Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2024. Том 65, № 2

УДК 519.17

ЛЕГКИЕ 3–ЦЕПИ В 3–МНОГОГРАННИКАХ БЕЗ СМЕЖНЫХ 3–ГРАНЕЙ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Пусть w_k — максимум минимальной суммы степеней вершин (веса) в k-вершинных цепях (k-цепях) 3-многогранников. Очевидно, что каждый 3-многогранник содержит вершину степени не больше 5, так что $w_1 \leq 5$. Еще в 1955 г. Коциг доказал, что $w_2 \leq 13$ (т. е. найдется ребро веса не больше 13), причем оценка точна.

В 1993 г. Андо, Ивасаки и Канеко доказали, что $w_3 \leq 21$, и эта оценка также неулучшаема ввиду конструкции Йендроля, найденной в 1997 г. В 1997 г. О. В. Бородин уточнил этот результат, показав, что $w_3 \leq 18$ верно для всех 3-многогранников с $w_2 \geq 7$, но для 3-многогранников с $w_2 \geq 8$ имеет место более сильная оценка $w_3 \leq 17$, причем неулучшаемость 18 была подтверждена О. В. Бородиным и др. в 2013 г, а неулучшаемость 17 была известна давно.

За последние три десятилетия большое число работ было посвящено задачам раскраски и структурным задачам на плоских графах, разреженных в том или ином смысле.

В данной статье рассматриваются 3-многогранники без смежных 3-циклов, т. е. не имеющие хордальных 4-циклов (иначе говоря, без $K_4 - e$). Известно, что для таких 3-многогранников $w_1 \leq 4$ и, более того, $w_2 \leq 9$, где обе оценки точны (Бородин, 1992).

Доказано, что всякий 3-многогранник без хордальных 4-циклов содержит 3-цепь веса не более 15, т. е. $w_3 \leq 15$, и эта оценка неулучшаема.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.202

Ключевые слова: плоский граф, 3-многогранник, разреженный 3-многогранник, структурные свойства, 3-цепь, вес.

1. Введение

Степень $d(x)$ вершины или грани x в 3-многограннике P есть число инцидентных ребер. Под *k-вершиной* (*k-гранью*) понимается вершина (грань) степени k, *k^+-вершина* имеет степень не меньше k, и т. д.

Цепь на k вершинах называется *k-цепью.* Цепь uvw есть *(i,j,k)-цепь*, если $d(u) \leq i$, $d(v) \leq j$ и $d(w) \leq k$. *Вес* $w(H)$ подграфа H в P есть сумма степеней вершин из H в P. Будем опускать аргументы функций, когда они понятны из контекста. Через $\mathbf{P}_\delta$ обозначим класс 3-многогранников с минимальной степенью вершин δ; в частности, $\mathbf{P}_3$ есть множество всех 3-многогранников.

Пусть w_k — максимум минимальной суммы степеней вершин (веса) в k-вершинных цепях 3-многогранников из $\mathbf{P}_\delta$.

Работа О. В. Бородина (постановка задачи, доказательство) поддержана Министерством науки и высшего образования России (проект FWNF-2022-0017). Работа А. О. Ивановой (детали доказательства, конструкция) поддержана Министерством науки и высшего образования России, соглашение № 075-02-2023-947 от 16 февраля 2023 г.

В 1904 г. Вернике [1] доказал, что если $P_5 \in \mathbf{P}_5$, то P_5 содержит 5-вершину, смежную с 6^--вершиной, т. е. $w_2 \leq 11$, причем оценка точна. Этот результат был усилен Франклином [2] в 1922 г., доказавшим существование $(6, 5, 6)$-цепи в любом P_5, так что $w_3 \leq 17$ в $\mathbf{P}_5$, и эта оценка неулучшаема. В 2016 г. О. В. Бородин и А. О. Иванова [3] доказали, что имеется также и $(5, 6, 6)$-цепь, а других точных описаний 3-цепей в $\mathbf{P}_5$ не существует.

Теорема Франклина [2] является основополагающей в структурной теории плоских графов; она была обобщена или уточнена в нескольких направлениях (см., например, [4–13] и обзоры Йендроля, Фосса [14], О. В. Бородина, А. О. Ивановой [15] и Кренстона, Веста [16]).

Очевидно, что каждый 3-многогранник, т. е. из $\mathbf{P}_3$, содержит вершину степени не больше 5, так что $w_1 \leq 5$. Еще в 1955 г. Коциг [17] доказал, что $w_2 \leq 13$ (другими словами, что найдется ребро веса не больше 13), причем оценка точна.

В 1993 г. Андо, Ивасаки и Канеко [18] доказали, что $w_3 \leq 21$, и эта оценка также неулучшаема ввиду конструкции Йендроля [8], найденной в 1997 г. В 1997 г. О. В. Бородин [19] уточнил этот результат, показав, что $w_3 \leq 18$ верно для всех 3-многогранников с $w_2 \geq 7$, но для 3-многогранников с $w_2 \geq 8$ имеет место более сильная оценка $w_3 \leq 17$, причем неулучшаемость 18 была подтверждена О. В. Бородиным и др. [20] в 2013 г., а неулучшаемость 17 была известна давно.

За последние три десятилетия большое число работ было посвящено задачам раскраски и структурным задачам на плоских графах, разреженных в том или ином смысле. В частности, новые результаты о строении плоских графов с минимальной степенью 3 и 4 без смежных 3-циклов при различных дополнительных предположениях находят применение в 3-раскраске (как правильной, так и неправильной), предписанной 3- и 4-раскрасках, а также в недавно введенных 3- и 4-DP-раскрасках (такую информацию можно найти в ссылках на выдающуюся статью Дворжака, Постля [21]).

В данной статье рассматриваются наиболее плотные среди разреженных плоских графов, а именно, класс $\mathbf{P}_3^{TT}$ 3-многогранников без $K_4 - e$ (иначе говоря, не имеющих двух 3-циклов с общим ребром). Известно еще с 1992 г., что такие 3-многогранники имеют $w_1 \leq 4$ и, более того, $w_2 \leq 9$, где обе оценки точны [22], откуда следует, в частности, что $\mathbf{P}_5^{TT} = \varnothing$.

Цель данной статьи — доказать, что все 3-многогранники из $\mathbf{P}_3^{TT}$ имеют $w_3 \leq 15$ и эта оценка неулучшаема.

Теорема 1. *Всякий 3-многогранник без хордальных 4-циклов содержит 3-цепь веса не более 15, причем оценка неулучшаема.*

2. Доказательство теоремы 1

На рис. 1 показано, как преобразовать додекаэдр в 3-многогранник без хордальных 4-циклов такой, что каждая его 3-цепь имеет вес не менее 15.

2.1. Перераспределение зарядов на контрпримере к $w_3 \leq 15$. Предположим, что 3-многогранник P имеет все 3-цепи веса не менее 16. По ходу доказательства будем сокращать утверждение «поскольку P не содержит (a, b, c)-цепей» до «ввиду не-(a, b, c)!». В дальнейшем через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ будем обозначать соседние с вершиной v вершины в циклическом порядке.

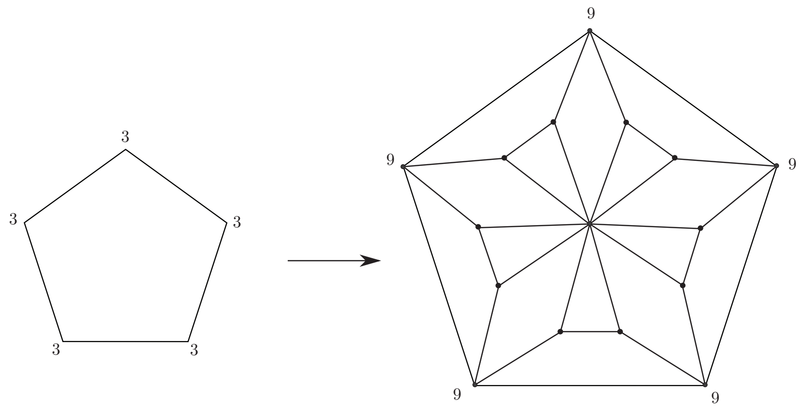

Рис. 1. Преобразование додекаэдра в 3-многогранник со всеми 3-цепями веса не менее 15, не содержащий хордальных C_4.

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для P, где V, E, F суть множества вершин, ребер и граней в P соответственно, можно переписать в виде

$$\sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) = -8. \tag{1}$$

Каждая вершина или грань $x \in V \cup F$ имеет *начальный заряд* $\mu(x) = d(x) - 4$. Используя свойства 3-многогранника P как контрпримера, мы зададим локальное перераспределение зарядов μ, сохраняющее их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ будет неотрицательным для всех $x \in V \cup F$. Это даст противоречие с тем фактом, что сумма новых зарядов согласно (1) равна -8.

Правила перераспределения зарядов такие (рис. 2).

R1. *Каждая* 5^+*-грань дает* $\frac{1}{3}$ *каждой инцидентной* 3*-вершине.*

R2. *Каждая* d*-вершина при* $d = 5 \vee 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9$ *дает* $\frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} \vee \frac{3}{4} \vee \frac{4}{5} \vee 1$ *соответственно каждой смежной* 3*-вершине.*

R3. *Каждая* d*-вершина при* $d = 5 \vee 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9$ *дает* $\frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} \vee \frac{3}{4} \vee \frac{4}{5} \vee 1$ *соответственно каждой инцидентной* 3*-грани за следующим исключением:*

(ex) *если* 8*-вершина* v *лежит в общей* 3*-грани* f *с двумя* 4*-вершинами, то* v *дает* 1 *грани* f *вместо* $\frac{4}{5}$.

R4. *Пусть* 10^+*-вершина* v *смежна с* 3*-вершиной* w *по ребру, инцидентному двум* 4^+*-граням. Тогда* v *дает* $\frac{3}{5}$ *вершине* w *за следующим исключением:*

(ex) *если имеется* 4*-грань* $vwxv_1$ *с* $d(v_1) \geq 8$*, то* v *вместо этого дает* $\frac{9}{10}$ *вершине* w.

R5. *Каждая* 10^+*-вершина* v*, лежащая в* 3*-грани* $f = vv_1v_2$*, дает на* f*:*

(a) 1*, если* $d(v_1) \leq 4$ *и* $d(v_2) \leq 5$*,*

(b) $\frac{1}{2}$*, если* $d(v_1) \leq 4$ *и* $d(v_2) \geq 6$*, или*

(c) $\frac{1}{3}$*, если* $d(v_1) \geq 5$ *и* $d(v_2) \geq 5$.

R6. *Если* 10^+*-вершина* v *лежит в общей* 3*-грани* $f = vv_1v_2$ *с* 3*-вершиной* v_1*, то* v *дает на* v_1*:*

(a) $\frac{1}{10}$ *при* $d(v_2) = 3$*,*

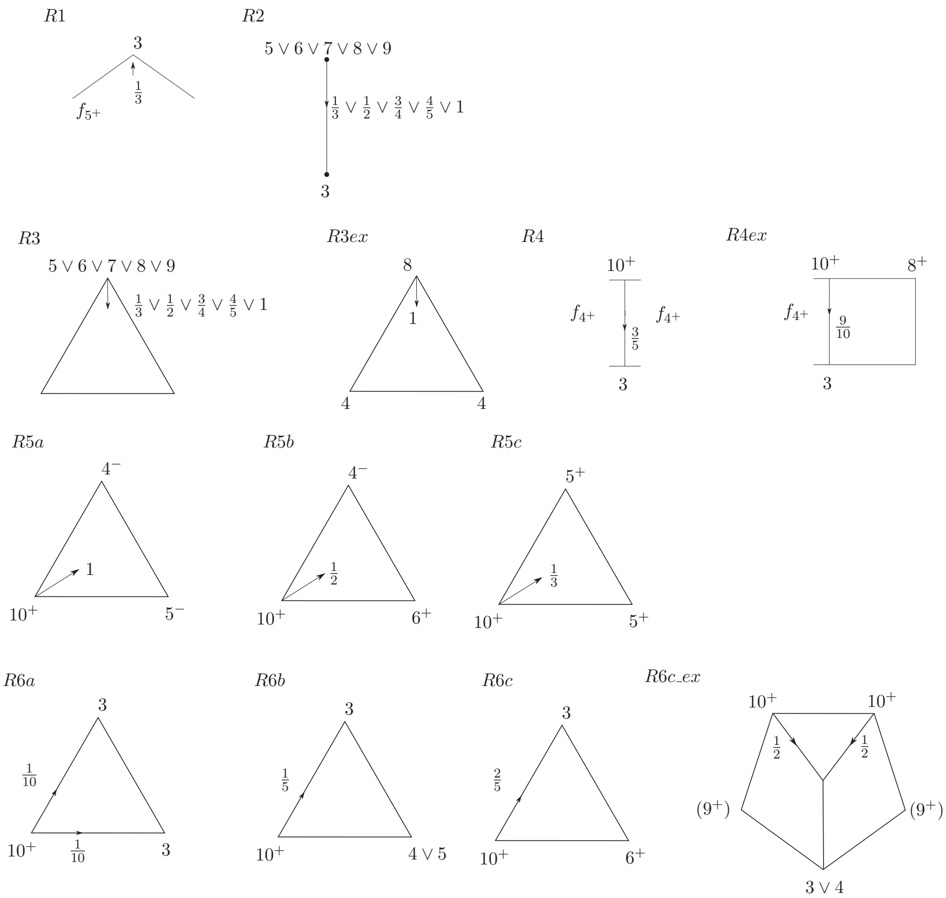

Рис. 2. Правила перераспределения зарядов.

(b) $\frac{1}{5}$ *при* $4 \le d(v_2) \le 5$, *или*

(c) $\frac{2}{5}$ *при* $d(v_2) \ge 6$ *за следующим исключением:*

(c_ex) *если* $d(v_2) \ge 10$, *а* v_1 *инцидентна двум 4-граням и смежна с* 4^-*-вершиной, то* v_1 *получает* $\frac{1}{2}$ *от каждой из вершин* v *и* v_2.

2.2. Проверка того, что $\mu'(x) \ge 0$ при всех $x \in V \cup F$. Для 5^+-грани f имеем $\mu'(f) = d(f) - 4 - \frac{1}{3} \times \lfloor \frac{2d(f)}{3} \rfloor \le d(f) - 4 - \frac{1}{3} \times \frac{2d(f)}{3} = \frac{7d(f)-36}{9}$ по правилу R1 ввиду не-$(3,3,3)$!. Если $d(f) \ge 6$, то отсюда уже $\mu'(f) > 0$, а при $d(f) = 5$ имеется не более трех 3-вершин при грани f, откуда $\mu'(f) = 5 - 4 - \frac{1}{3} \times 3 = 0$.

Если f есть 4-грань, то она не участвует в перераспределении зарядов, а значит, $\mu'(f) = \mu(f) = 4 - 4 = 0$.

Пусть 3-грань $f = vv_1v_2$ имеет $d(v) \ge d(v_1) \ge d(v_2)$. Если $d(v_2) \ge 5$, то $\mu'(f) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$ по правилу R3 в сочетании с R5c, так что можем дальше предполагать, что $d(v_2) \le 4$. Теперь если $d(v_1) \ge 6$, то $\mu'(f) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3 и R5b.

При $d(v_1) \le 5$ имеем $d(v) \ge 7$ согласно не-$(4,5,6)$!. Если же $d(v) \ge 9$, то $\mu'(f) = -1 + 1 = 0$ по R3 и R5a. Далее пусть $d(v) = 8$; если $d(v_1) = 5$, то $\mu'(f) = -1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} > 0$ согласно R3. Остается допустить, что $d(v_1) \le 4$, откуда следует ввиду не-$(3,4,8)!$, что $d(v_1)=d(v_2)=4$, а значит, $\mu'(f)=-1+1=0$ по R3ex, что и требовалось.

Наконец, если $d(v)=7$, то $d(v_1)=5$ и $d(v_2)=4$ ввиду не-(3, 5, 7)! в сочетании с не-(4,4, 7)!, поэтому $\mu'(f)=-1+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}>0$ согласно R3.

Теперь рассмотрим вершину v.

Случай 1: $d(v)=3$. Пусть сначала v не смежна с 10^+-вершинами; тогда у нее есть не меньше двух 7^+-соседей ввиду не-$(3,6,6)!$ Значит, v получает не менее $\frac{3}{4}$ от каждого из них по R2, а следовательно, $\mu'(v)\geq 3-4+2\times\frac{3}{4}>0$.

Теперь пусть имеется 10^+-сосед v_1, а v_2 и v_3 — две другие соседние с v вершины.

Подслучай 1.1: v_1 — единственный 10^+-сосед; тогда правило R6a не применимо к v_1 ввиду не-$(3,3,9)!$, и можно считать, что $d(v_2)\geq 7$ ввиду симметрии в сочетании с не-$(3,6,6)!$. Если $d(v_2)=9$, то $\mu'(v)\geq -1+1=0$ по R2. Если $d(v_2)=8$, то $\mu'(v)\geq -1+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}>0$ по R2 и ввиду отсутствия $(3,4,8)$-цепей. Наконец, если $d(v_2)=7$, то $\mu'(v)\geq -1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}>0$ по R2 и не-$(3,5,7)!$.

Подслучай 1.2: у v не менее двух 10^+-соседей. Если найдется три 10^+-соседа, то $\mu'(v)\geq -1+3\times\frac{2}{5}>0$ согласно R6c. Если имеются в точности два 10^+-соседа, v_1 и v_2 (а $d(v_3)\leq 9$), то возможны два случая.

Пусть сначала при v нет 3-граней. Тогда $\mu'(v)\geq -1+2\times\frac{3}{5}>0$ по R4, что и требовалось доказать. Далее пусть v инцидентна 3-грани f. Вспомним, что v инцидентна лишь одной 3-грани ввиду отсутствия хордальных 4-циклов.

Подслучай 1.2.1: $f=v_1vv_2$. Если при v имеется 5^+-грань, то $\mu'(v)\geq -1+\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{5}>0$ по R1 и R6c.

Теперь пусть $v_1vv_3\ldots$ и $v_2vv_3\ldots$ — две 4-грани при v. Если $d(v_3)\geq 5$, то $\mu'(v)\geq -1+\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{5}>0$ по R2 и R6c. Если же $3\leq d(v_3)\leq 4$, то $\mu'(v)\geq -1+2\times\frac{1}{2}=0$ по R6c_ex.

Подслучай 1.2.2: $f=v_1vv_3$. Если при v имеется 5^+-грань, то $\mu'(v)\geq -1+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{10}>0$ по R1, R4 и одному из пунктов правила R6.

Пусть $v_1vv_2\ldots$ и v_2vv_3x — 4-грани при v. Если $5\leq d(v_3)\leq 9$, то $\mu'(v)\geq -1+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}>0$ по R2, R4 в сочетании с R6b или R6c. Наконец, если $3\leq d(v_3)\leq 4$, то $d(x)\geq 9$ ввиду $(3,4,9)!$, откуда $\mu'(v)\geq -1+\frac{9}{10}+\frac{1}{5}>0$ по R4ex и R6b.

Случай 2: $d(v)=4$. Поскольку v не участвует в перераспределении зарядов, имеем $\mu'(v)=\mu(v)=4-4=0$.

Случай 3: $5\leq d(v)\leq 9$. Заметим, что у v не более одного 3-соседа ввиду не-$(3,3,9)!$ и не более $\lceil\frac{d(v)}{2}\rceil$ инцидентных 3-граней из-за отсутствия хордальных 4-циклов в P.

При $d(v)$, равном 5, 6 и 7, отсюда следует согласно R2 и R3, что $\mu'(v)=5-4-(1+2)\times\frac{1}{3}=0$, $\mu'(v)=6-4-(1+3)\times\frac{1}{2}=0$ и $\mu'(v)=7-4-(1+3)\times\frac{3}{4}=0$ соответственно.

Далее пусть $d(v)=8$. Если у v есть 3-сосед, то у v нет 4-соседа ввиду не-$(3,4,8)!$, поэтому R3ex неприменимо к v, а значит, $\mu'(v)\geq 8-4-(1+4)\times\frac{4}{5}=0$ по R2 и основной части правила R3. В противном случае $\mu'(v)\geq 8-4-4\times 1=0$ по R3 и R3ex.

Наконец, $d(v) = 9$ влечет $\mu'(v) \geq 9 - 4 - (1+4) \times 1 = 0$ согласно R2 и R3.

Случай 4. $d(v) \geq 10$. Для оценки суммарной передачи зарядов вершиной v смежным 3-вершинам по R4 и R6 и инцидентным 3-граням по R5 удобно распределить эти передачи по инцидентным v ребрам так, чтобы каждое инцидентное ребро забирало не более $\frac{3}{5}$ от v. Действительно, тем самым мы докажем, что $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - d(v) \times \frac{3}{5} = \frac{2(d(v)-10)}{5} \geq 0$.

С этой целью применим следующие продолжения $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$, $\overrightarrow{\mathrm{R5}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{R6c\_ex}}$ к правилам R4ex, R5 и R6c_ex соответственно (см. рис. 3), где в нескольких случаях 10^+-вершина позволяет себе давать 3-грани даже больше в $\overrightarrow{\mathrm{R5}}$, чем предписано правилом R5:

$\overrightarrow{\mathbf{R4ex}}$. *Пусть 10^+-вершина v смежна с 3-вершиной w по ребру, инцидентному двум 4^+-граням, (по меньшей мере) одна из которых есть 4-грань $vwxv_1$ с $d(v_1) \geq 8$; тогда v переключает $\frac{3}{10}$ на ребро vv_1 из заряда $\frac{9}{10}$, даваемого w согласно R4ex.*

$\overrightarrow{\mathbf{R5}}$. *Каждая 10^+-вершина v, лежащая в 3-грани $f = vv_1v_2$, переключает ребрам vv_1 и vv_2 следующие порции заряда, даваемого грани f согласно R5:*

($a1$) $\frac{1}{2}$ каждому из vv_1 и vv_2, если $d(v_1) = d(v_2) = 3$,
($a2$) $\frac{2}{5}$ на vv_1 и $\frac{3}{5}$ на vv_2, если $d(v_1) = 3$, а $4 \leq d(v_2) \leq 5$,
($a3$) $\frac{3}{5}$ каждому из vv_1 и vv_2, если $d(v_1) = 4$, а $4 \leq d(v_2) \leq 5$,
($b1$) $\frac{1}{5}$ на vv_1 и $\frac{3}{10}$ на vv_2, если $d(v_1) = 3$, а $d(v_2) \geq 6$,
($b2$) $\frac{1}{5}$ на vv_1 и $\frac{3}{10}$ на vv_2, если $d(v_1) = 4$, а $d(v_2) \geq 6$,
(c) $\frac{3}{10}$ на каждое из vv_1 и vv_2, если $d(v_1) \geq 5$ и $d(v_2) \geq 5$.

$\overrightarrow{\mathbf{R6c\_ex}}$. Если 10^+-вершина v лежит в общей 3-грани $f = vv_1v_2$ с 3-вершиной v_1 и 10^+-вершиной v_2, а v_1 смежна с 4^--вершиной w, которая инцидентна двум 4-граням по ребру v_1w, то v переключает $\frac{3}{10}$ на ребро vv_2, а также на ребро, ведущее в 9^+-вершину z в грани vv_1wz.

Лемма 2. *После применения правил* R4–R6, $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$, $\overrightarrow{\mathrm{R5}}$ *и* $\overrightarrow{\mathrm{R6\_ex}}$ *каждая 10^+-вершина посылает неположительный заряд граням и не более $\frac{3}{5}$ каждой смежной вершине.*

Доказательство. Пусть $d(v) \geq 10$. Заметим, что согласно $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$, $\overrightarrow{\mathrm{R5}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{R6c\_ex}}$ ни одно ребро из вершины v в 7^--вершину v_1 не получает дополнительного заряда через 4^+-грань.

Кроме того, при $d(v_1) \geq 6$ видно из $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$, $\overrightarrow{\mathrm{R5b}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{R5c}}$ совместно с $\overrightarrow{\mathrm{R6c\_ex}}$, что ребро vv_1 в итоге забирает от v не более $2 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$.

При $4 \leq d(v_1) \leq 5$ ребро vv_1 получает не более $\frac{3}{5}$ от (единственной) инцидентной 3-грани, что происходит согласно $\overrightarrow{\mathrm{R5a2}}$, $\overrightarrow{\mathrm{R5a3}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{R5c}}$.

В дальнейшем будем считать, что $d(v_1) = 3$.

Случай 1: вершина v смежна с v_1 по ребру, не инцидентному 3-граням. Если к ребру vv_1 применимо основное правило R4, а не исключение из него R4ex, то vv_1 не получает ничего по $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{R5}}$, а значит, по-прежнему проводит $\frac{3}{5}$ от v.

В противном случае $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$ применимо к vv_1 хотя бы один раз и тогда это ребро проводит не более $\frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$, что и требовалось.

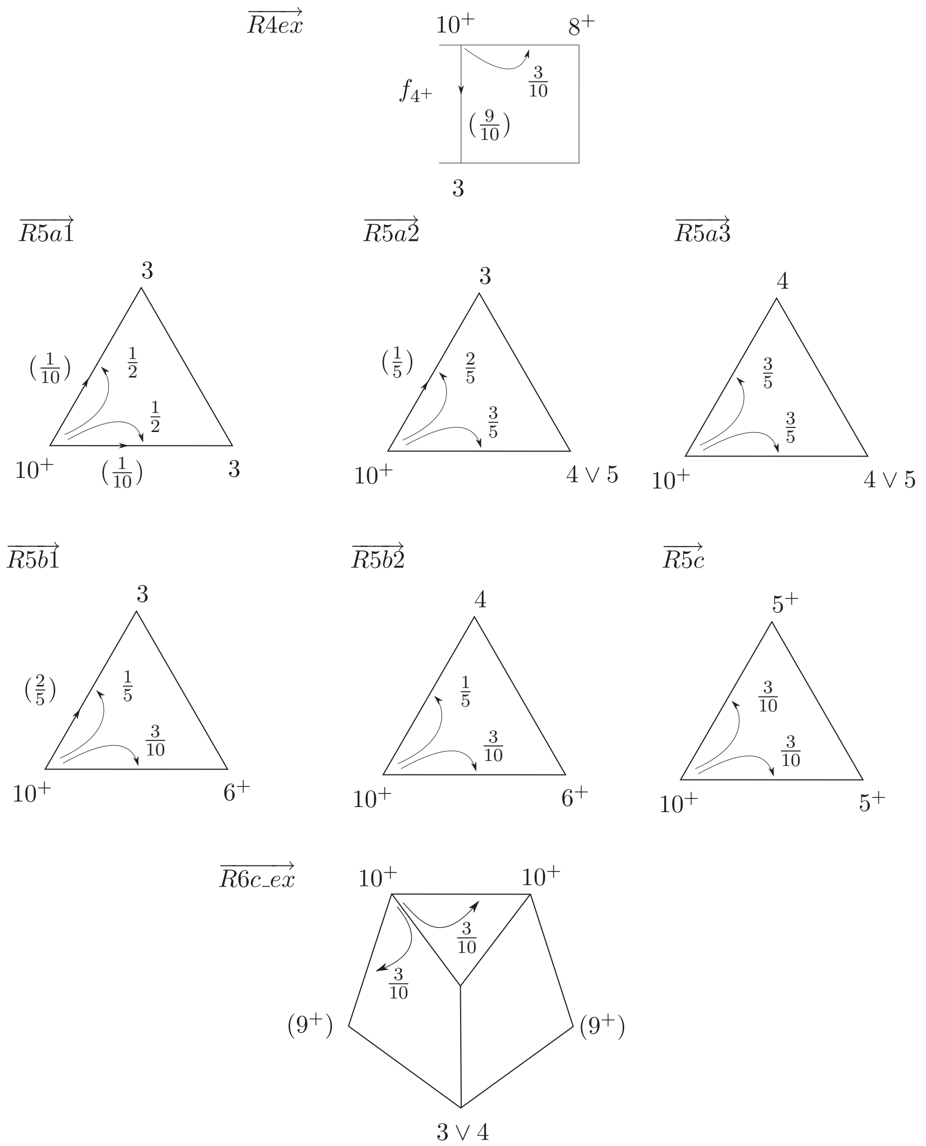

Рис. 3. Дополнительные правила $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$, $\overrightarrow{\mathrm{R5}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{R6c\_ex}}$ передачи зарядов от 10^+-вершины.

Случай 2: вершина v лежит в 3-грани vv_1v_2. Если v_2 также 3-вершина, то каждое из ребер vv_1 и vv_2 получает $\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ от v по R6a и $\overrightarrow{\mathrm{R5a1}}$, как и требовалось.

Если $4 \le d(v_2) \le 5$, то vv_1 получает $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ согласно R6b и $\overrightarrow{\mathrm{R5a2}}$, а vv_2 получает $\frac{3}{5}$ по $\overrightarrow{\mathrm{R5a2}}$ (и ничего через инцидентную 4^+-грань).

Если $d(v_2) \ge 6$, а $\overrightarrow{\mathrm{R6c\_ex}}$ неприменимо, то vv_1 получает $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ по R6c и $\overrightarrow{\mathrm{R5b1}}$, а vv_2 получает $\frac{3}{10}$ согласно $\overrightarrow{\mathrm{R5b1}}$ и не более $\frac{3}{10}$ через инцидентную 4^+-грань по $\overrightarrow{\mathrm{R4ex}}$, т. е. не больше $\frac{3}{5}$ в сумме.

Наконец, если v_1 подчиняется правилу $\overrightarrow{\text{R6c\_ex}}$, а значит, v смежна по циклу с вершинами z, v_1, v_2 степеней соответственно 9^+, 3 и ≥ 10, то ребра vz, vv_1 и v_2 после усреднения проводят не более $2 \times \frac{3}{10}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$ и $2 \times \frac{3}{10}$, что и требовалось доказать.

Этим завершается доказательство леммы 2 и теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wernicke P.* Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
2. *Franklin P.* The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
3. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* An analogue of Franklin's theorem // Discrete Math. 2016. V. 339, N 10. P. 2553–2556.
4. *Borodin O.V., Ivanova A.O.* An extension of Franklin's theorem // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 1516–1521.
5. *Ferencová B., Madaras T.* Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310, N 12. P. 1661–1675.
6. *Fijavz G., Juvan M., Mohar B., Skrekovski R.* Planar graphs without cycles of specific lengths // Europ. J. Combinatorics. 2002. V. 23, N 4. P. 377–388.
7. *Hudak P., Maceková M., Madaras T., Siroczki P.* More on the structure of plane graphs with prescribed degrees of vertices, faces, edges and dual edges // Ars Math. Contemp. 2017. V. 13, N 2. P. 355–366.
8. *Jendrol' S.* Paths with restricted degrees of their vertices in planar graphs // Czechoslovak Math. J. 1999. V. 49, N 3. P. 481–490.
9. *Jendrol' S.* A structural property of convex 3-polytopes // Geom. Dedicata. 1997. V. 68. P. 91–99.
10. *Jendrol' S., Madaras T.,* On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
11. *Madaras T.* Note on the weight of paths in plane triangulations of minimum degree 4 and 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2000. V. 20, N 2. P. 173–180.
12. *Madaras T.* Two variations of Franklin's theorem // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. V. 36. P. 61–70.
13. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.
14. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane — a survey // AIP Conf. Proc. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
15. *Borodin O.V., Ivanova A.O.* New results about the structure of plane graphs: a survey // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907, N 1. P. 030051.
16. *Cranston D.W., West D.B.* An introduction to the discharging method via graph coloring // Discrete Math. 2017. V. 340, N 4. P. 766–793.
17. *Kotzig A., West D. B.* Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1955. V. 5. P. 101–113.
18. *Ando K., Iwasaki S., Kaneko A.* Every 3-connected planar graph has a connected subgraph with small degree sum (Japanese) // Ann. Meeting Math. Soc. Japan. 1993.
19. *Borodin O. V.* Minimal vertex degree sum of a 3-path in plane maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1997. V. 17, N 2. P. 279–284.
20. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R., Kostochka A. V., Yancey M. P.* Describing 3-paths in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2702–2711.
21. *Dvořák Z., Postle L.* Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of lengths 4 to 8 // J. Combin. Theory Ser. B. 2018. V. 129. P. 38–54.
22. *Borodin O. V.* An extension of Kotzig's theorem on the minimum weight of edges in 3-poly-

topes // Mathematica Slovaca. 1992. V. 42, N 4. P. 385–389.

Поступила в редакцию 17 октября 2023 г.
После доработки 2 ноября 2023 г
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна (ORCID 0000-0002-6179-3740)
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`shmgnanna@mail.ru`