(m, n)x(n) = 0$ .)

Всякому оператору  $T$ , принадлежащему  $L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  или  $L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ , сопоставим матрицу  $[T] \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ , полагая

$$[T](m, n) := (Te_n)(m), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

**2.4. Предложение** (ср. [2, 11-1-6, 11-1-10, 11-1-11]).

- (а) Если  $\mu$  — матрица с финитными столбцами, то  $\mu^\wedge \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  и  $[\mu^\wedge] = \mu$ .
- (б) Если  $\lambda$  — матрица с финитными строками, то  $\lambda^\vee \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  и  $[\lambda^\vee] = \lambda$ .
- (в) Если  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ , то  $[\nabla]$  — матрица с финитными столбцами,  $[\nabla]^\wedge = \nabla$ ,  $\nabla' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  и  $[\nabla'] = [\nabla]^\vee$ .
- (г) Если  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ , то  $[\Delta]$  — матрица с финитными строками,  $[\Delta]^\vee = \Delta$ ,  $\Delta' \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  и  $[\Delta'] = [\Delta]^\wedge$ .

◀ В пояснении нуждается лишь пункт (г). Пусть  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ . Тогда для всех  $m, n \in \mathbb{N}$

$$[\Delta](m, n) = (\Delta e_n)(m) = \langle e_m | \Delta e_n \rangle = \langle \Delta' e_m | e_n \rangle = (\Delta' e_m)(n),$$

а значит,  $[\Delta](m, \cdot) = \Delta' e_m \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ , т.е.  $[\Delta]$  — матрица с финитными строками. Далее, для всех  $m, n \in \mathbb{N}$

$$([\Delta]^\vee e_n)(m) = \langle [\Delta](m, \cdot) | e_n \rangle = ([\Delta](m, \cdot))(n) = [\Delta](m, n) = (\Delta e_n)(m),$$

откуда с учетом плотности  $\text{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и непрерывности операторов  $\Delta$  и  $[\Delta]^\vee$  (см. п. (б)) вытекает равенство  $[\Delta]^\vee = \Delta$ . Равенство  $[\Delta'] = [\Delta]^\wedge$  очевидно. ▶

**2.5. Предложение.** Следующие свойства оператора  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  равносильны:

- (а)  $[\nabla]$  — верхнетреугольная матрица;
- (б)  $\nabla(\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}) \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (в)  $\nabla e_n \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Оператор  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ , обладающий равносильными свойствами (а)–(в), назовем *индуктивным*.

**2.6. Предложение.** Следующие свойства оператора  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  равносильны:

- (а)  $[\Delta]$  — нижнетреугольная матрица;
- (б) если  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $\pi_n y = 0$ , то  $\pi_n \Delta y = 0$ ;
- (в) если  $y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $\pi_n y = \pi_n z$ , то  $\pi_n \Delta y = \pi_n \Delta z$ ;
- (г)  $\pi_n \Delta e_{n+1} = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Оператор  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ , обладающий равносильными свойствами (а)–(г), назовем *проективным*.

**2.7. Предложение.** (а) Оператор  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  является индуктивным тогда и только тогда, когда  $\nabla' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  — проективный оператор.

(б) Оператор  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  является проективным тогда и только тогда, когда  $\Delta' \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  — индуктивный оператор.

**2.8. Предложение.** (а) Для любой последовательности элементов  $x_n \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  существует единственный оператор  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  такой, что  $\nabla e_n = x_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Такой оператор  $\nabla$  является индуктивным.

(б) Если последовательность элементов  $y_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  удовлетворяет условию  $\pi_n y_{n+1} = 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то существует единственный оператор  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  такой, что  $\Delta e_n = y_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Такой оператор  $\Delta$  является проективным.

◁ Утверждение (а) в пояснении не нуждается.

(б) По условию матрица  $\lambda$ , определенная формулой  $\lambda(m, n) := y_n(m)$ , является нижнетреугольной, а значит,  $\Delta := \lambda^\vee$  — искомый оператор (см. предложение 2.4(б)). Единственность такого оператора вытекает из его непрерывности и плотности  $\text{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , а проективность обусловлена соотношением 2.6(d). ▷

**2.9. Предложение.** Пусть  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  — проективный оператор.

(а) Оператор  $\Delta$  непрерывен как отображение из  $\mathbb{R}_{\mathbb{D}}^{\mathbb{N}}$  в  $\mathbb{R}_{\mathbb{D}}^{\mathbb{N}}$ .

(б) Если  $P$  — проективное подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , то  $\Delta^{-1}(P)$  — проективное подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

(с) Если  $\text{im } \Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $Y$  — плотное подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , то  $\Delta(Y)$  — плотное подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

◁ Утверждение (а) легко доказать с помощью предложения 2.6(с). Утверждения (б) и (с) вытекают из утверждения (а) согласно пп. 1.7 и 1.6(d) соответственно. ▷

**2.10. Предложение.** Пусть  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  — индуктивный оператор. Следующие свойства  $\nabla$  равносильны:

(а)  $\nabla \in \text{Aut}(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ ;

(б)  $\nabla e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — линейно независимые элементы  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ ;

(с)  $[\nabla](n, n) \neq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

◁ Импликация (а)  $\Rightarrow$  (б) тривиальна.

(б)  $\Rightarrow$  (с). Поскольку  $\nabla e_1 \in \mathbb{R}_1^{\mathbb{N}}$  (см. предложение 2.5(с)) и  $\nabla e_1 \neq 0$ , имеем  $[\nabla](1, 1) = (\nabla e_1)(1) \neq 0$ . Пусть теперь  $n > 1$ . Согласно п. (б) элементы  $\nabla e_1, \dots, \nabla e_{n-1}$  образуют базис  $\mathbb{R}_{n-1}^{\mathbb{N}}$ . Если бы число  $[\nabla](n, n) = (\nabla e_n)(n)$  равнялось нулю, то с учетом включения  $\nabla e_n \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  были бы справедливы соотношения  $\nabla e_n \in \mathbb{R}_{n-1}^{\mathbb{N}} = \text{lin}\{\nabla e_1, \dots, \nabla e_{n-1}\}$  вопреки линейной независимости  $\nabla e_1, \dots, \nabla e_n$ .

(с)  $\Rightarrow$  (а). Поскольку верхнетреугольная матрица  $n \times n$  с ненулевыми диагональными элементами невырождена, элементы  $\nabla e_1, \dots, \nabla e_n$  образуют базис  $\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , а значит,  $\{\nabla e_n : n \in \mathbb{N}\}$  — базис  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ . ▷

Индуктивный оператор  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ , обладающий равносильными свойствами (а)–(с), будем называть *индуктивным автоморфизмом*. Индуктивный автоморфизм  $\nabla$  назовем *положительным*, если  $[\nabla](n, n) > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Множество всех положительных индуктивных автоморфизмов обозначим символом  $\nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ .

**2.11. Предложение.** Пусть  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  — проективный оператор. Следующие свойства  $\Delta$  равносильны:

- (a)  $\Delta \in \text{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ ;
- (b)  $\Delta e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — линейно независимые элементы  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $\text{clim } \Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ;
- (c)  $[\Delta](n, n) \neq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

◁ Импликация (a)  $\Rightarrow$  (b) тривиальна.

(b)  $\Rightarrow$  (c). Покажем, что  $\Delta' e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — линейно независимые элементы  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ .

Действительно, если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  и  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta' e_i = 0$ , то для всех  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \Delta y \right\rangle = \left\langle \Delta' \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \mid y \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta' e_i \mid y \right\rangle = 0,$$

откуда благодаря плотности  $\text{im } \Delta$  в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  вытекает равенство  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$  и поэтому  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Согласно предложениям 2.4(d), 2.7(b) и 2.10 отсюда следует, что  $[\Delta](n, n) = [\Delta']^{\text{T}}(n, n) = [\Delta'](n, n) \neq 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Импликация (c)  $\Rightarrow$  (a) так же легко выводится из предложений 2.4(d), 2.7(b) и 2.10. ▷

Заметим, что в пункте (b) требование  $\text{clim } \Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  является существенным. Соответствующим контрпримером служит оператор сдвига, определяемый формулой  $\Delta(y) = (0, y(1), y(2), y(3), \dots)$ .

Проективный оператор  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ , обладающий равносильными свойствами (a)–(c), будем называть *проективным автоморфизмом*. Проективный автоморфизм  $\Delta$  назовем *положительным*, если  $[\Delta](n, n) > 0$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Множество всех положительных проективных автоморфизмов обозначим символом  $\Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ .

**2.12.** Следующее утверждение с очевидностью вытекает из приведенных выше сведений.

**Предложение.** (a) Для любых  $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  и  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

$$\begin{aligned} \nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}) &\Leftrightarrow \nabla' \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}); \\ \Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) &\Leftrightarrow \Delta' \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

(b) Множества  $\nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  и  $\Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  являются подгруппами в группах автоморфизмов  $\text{Aut}(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$  и  $\text{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  относительно композиции операторов.

### § 3. Проективные параллелотопы

В этом параграфе вводится понятие проективного параллелотопа, устанавливается связь параллелотопов с индуктивными и проективными автоморфизмами (теорема 3.4) и предлагаются два новых критерия квазиплотности в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  — в терминах параллелотопов и автоморфизмов (теорема 3.8).

**3.1.** Для  $\varkappa = (\varkappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$  и  $r \in ]0, \infty[^{\mathbb{N}}$  положим

$$\Pi_{\varkappa}^r := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(1)| < r(1), \right. \\ \left. \left| y(n+1) - \sum_{i=1}^n \varkappa_n(i) y(i) \right| < r(n+1) \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \right\}.$$



Для удобства в дальнейшем будем полагать  $\varkappa_0 := 0 \in \mathbb{R}^0$ . (Напомним о введенных ранее обозначениях  $\mathbb{R}^0 := \{0\}$  и  $\pi_0 y := \pi_0 x := 0 \in \mathbb{R}^0$  для  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $x \in \mathbb{R}^n$ .) С учетом этого соглашения имеем

$$\Pi_{\varkappa}^r = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n) - \langle \varkappa_{n-1} | \pi_{n-1} y \rangle| < r(n) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

Множество  $z + \Pi_{\varkappa}^r$ , где  $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , условимся называть *параллелотопом* (точнее, *проективным параллелотопом*) с *центром*  $z$ , *наклоном*  $\varkappa$  и *радиусом*  $r$ .

Символом  $\Pi_0^r$  обозначим параллелотоп с нулевым центром  $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , нулевым наклоном  $(0, 0, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$  и радиусом  $r \in ]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ , а символом  $\Pi_0^1$  — параллелотоп  $\Pi_0^{(1,1,\dots)}$ :

$$\begin{aligned} \Pi_0^r &= \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n)| < r(n) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}, \\ \Pi_0^1 &= \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n)| < 1 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

**3.2.** Из следующей леммы видно, что каждая проекция  $\pi_n P$  параллелотопа  $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  является открытым параллелотопом в  $\mathbb{R}^n$ , т. е. открытым  $n$ -мерным параллелепипедом.

**Лемма.** Пусть  $\varkappa \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ ,  $r \in ]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \pi_n \Pi_{\varkappa}^r &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x(m) - \langle \varkappa_{m-1} | \pi_{m-1} x \rangle| < r(m) \text{ для } m = 1, \dots, n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \pi_{n-1} x \in \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r \text{ и } |x(n) - \langle \varkappa_{n-1} | \pi_{n-1} x \rangle| < r(n)\}. \end{aligned}$$

◁ Включение « $\subset$ » очевидно. Предположим теперь, что  $x \in \mathbb{R}^n$  и

$$|x(m) - \langle \varkappa_{m-1} | \pi_{m-1} x \rangle| < r(m), \quad m = 1, \dots, n.$$

Определим  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , полагая  $\pi_n y := x$  и  $y(m) := \sum_{i=1}^{m-1} \varkappa_{m-1}(i) y(i)$  рекурсивно для  $m > n$ . Тогда  $y \in \Pi_{\varkappa}^r$ , а значит,  $x \in \pi_n \Pi_{\varkappa}^r$ . ▷

**3.3. Предложение.** Центр, наклон и радиус однозначно определяются параллелотопом: если  $z + \Pi_{\varkappa}^r = z' + \Pi_{\varkappa'}^{r'}$ , то  $z = z'$ ,  $\varkappa = \varkappa'$  и  $r = r'$ .

◁ Пусть  $z + \Pi_{\varkappa}^r = z' + \Pi_{\varkappa'}^{r'}$ . Сразу заметим, что  $z = z'$ , так как непустое ограниченное множество не может иметь два центра симметрии. Поэтому можно считать, что  $z = z' = 0$ .

Рассмотрим  $n \in \mathbb{N}$  и покажем, что  $r(n) = r'(n)$  и  $\varkappa_{n-1} = \varkappa'_{n-1}$ . Случай  $n = 1$  тривиален. Пусть  $n > 1$ . Для каждого  $x \in \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r = \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa'}^{r'}$  благодаря лемме 3.2 имеем при всех  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\lambda - \langle \varkappa_{n-1} | x \rangle| < r(n) &\Leftrightarrow (x, \lambda) \in \pi_n \Pi_{\varkappa}^r \\ &\Leftrightarrow (x, \lambda) \in \pi_n \Pi_{\varkappa'}^{r'} \Leftrightarrow |\lambda - \langle \varkappa'_{n-1} | x \rangle| < r'(n), \end{aligned}$$

а значит,  $r(n) = r'(n)$  и  $\langle \varkappa_{n-1} | x \rangle = \langle \varkappa'_{n-1} | x \rangle$ . Последнее равенство с учетом произвольности  $x \in \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r$  означает, что функционал  $\langle \varkappa_{n-1} - \varkappa'_{n-1} | \cdot \rangle$  постоянен на  $\pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r$ . Следовательно,  $\varkappa_{n-1} = \varkappa'_{n-1}$ , так как согласно лемме 3.2 множество  $\pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r$  является окрестностью нуля в  $\mathbb{R}^{n-1}$ . ▷

**3.4. Теорема.** Следующие свойства множества  $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  равносильны:

(а)  $P$  является параллелотопом с центром в нуле, т. е.  $P = \Pi_{\varkappa}^r$  для некоторых  $\varkappa \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$  и  $r \in ]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ ;

(б)  $P = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |\langle \nabla e_n | y \rangle| < 1 \text{ при всех } n \in \mathbb{N}\}$  для некоторого автоморфизма  $\nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ ;

(с)  $P = \Delta(\Pi_0^1)$  для некоторого автоморфизма  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ .

При этом  $\varkappa$ ,  $r$ ,  $\nabla$  и  $\Delta$  однозначно определяются параллелотопом  $P$  и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$r(n) = \frac{1}{(\nabla e_n)(n)}; \quad \varkappa_{n-1} = -r(n) \pi_{n-1} \nabla e_n; \quad (3)$$

$$\nabla e_n = \frac{1}{r(n)}(-\varkappa_{n-1}(1), \dots, -\varkappa_{n-1}(n-1), 1, 0, 0, \dots); \quad (4)$$

$$\Delta = (\nabla')^{-1} = (\nabla^{-1})'; \quad \nabla = (\Delta')^{-1} = (\Delta^{-1})'.$$

◁ (а)⇒(б). Пусть  $\varkappa$  и  $r$  удовлетворяют условию (а). Согласно предложению 2.8(а) имеется индуктивный оператор  $\nabla$ , удовлетворяющий равенству (4) для всех  $n \in \mathbb{N}$ , причем  $\nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ , поскольку  $[\nabla](n, n) = (\nabla e_n)(n) = \frac{1}{r(n)} > 0$ . Остается заметить, что для  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |y(n) - \langle \varkappa_{n-1} | \pi_{n-1} y \rangle| < r(n) &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{r(n)} y(n) - \left\langle \frac{1}{r(n)} \varkappa_{n-1} \mid \pi_{n-1} y \right\rangle \right| < 1 \\ &\Leftrightarrow |\langle \nabla e_n | y \rangle| < 1. \end{aligned}$$

(б)⇒(с). Пусть  $P$  и  $\nabla$  удовлетворяют условию (б). Согласно предложению 2.12 операторы  $\nabla'$  и  $\Delta := (\nabla')^{-1}$  принадлежат группе  $\Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ . Кроме того, для всех  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $n \in \mathbb{N}$  неравенство  $|\langle \nabla e_n | y \rangle| < 1$  равносильно  $|(\nabla' y)(n)| < 1$ , а значит,

$$y \in P \Leftrightarrow \nabla' y \in \Pi_0^1 \Leftrightarrow y \in (\nabla')^{-1}(\Pi_0^1) = \Delta(\Pi_0^1).$$

(с)⇒(а). Пусть  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  и  $P = \Delta(\Pi_0^1)$ . Согласно предложению 2.12 оператор  $\nabla := (\Delta^{-1})'$  принадлежит  $\nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ . Определим  $r$  и  $\varkappa$  в соответствии с равенствами (3) и покажем, что  $P = \Pi_{\varkappa}^r$ . Действительно, для всех  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (\Delta^{-1} y)(n) &= \langle e_n | \Delta^{-1} y \rangle = \langle (\Delta^{-1})' e_n | y \rangle = \langle \nabla e_n | y \rangle \\ &= (\nabla e_n)(n) y(n) + \langle \pi_{n-1} \nabla e_n | \pi_{n-1} y \rangle = \frac{1}{r(n)} y(n) - \left\langle \frac{1}{r(n)} \varkappa_{n-1} \mid \pi_{n-1} y \right\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенства  $|(\Delta^{-1} y)(n)| < 1$  и  $|y(n) - \langle \varkappa_{n-1} | \pi_{n-1} y \rangle| < r(n)$  равносильны и поэтому

$$y \in P \Leftrightarrow y \in \Delta(\Pi_0^1) \Leftrightarrow \Delta^{-1} y \in \Pi_0^1 \Leftrightarrow y \in \Pi_{\varkappa}^r.$$

Поясним единственность параметров  $\varkappa$ ,  $r$ ,  $\nabla$  и  $\Delta$ , фигурирующих в формулировке теоремы. Единственность  $\varkappa$  и  $r$  обоснована в лемме 3.3. Если  $\nabla$  удовлетворяет условию (б), то, как видно из доказательства импликации (с)⇒(а), имеет место равенство  $P = \Pi_{\varkappa}^r$ , где  $r$  и  $\varkappa$  определяются соотношениями (3). Тогда из предложения 3.3 следует, что параллелотопом  $P$  однозначно определяются значения  $\nabla e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), а значит, и оператор  $\nabla$ . Если же  $\Delta$  удовлетворяет условию (с), то, как легко видеть,  $\nabla := (\Delta^{-1})'$  удовлетворяет условию (б) и, следовательно, параллелотоп  $P$  однозначно определяет операторы  $\nabla$  и  $\Delta = (\nabla')^{-1}$ . ▷

**3.5.** Следующее утверждение вытекает из предложения 2.12(b) и теоремы 3.4.

**Следствие.** Если  $P$  — параллелотоп и  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ , то  $\Delta(P)$  и  $\Delta^{-1}(P)$  — параллелотопы.

**3.6. Следствие.** Всякий параллелотоп является непустым проективным ограниченным квазиоткрытым выпуклым подмножеством  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

◁ Параллелотоп  $\Pi_0^1$ , очевидно, обладает перечисленными свойствами, а значит, с учетом предложений 2.9(b) и 2.12(b) ими обладает и всякое множество вида  $z + \Delta(\Pi_0^1)$ , где  $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ . Остается привлечь теорему 3.4. ▷

**3.7. Лемма.** Пусть  $C$  — проективное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Тогда  $\text{qi } C \neq \emptyset$  в том и только в том случае, если  $C$  содержит некоторый параллелотоп.

◁ Достаточность вытекает из следствия 3.6. Покажем необходимость. Можно считать, что  $0 \in \text{qi } C$ . Согласно теореме 1.8 для каждого  $n \in \mathbb{N}$  проекция  $\pi_n C$  является окрестностью нуля в  $\mathbb{R}^n$ , а значит, существуют последовательности элементов  $c_n \in C$  и чисел  $\varepsilon_n > 0$  такие, что

$$\pi_n c_n = \varepsilon_n \pi_n e_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку  $\pi_n c_{n+1} = \pi_n \pi_{n+1} c_{n+1} = \pi_n (\varepsilon_{n+1} \pi_{n+1} e_{n+1}) = 0$ , благодаря предложению 2.8(b) имеется такой проективный оператор  $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ , что  $\Delta e_n = \frac{1}{2^{n+1}} c_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} [\Delta](n, n) &= (\Delta e_n)(n) = \frac{1}{2^{n+1}} c_n(n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (\pi_n c_n)(n) = \frac{1}{2^{n+1}} (\varepsilon_n \pi_n e_n)(n) > 0, \end{aligned}$$

а значит,  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ . Из предложения 2.9(b) следует, что  $D := \Delta^{-1}(C)$  — проективное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , причем  $0 \in D$  и  $2^{n+1} e_n \in D$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Положим  $z := (1, 1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и покажем, что  $z + \Pi_0^1 \subset D$ .

Пусть  $y \in \Pi_0^1$ . Поскольку множество  $D$  проективно, достаточно фиксировать  $n \in \mathbb{N}$  и установить включение  $x := \pi_n(z+y) \in \pi_n D$ . Для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$  имеем  $x(i) = 1 + y(i)$ , где  $|y(i)| < 1$ , и поэтому  $0 < x(i) < 2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= x(1)\pi_n e_1 + x(2)\pi_n e_2 + \dots + x(n)\pi_n e_n \\ &= \frac{x(1)}{4}\pi_n(4e_1) + \frac{x(2)}{8}\pi_n(8e_2) + \dots + \frac{x(n)}{2^{n+1}}\pi_n(2^{n+1}e_n) + \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x(i)}{2^{i+1}}\right)0, \end{aligned}$$

а значит,  $x$  принадлежит  $\pi_n D$  как выпуклая комбинация элементов

$$\pi_n(4e_1), \pi_n(8e_2), \dots, \pi_n(2^{n+1}e_n), 0 \in \pi_n D.$$

Из включения  $z + \Pi_0^1 \subset D$  следует, что множество  $C = \Delta(D)$  содержит параллелотоп  $\Delta z + \Delta(\Pi_0^1)$  (см. теорему 3.4). ▷

В связи с леммой 3.7 возникает естественный вопрос о том, образуют ли параллелотопы «базу квазивнутренности» в следующем смысле: если  $C$  — проективное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $x \in \text{qi } C$ , то содержится ли в  $C$  какой-либо параллелотоп с центром  $x$  или хотя бы параллелотоп, включающий точку  $x$ ? Ответ на этот вопрос приведен ниже в пп. 5.5 и 5.6.

**3.8. Теорема.** Следующие свойства множества  $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  равносильны:

- (а)  $S$  квазиплотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ;
- (б)  $S$  имеет непустое пересечение с любым параллелотопом;
- (с) для любого автоморфизма  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  множество  $\Delta(S)$  коробочно плотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

◁ Эквивалентность (а)  $\Leftrightarrow$  (б) вытекает из предложения 1.11, следствия 3.6 и леммы 3.7.

(б)  $\Rightarrow$  (с). Пусть  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ . Поскольку всякая базовая открытая коробка

$$B = \prod_{n \in \mathbb{N}} ]z(n) - r(n), z(n) + r(n)[$$

(см. (2)) представляет собой параллелотоп  $z + \Pi_0^r$ , по следствию 3.5 множество  $\Delta^{-1}(B)$  — тоже параллелотоп. Тогда из условия (б) следует  $S \cap \Delta^{-1}(B) \neq \emptyset$ , а значит,  $\Delta(S) \cap B \neq \emptyset$ .

(с)  $\Rightarrow$  (б). Согласно теореме 3.4 всякий параллелотоп имеет вид  $z + \Delta(\Pi_0^1)$  для некоторых  $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ . Поскольку  $\Delta^{-1} \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  (см. предложение 2.12(б)) и  $\Delta^{-1}z + \Pi_0^1$  — коробка, из условия (с) следует, что

$$\Delta^{-1}(S) \cap (\Delta^{-1}z + \Pi_0^1) \neq \emptyset,$$

а значит,  $S \cap (z + \Delta(\Pi_0^1)) \neq \emptyset$ . ▷

**3.9. Следствие.** Если  $S$  — квазиплотное подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ , то  $\Delta(S)$  квазиплотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

### § 4. Примеры

В этом параграфе приведены контрпримеры к трем сформулированным в [1] гипотезам — о полярах конусов [1, 9.6], о связи квазиплотности с проективностью [1, 9.7] и о пространствах, в которых все линейно независимые множества замкнуты [1, 9.11].

**4.1.** Если  $X, Y$  — двойственная пара векторных пространств, то для всякого множества  $S \subset X$  определены поляры (см. [1, 3.7])

$$S^\oplus := \{y \in Y : \langle s | y \rangle \geq 0 \text{ для всех } s \in S\};$$

$$S^\boxplus := \{y \in Y : \langle s | y \rangle > 0 \text{ для всех } s \in S \setminus \{0\}\}.$$

Последовательность подмножеств  $S_n \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) называется *индуктивной* (см. [1, 8.1]), если она обладает любым из следующих равносильных свойств:

- (а) существует такое множество  $S \subset \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ , что  $S_n = S \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (б)  $S_n = S_m \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  при  $n \leq m$ ;
- (с)  $S_n = S_{n+1} \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

При этом множество  $S$ , удовлетворяющее условию (а), единственно и равно объединению  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .

**Лемма** [1, 8.3]. Если  $K_n \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то  $(\pi_n K_n)^\boxplus$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) — проективная последовательность и

$$\varprojlim (\pi_n K_n)^\boxplus = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right)^\boxplus.$$

Следующий пример дает отрицательный ответ на вопрос [1, 9.6] о том, проективна ли в этой ситуации последовательность поляр  $(\pi_n K_n)^\oplus$ .

**Пример.** Рассмотрим замкнутый конус  $K_3 := \mathbb{R}^+(\{1\} \times D) \subset \mathbb{R}^3$ , где  $D = \{(y, z) : y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$  (см. рис. 1).

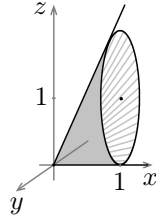


Рис. 1

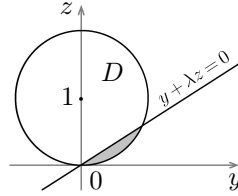


Рис. 2

Положим  $\mathbb{R}_2^3 := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$K_2 := \pi_2(K_3 \cap \mathbb{R}_2^3) = \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

и покажем, что  $K_2^\oplus \neq \pi_2 K_3^\oplus$ . Действительно,  $(0, 1) \in K_2^\oplus$ , но никакая тройка  $(0, 1, \lambda)$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , не принадлежит  $K_3^\oplus$ , так как для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  полуплоскость  $\{(y, z) : y + \lambda z < 0\}$  пересекается с кругом  $D$  (см. рис. 2), и для пары  $(y, z)$  из этого пересечения выполняется  $(1, y, z) \in K_3$  и  $\langle (1, y, z) | (0, 1, \lambda) \rangle = y + \lambda z < 0$ . Таким образом, для  $S := K_3 \times \{(0, 0, \dots)\} \subset \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  последовательность поляр  $(\pi_n(S \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}))^\oplus$  не является проективной.

**4.2.** Согласно предложению 1.11 квазиплотность множества  $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  равносильна каждому из следующих двух условий:

- (а)  $S$  пересекается с любым непустым выпуклым множеством  $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , которое является ограниченным, квазиоткрытым и *проективным*;
- (б)  $S$  пересекается с любым выпуклым множеством  $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , которое имеет непустую квазивнутренность и является *проективным*.

Приведенный ниже пример дает ответ на вопрос [1, 9.7] и показывает, что требование проективности множеств  $B$  и  $C$  в условиях (а) и (б) является существенным даже в случае, когда  $S$  — плотное векторное подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Пример.** Существуют квазиплотное (и поэтому плотное) подпространство  $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и непустое ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество  $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  такие, что  $Y \cap B = \emptyset$ .

◁ Пусть  $T$  — базис трансцендентности  $\mathbb{R}$  над  $\mathbb{Q}$ , т. е. максимальное алгебраически независимое над  $\mathbb{Q}$  подмножество  $\mathbb{R}$  или, что то же самое, алгебраически независимое над  $\mathbb{Q}$  подмножество  $T \subset \mathbb{R}$ , для которого  $\text{alg } \mathbb{Q}(T) = \mathbb{R}$ . (Здесь  $\mathbb{Q}(T)$  — подполе  $\mathbb{R}$ , порожденное множеством  $T$ ,  $\text{alg } F$  — подполе  $\mathbb{R}$ , состоящее из всех чисел, являющихся алгебраическими над подполем  $F \subset \mathbb{R}$ .) Рассмотрим произвольную последовательность  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  попарно различных элементов множества  $T$  и положим  $T_0 := T \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $T_n := T_0 \cup \{t_1, \dots, t_n\}$  и  $F_n := \text{alg } \mathbb{Q}(T_n)$ . Тогда  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность подполей  $\mathbb{R}$ , обладающая следующими свойствами:

- (i)  $F_n \subset F_{n+1}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}$ ;
- (iii) для каждого  $n \in \mathbb{N}$  поле  $\mathbb{R}$  бесконечномерно как векторное пространство над  $F_n$ .

Действительно, благодаря равенству  $\text{alg } \mathbb{Q}(T) = \mathbb{R}$  для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  имеется ненулевой многочлен  $p(x)$  с коэффициентами из  $\mathbb{Q}(T)$ , для которого  $p(\lambda) = 0$ , откуда с учетом очевидных соотношений  $\mathbb{Q}(T_n) \subset \mathbb{Q}(T_{n+1})$  и  $\mathbb{Q}(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(T_n)$

следует, что все коэффициенты многочлена  $p(x)$  принадлежат  $\mathbb{Q}(T_n)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ , и поэтому  $\lambda \in \text{alg } \mathbb{Q}(T_n) = F_n$ . Кроме того, как легко видеть,  $F_n \neq \mathbb{R}$  и для  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus F_n$  числа  $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots$  линейно независимы над  $F_n$ .

Согласно условию (iii) имеется такая последовательность элементов  $x_n \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ , что для каждого  $n \in \mathbb{N}$  числа  $x_n(1), \dots, x_n(n)$  линейно независимы над  $F_n$ , причем  $x_n(n) > 0$ . Рассмотрим автоморфизм  $\nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ , принимающий значения  $\nabla e_n = x_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  (см. предложения 2.8 (а) и 2.10), и положим

$$Y := \nabla'(\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \quad B := \{b \in \Pi_0^1 \cap \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} : b(1) > 0\}.$$

Ясно, что множество  $B$  является непустым, выпуклым, ограниченным и квазиоткрытым (см. теорему 1.8). С помощью предложения 1.11 (d) легко показать, что  $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  — квазиплотное подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Кроме того,  $\nabla' \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$  (см. предложение 2.12 (а)), а значит,  $Y$  квазиплотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (см. следствие 3.9). Плотность пространства  $Y$  в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  вытекает из его квазиплотности согласно предложению 1.10 (см. также предложение 2.9 (с)). Для завершения доказательства достаточно установить равенство  $Y \cap \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} = \{0\}$ .

Покажем, что  $\nabla'z \notin \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$  для любого ненулевого  $z \in \text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ . Пусть

$$z = \sum_{j=1}^k \lambda_j q_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad q_j \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},$$

и пусть  $z(l) \neq 0$  для некоторого  $l \in \mathbb{N}$ . Благодаря условиям (i) и (ii) имеется такое число  $m \geq l$ , что  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F_m$ . Рассмотрим произвольное  $n \geq m$  и покажем, что  $(\nabla'z)(n) \neq 0$ . Действительно, для всех  $i \in \mathbb{N}$  имеем

$$z(i) = \sum_{j=1}^k \lambda_j q_j(i) \in F_m \subset F_n.$$

Тогда  $\langle x_n | z \rangle = \sum_{i=1}^n x_n(i) z(i)$  — линейная комбинация линейно независимых над  $F_n$

чисел  $x_n(1), \dots, x_n(n)$  с коэффициентами  $z(1), \dots, z(n) \in F_n$ , причем эта комбинация нетривиальна, так как  $n \geq l$  и  $z(l) \neq 0$ . Следовательно,  $\langle x_n | z \rangle \neq 0$ . Осталось заметить, что  $\langle x_n | z \rangle = \langle \nabla e_n | z \rangle = \langle e_n | \nabla'z \rangle = (\nabla'z)(n)$ . ▸

**4.3.** В работе [3] приведены примеры собственных плотных векторных подпространств  $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , для которых все линейно независимые множества замкнуты в  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$  (см. [3, 4.8]), и показано, что наличие незамкнутого линейно независимого множества влечет наличие незамкнутого архимедова конуса (см. [3, 4.7]). Вопрос о справедливости обратного утверждения был оставлен открытым и явно сформулирован в [1, 9.11]. Приведенный ниже пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Для числовой последовательности  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и числа  $\lambda$  будем писать  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , если  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  и существует такой номер  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , что  $\lambda_n \neq \lambda$  при  $n \geq \bar{n}$ . Множество  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  условимся называть *разреженным*, если оно обладает следующими равносильными свойствами:

- (а)  $\Lambda$  замкнуто и дискретно;
- (б) все ограниченные подмножества  $\Lambda$  конечны;
- (с) не существуют такая последовательность  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  в  $\Lambda$  и такое число  $\alpha \in \mathbb{R}$ , что  $\lambda_n \rightarrow \alpha$ .

**Лемма.** Для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  множество

$$\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k) := \{\alpha_1 2^{n_1} + \dots + \alpha_k 2^{n_k} : n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

является разреженным.

◁ Воспользуемся индукцией по  $k$ . Разреженность множества  $\Lambda(\alpha) = \{\alpha 2^n : n \in \mathbb{N}\}$  для любого числа  $\alpha$  не вызывает сомнений. Предположим, что для любых чисел  $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$  множество  $\Lambda(\beta_1, \dots, \beta_{k-1})$  является разреженным, рассмотрим произвольные числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  и допустим вопреки доказываемому, что  $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  — не разреженное множество. Тогда существуют последовательности  $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  и число  $\alpha$  такие, что

$$\lambda(n) := \alpha_1 2^{\nu_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n)} \rightarrow \alpha.$$

Текущая цель — обнаружить противоречие.

Заметим, что все последовательности  $\nu_1, \dots, \nu_k$  стремятся к бесконечности. Действительно, если, например,  $\nu_1 \not\rightarrow \infty$ , то  $\nu_1$  имеет постоянную подпоследовательность  $\nu_1(n_m) \equiv i$ . В этом случае

$$\lambda(n_m) = \alpha_1 2^i + \alpha_2 2^{\nu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n_m)} \rightarrow \alpha$$

и тогда

$$\alpha_2 2^{\nu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n_m)} \rightarrow \alpha - \alpha_1 2^i$$

вопреки разреженности множества  $\Lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$ .

Положим  $\mu(n) := \min\{\nu_1(n), \dots, \nu_k(n)\} - 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Тогда

$$\lambda(n) = 2^{\mu(n)} (\alpha_1 2^{\mu_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n)}),$$

где  $\mu_i(n) = \nu_i(n) - \mu(n)$ , причем  $\mu(n) \rightarrow \infty$  и для каждого  $n \in \mathbb{N}$  хотя бы одно из натуральных чисел  $\mu_1(n), \dots, \mu_k(n)$  равно 1. Для определенности будем считать, что последовательность  $\mu_1$  имеет постоянную подпоследовательность  $\mu_1(n_m) \equiv 1$ . В этом случае

$$\lambda(n_m) = 2^{\mu(n_m)} (2\alpha_1 + \alpha_2 2^{\mu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n_m)}) \rightarrow \alpha,$$

откуда с учетом стремления  $\mu(n_m) \rightarrow \infty$  следует, что

$$\alpha_2 2^{\mu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n_m)} \rightarrow -2\alpha_1$$

вопреки разреженности множества  $\Lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$ . ▷

**Пример.** Положим  $Y = \lim_{n \in \mathbb{N}} \prod \{2^{n+m} : m \in \mathbb{N}\}$ . Тогда  $Y$  — плотное подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , и в пространстве  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$  все линейно независимые множества замкнуты, но имеются незамкнутые архимедовы конусы.

◁ Пространство  $Y$  плотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , так как для всех  $m \in \mathbb{N}$

$$e_m = \frac{1}{2^{m+1}} (d + 2^{m+1} e_m) - \frac{1}{2^{m+1}} d \in Y, \quad \text{где } d = (2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Замкнутость всех линейно независимых множеств в  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$  доказывается совершенно аналогично [3, 4.8]. Согласно предложениям 1.11(с) и 1.9 и теореме 1.12(а) для того, чтобы установить наличие в  $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$  незамкнутого архимедова конуса, достаточно показать, что  $Y \cap ]0, 1]^{\mathbb{N}} = \emptyset$ . Каждый элемент  $y \in Y$  имеет вид

$$y(n) = \alpha_1 2^{n+m_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{n+m_k(n)} = 2^n \lambda(n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $m_1(n), \dots, m_k(n) \in \mathbb{N}$  и

$$\lambda(n) = \alpha_1 2^{m_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{m_k(n)} \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Если  $y \in ]0, 1]^{\mathbb{N}}$ , т. е.  $0 < 2^n \lambda(n) < 1$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\lambda(n) \rightarrow 0$ , что противоречит разреженности множества  $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ . ▷

§ 5. Квазиплотность и топологическая плотность

В этом параграфе в качестве ответа на вопрос [1, 9.9] установлено, что квазиплотность в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  не равносильна плотности относительно коробочной топологии, а также приведены примеры, относящихся к вопросу [1, 9.10] о топологическом характере квазиплотности и показывающие, что параллелотопы не образуют базу какой-либо топологии и не характеризуют квазиплотность в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  как топологическую. Кроме того, дан отрицательный ответ на сформулированный в п. 3.7 вопрос о том, образуют ли параллелотопы базу квазивнутренности.

**5.1. Лемма.** Существует такая последовательность  $\varkappa \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ , что

$$\Pi_{\varkappa}^1 \cap \Pi_0^1 = \{0\}.$$

В частности, если  $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $z \notin Y$ , то  $Y \cap (z + \Pi_{\varkappa}^1) \cap (z + \Pi_0^1) = \emptyset$ .

◁ Пусть  $(N_m)_{m \in \mathbb{N}}$  — какое-либо разбиение  $\mathbb{N}$  на бесконечные подмножества  $N_m \subset \mathbb{N}$ . Определим последовательность  $\varkappa \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ , полагая  $\varkappa_n = n\pi_n e_m$  при  $n \in N_m$ . Рассмотрим произвольный элемент  $y \in \Pi_{\varkappa}^1$ , имеющий ненулевое значение  $y(m) \neq 0$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ , и покажем, что  $y \notin \Pi_0^1$ . Действительно, если  $n \in N_m$  и  $n \geq m$ , то

$$\langle \varkappa_n | \pi_n y \rangle = \langle n\pi_n e_m | \pi_n y \rangle = ny(m),$$

а значит, в силу включения  $y \in \Pi_{\varkappa}^1$  для таких  $n$  справедливо неравенство

$$|y(n+1) - ny(m)| = |y(n+1) - \langle \varkappa_n | \pi_n y \rangle| < 1$$

и, в частности,  $|y(n+1)| > n|y(m)| - 1$ . Следовательно,  $\sup_{n \in N_m} |y(n+1)| = \infty$ . ▷

**5.2.** Согласно теореме 3.8 всякое квазиплотное подмножество  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  коробочно плотно (см. также предложения 1.9 и 1.11 (с)). Как показывает следующий пример, обратное утверждение неверно даже для плотных векторных подпространств  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , что дает отрицательный ответ на вопрос [1, 9.9].

**Пример.** Существует плотное подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , являющееся коробочно плотным, но не квазиплотным в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

◁ Пусть  $Z$  — коробочно плотное подпространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , не содержащее  $\ell^\infty$  и имеющее плотное в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  пересечение  $Z \cap \ell^\infty$ . (На роль  $Z$  подходит, например,  $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ .) Согласно лемме 5.1 имеется параллелотоп  $P$  с центром в нуле такой, что  $P \cap \Pi_0^1 = \{0\}$ . Используя абсолютную выпуклость  $P$ , легко показать, что  $(\text{lin } P) \cap \ell^\infty = \{0\}$ . Положим  $Y_0 := Z \cap \ell^\infty + \text{lin } P$  и рассмотрим произвольный элемент  $b \in \ell^\infty$ , не принадлежащий  $Z$ . Как легко видеть,  $b \notin Y_0$  и поэтому имеется подпространство  $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  коразмерности 1 такое, что  $Y_0 \subset Y$  и  $b \notin Y$ . Поскольку  $Z \cap \ell^\infty \subset Y$ , пространство  $Y$  плотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Кроме того, из соотношений  $P \subset Y$  и  $b \notin Y$  следует  $Y \cap (b + P) = \emptyset$ , а значит, согласно теореме 3.8 пространство  $Y$  не квазиплотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Остается показать, что  $Y$  коробочно плотно в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Рассмотрим произвольные последовательности  $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $r \in ]0, \infty[^{\mathbb{N}}$  и докажем, что  $Y \cap (s + \Pi_0^r) \neq \emptyset$ . Можно считать, что  $r \in \ell^\infty$ , т.е.  $\Pi_0^r \subset \ell^\infty$ . Поскольку  $\text{codim } Y = 1$ , существует такое число  $\alpha \in \mathbb{R}$ , что  $s - \alpha r \in Y$ . Благодаря коробочной плотности  $Z$  в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  имеется элемент  $z \in Z \cap (\alpha r + \Pi_0^r)$ . Включение  $\alpha r + \Pi_0^r \subset \ell^\infty$  влечет  $z \in Z \cap \ell^\infty \subset Y$ . Кроме того,  $z + s - \alpha r \in s + \Pi_0^r$ . Следовательно,  $z + s - \alpha r \in Y \cap (s + \Pi_0^r)$ . ▷



**5.3.** Из леммы 5.1 следует, что параллелотопы не образуют базу какой-либо топологии. Несмотря на то, что любое квазиплотное подпространство  $Y \subset \mathbb{R}^N$  пересекается с каждым параллелотопом, в случае  $Y \neq \mathbb{R}^N$  найдутся два таких параллелотопа  $P$  и  $Q$  с общим центром, что

$$Y \cap P \cap Q = \emptyset.$$

В частности, критерии 1.11 и 3.8 не характеризуют квазиплотность в  $\mathbb{R}^N$  как топологическую плотность даже для векторных подпространств. Это наблюдение тем не менее не дает ответа на вопрос [1, 9.10] о том, существует ли топология на  $\mathbb{R}^N$ , плотность относительно которой была бы равносильна квазиплотности в  $\mathbb{R}^N$ .

**5.4.** В дальнейшем каждое из пространств  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) наделяется евклидовой нормой  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ . Для  $S \subset \mathbb{R}^n$  положим  $\|S\| := \sup_{s \in S} \|s\|$ . Символом  $0_n$  обозначим нулевой элемент  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Если  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то кортеж  $(x(1), \dots, x(n), \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$  условимся записывать в виде  $(x, \lambda)$ . В частности,

$$(0_n, \lambda) = (0, \dots, 0, \lambda) = \lambda \pi_{n+1} e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

**Лемма.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C$  — ограниченное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \in \text{int } C$  и  $\lambda > 0$ . Определим подмножества  $D, D^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , полагая

$$D := \text{co}(C \times \{-1\} \cup \{(0_n, \lambda)\}), \quad D^+ := \{d \in D : d(n+1) \geq 0\}.$$

Тогда

- (a)  $0 \in \text{int } D$ ;
- (b)  $D \cap -D \subset D^+ \cup -D^+$ ;
- (c)  $\|D \cap -D\| \leq \|D^+\| = \max\{\lambda, \frac{\lambda}{\lambda+1} \|C\|\}$ ;
- (d)  $\pi_n D = C$ .

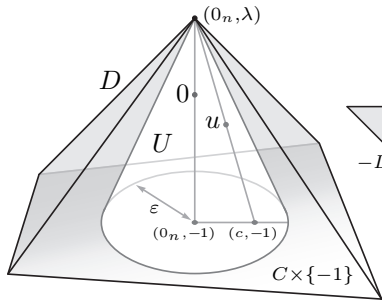


Рис. 3а

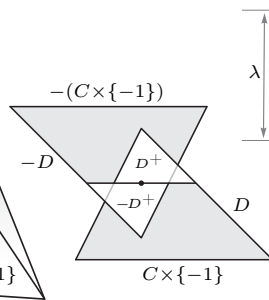


Рис. 3б

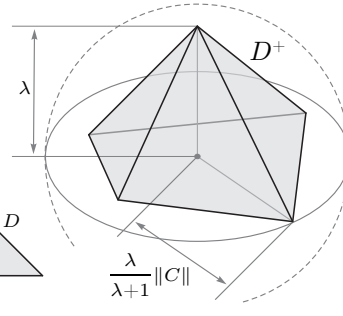


Рис. 3с

◁ (a) По условию множество  $C$  содержит некоторый шар  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Элементарная проверка показывает, что открытая окрестность нуля

$$U := \left\{ u \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\|\pi_n u\|}{\varepsilon} + \frac{u(n+1) + 1}{\lambda + 1} < 1, u(n+1) > -1 \right\}$$

содержится в  $D$ . Действительно, если  $u \in U$  и

$$c := \frac{\lambda + 1}{\lambda - u(n+1)} \pi_n u,$$

то  $\|c\| < \varepsilon$  и вектор  $u$  принадлежит отрезку  $[(c, -1), (0_n, \lambda)]$  (см. рис. 3а). Остальные соотношения тривиальны (см. рис. 3б и 3с). ▷

**5.5.** Если  $x$  — квазивнутренняя точка проективного выпуклого множества  $C \subset \mathbb{R}^N$ , то в связи с леммой 3.7 можно было бы ожидать, что в  $C$  содержится параллелотоп с центром  $x$ . Тем не менее доказательство леммы 3.7 обеспечивает лишь наличие параллелотопа  $P \subset C$ , центр которого отличен от  $x$  и, более того,  $x \notin P$ . Следующий пример показывает, что это обстоятельство является существенным.

**Пример.** Существует такое проективное выпуклое подмножество  $C \subset \mathbb{R}^N$ , что  $0 \in \text{qi } C$ , но  $C$  не содержит параллелотов с центром в нуле.

◁ Рассмотрим последовательность множеств  $C_n \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), определенную следующим рекурсивным построением (см. рис. 4):

$$C_1 := [-1, 1],$$

$$C_{n+1} := \text{co}(C_n \times \{-1\} \cup \{(0_n, \lambda_n)\}),$$

где числа  $\lambda_n > 0$  выбираются исходя из условия  $\max\{\lambda_n, \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|C_n\|\} \leq \frac{1}{n}$ .

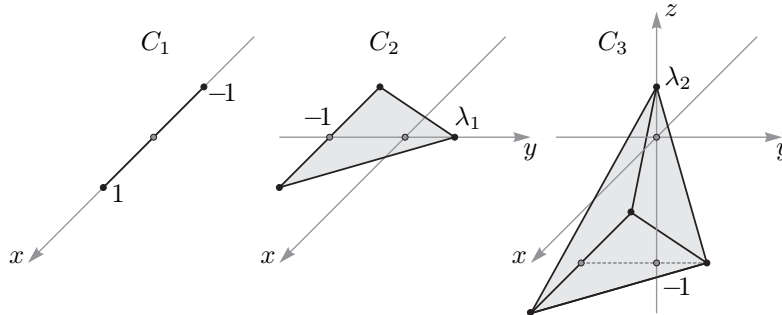


Рис. 4

Согласно лемме 5.4 выпуклые множества  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  образуют проективную последовательность, причем  $0 \in \text{int } C_n$  и  $\|C_n \cap -C_n\| \leq \frac{1}{n}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Положим  $C := \varprojlim C_n$ . Из теоремы 1.8 следует, что  $0 \in \text{qi } C$ . С другой стороны, если бы множество  $C$  содержало какой-либо параллелотоп с центром в нуле, то нашлся бы такой элемент  $c \in C \cap -C$ , что  $c(1) \neq 0$ , и тогда для всех  $n \in \mathbb{N}$  имели бы место противоречивые соотношения

$$|c(1)| \leq \|\pi_n c\| \leq \|\pi_n(C \cap -C)\| = \|C_n \cap -C_n\| \leq \frac{1}{n}. \triangleright$$

**5.6.** Усилим предыдущий пример и покажем, что в рассматриваемом случае точка  $0 \in \text{qi } C$  не принадлежит никакому параллелотопу, содержащемуся в  $C$ .

**Лемма.** Пусть  $P \subset \mathbb{R}^N$  — параллелотоп и  $x \in P$ . Тогда имеется параллелотоп  $P_x$  с центром  $x$  такой, что  $P_x \subset P$ .

◁ По теореме 3.4 существуют  $z \in \mathbb{R}^N$  и  $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$  такие, что  $P = z + \Delta(\Pi_0^1)$ . Как легко видеть,  $y := \Delta^{-1}(x - z) \in \Pi_0^1$ . Определим  $r \in ]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ , полагая  $r(n) := 1 - |y(n)|$ . Тогда  $y + \Pi_0^r \subset \Pi_0^1$  и, следовательно,

$$P_x := x + \Delta(\Pi_0^r) = z + \Delta y + \Delta(\Pi_0^r) = z + \Delta(y + \Pi_0^r) \subset z + \Delta(\Pi_0^1) = P. \triangleright$$

**Следствие.** Если множество  $C$  не содержит параллелотов с центром  $x$ , то  $C$  не содержит и таких параллелотов  $P$ , что  $x \in P$ .

Таким образом, всякое проективное выпуклое множество  $C \subset \mathbb{R}^N$  с непустой квазивнутренностью содержит некоторый параллелотоп, но такие параллелотопы не всегда покрывают квазивнутренность  $C$ .

**5.7.** Говорят, что выпуклое множество  $C \subset X$  *квазилокально ограничено* в точке  $x \in \text{qi} C$ , если  $x \in \text{qi} B$  для некоторого ограниченного подмножества  $B \subset C$ . Пространство  $X$  называют *квазилокально ограниченным*, если в  $X$  любое выпуклое множество  $C$  квазилокально ограничено в каждой точке  $x \in \text{qi} C$  (см. [1, § 5]).

Согласно теореме [1, 5.10] пространство  $\mathbb{R}^N$  является квазилокально ограниченным, но из п. 5.6 следует, что параллелотопы не образуют «базу квазилокальной ограниченности»: если  $x$  — квазивнутренняя точка выпуклого множества  $C \subset \mathbb{R}^N$ , то  $x \in \text{qi} B$  для некоторого ограниченного подмножества  $B \subset C$ , но среди таких множеств  $B$  может не найтись ни одного параллелотопа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.
2. Wilansky A. Modern methods in topological vector spaces. New York: McGraw-Hill, 1978.
3. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.

*Поступила в редакцию 24 декабря 2023 г.*

*После обработки 24 декабря 2023 г.*

*Принята к публикации 28 января 2024 г.*

Гутман Александр Ефимович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
gutman@math.nsc.ru

Емельяненко Иван Александрович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
i.emelianenkov@yandex.ru