Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 517.987

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ СТЕПЕННОЙ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ $\mathbb{Z}^d$ И $\mathbb{R}^d$ ДЕЙСТВИЙ

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, В. Э. Тодиков, А. Ж. Хакимбаев

Аннотация. Доказана эквивалентность степенной скорости сходимости в L_2-норме эргодических средних для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий и степенной же оценки спектральной меры симметричных d-мерных параллелепипедов: для показателей степеней, являющихся корнями некоторого специального симметрического многочлена от d переменных. При этом в случае $d = 1$ накрывается весь возможный диапазон степенных скоростей.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.109

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, симметрические полиномы.

1. Введение

1.1. Эргодические средние. Пусть $\mathscr{G}$ — группа $\mathbb{Z}^d$ или $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, и (Ω, λ) — пространство с вероятностной мерой λ, на котором действует группа $\mathscr{G}$ обратимыми сохраняющими меру λ преобразованиями $\tau_g : \Omega \to \Omega, g \in \mathscr{G}$, т. е. для всякого измеримого множества $E \subseteq \Omega$ множества $\tau_g^{-1}(E), \tau_g(E)$ также измеримы для всех $g \in \mathscr{G}$, и $\lambda\bigl(\tau_g^{-1}(E)\bigr) = \lambda(E)$. Групповое свойство (в аддитивной записи) означает, что для всех $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$ и $\omega \in \Omega$ справедливо равенство $\tau_{g_1}(\tau_{g_2}\omega) = \tau_{g_1+g_2}\omega$. Нетрудно проверить, что группа $\{\tau_g : g \in \mathbb{Z}^d\}$ конечно-порождена попарно коммутирующими автоморфизмами $T_k := \tau_{e_{d,k}}$, где $\{e_{d,k}\}_{k=1}^d$ — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^d$, а группа $\{\tau_g : g \in \mathbb{R}^d\}$ есть произведение одномерных попарно коммутирующих потоков, т. е. $\tau_g = T_1^{t_1} T_2^{t_2} \cdots T_d^{t_d}$, где $g = \sum\limits_{k=1}^{d} t_k e_{d,k}$ и $T_k^{t_k} := \tau_{t_k e_{d,k}}$, $t_k \in \mathbb{R}$.

Подгруппы, порожденные преобразованиями $T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_k}$ или соответственно одномерными потоками $T_{j_1}^{t_{j_1}}, T_{j_2}^{t_{j_2}}, \dots, T_{j_k}^{t_{j_k}}$, будем обозначать через $\mathscr{G}_{\mathbf{j}}$, где $\mathbf{j} = \sum\limits_{n=1}^{k} e_{d,j_n}$. Множество таких мультииндексов, т. е. векторов из $\mathbb{R}^d$, с координатами 0 или 1 (являющихся отличными от нулевой вершинами стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^d$) обозначим через $\mathscr{V}_d$. Ясно, что $\mathscr{G}_{\mathbf{j}} \simeq \mathbb{Z}^j$ или соответственно $\mathscr{G}_{\mathbf{j}} \simeq \mathbb{R}^j$, где $j = \|\mathbf{j}\|_1$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

Пусть ν_d — мера Лебега на $\mathbb{R}^d$ или считающая мера на $\mathbb{Z}^d$. Пусть $\mathscr{I}$ — направленное множество индексов, нумерующих семейство подмножеств $G_\alpha \subset \mathscr{G}$, $\alpha \in \mathscr{I}$, таких, что

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} G_\alpha = \mathscr{G}, \quad 0 < \nu(G_\alpha) \le \nu(G_\beta) < +\infty \text{ при } \alpha \le \beta.$$

Ясно, что

$$\lim_{\alpha \in \mathscr{I}} \nu_d(G_\alpha) = +\infty.$$

Для всякой функции $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ определим эргодические средние

$$A_\alpha f(\omega) = \frac{1}{\nu_d(G_\alpha)} \int\limits_{G_\alpha} f(\tau_g \omega) d\nu_d(g), \quad \omega \in \Omega,\ \alpha \in \mathscr{I}.$$

В частности, для каждой из групп $\mathbb{Z}^d$ или $\mathbb{R}^d$ средние вдоль параллелепипедов записываются в виде

$$A_{\mathbf{n}} f(\omega) = \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_d} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} \omega), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \tag{1}$$

и соответственно

$$A_{\mathbf{t}} f(\omega) = \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_d} \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_d} f(T_1^{\tau_1} \cdots T_d^{\tau_d} \omega)\, d\tau_1 \dots d\tau_d, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d. \tag{2}$$

1.2. Эргодические теоремы. В 1951 г. для функций $f \in L \log^{d-1} L(\Omega, \lambda)$ Данфорд [1] и Зигмунд [2] доказали сходимость п.в. средних (1) и соответственно (2) без условия коммутируемости образующих автоморфизмов и соответственно потоков. При этом предельная функция f^* определяется равенством (см., например, [3, § 6.1] и [4, гл. VIII, § 7])

$$f^*(\omega) = \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2 \cdots \mathbb{E}_d f(\omega),$$

где $\mathbb{E}_j$ — оператор условного ожидания относительно σ-алгебры измеримых T_j-инвариантных множеств (соответственно T_j^t-инвариантных). В работе Данфорда и позднее Данфорда и Шварца была доказана и сходимость в среднем в L_p, $p > 1$ для любой функции $f \in L_p(\Omega, \lambda)$ для таких средних (в более общей ситуации, чем сохраняющие меру преобразования, так называемых $L_1 - L_\infty$-сжатий). Отметим также недавнюю работу [5], в которой сходимость п.в. в теореме Данфорда — Зигмунда доказывается для функций $f \in L \log^{n-1} L(\Omega, \lambda)$, где $n \le d$ — ранг динамической системы.

Дополнительную информацию об эргодических теоремах для других групповых действий можно найти в монографии Темпельмана [6] и статье Нево [7]. Мы в этой работе исследуем скорость сходимости средних (1) и (2) в $L_2(\Omega, \lambda)$, применяя хорошо развитую спектральную теорию унитарных представлений групп $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$. Рассматриваемыми унитарными операторами являются операторы Купмана

$$U_g f(\omega) = f(\tau_g \omega), \quad g \in \mathscr{G}.$$

1.3. Спектральные меры. Для унитарного представления U_g абелевой локально-компактной группы $\mathscr{G}$ и любой функции $f \in L_2(\Omega, \lambda)$ найдется (см. [8, 9]) неотрицательная борелевская спектральная мера $\sigma_f^{\mathscr{G}}$, определенная на группе $\mathscr{G}^\wedge$ характеров группы $\mathscr{G}$ и задаваемая равенствами

$$(U_g f, f)_{L_2(\Omega,\lambda)} = \int\limits_{\mathscr{G}^\wedge} \chi(g)\, d\sigma_f^{\mathscr{G}}(\chi), \quad g \in \mathscr{G}.$$

Для группы $\mathbb{R}^k$ ее группа характеров есть $\mathbb{R}^k$, а для $\mathbb{Z}^k$ — тор $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/2\pi\mathbb{Z}^k = (-\pi,\pi]^k$. Следовательно, для групп $\mathscr{G}_{\mathbf{k}}$ операторов Купмана будут соответственно равенства

$$\big(f\big(T_{j_1}^{n_1} T_{j_2}^{n_2} \cdots T_{j_k}^{n_k}\omega\big), f(\omega)\big) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{k}}}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k,$$

$$\big(f\big(T_{j_1}^{t_1} T_{j_2}^{t_2} \cdots T_{j_k}^{t_k}\omega\big), f(\omega)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{k}}}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k,$$

где $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum\limits_{n=1}^{k} x_n y_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$. Для меры $\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{1}}}$, $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$, будем также использовать обозначение σ_f. Чтобы отличать числа от векторов, последние будем обозначать жирными символами. Исключением будет разве что $x \in \mathbb{R}^d$.

1.4. Описание результатов. Наша цель в этой статье — найти условия, при которых эргодические средние (1) и (2) убывают по норме степенным образом. А именно, для $f \in L_2(\Omega,\lambda)$ найдутся константа $B > 0$ и $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \geq \mathbf{0}$ такие, что

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \leq \frac{B}{t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}}, \ \mathbf{t} > \mathbf{0}; \quad \|A_{\mathbf{n}} f\|_2^2 \leq \frac{B}{n_1^{\alpha_1}\cdots n_d^{\alpha_d}}, \ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{3}$$

Также для групп $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$ и $f \in L_2(\Omega,\lambda)$ будем предполагать степенную оценку спектральной меры симметричных промежутков, т. е. для некоторых констант $A > 0$ и $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \geq \mathbf{0}$ при всех $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_d) > \mathbf{0}$

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1,\ldots,\delta_d)) \leq A\delta_1^{\alpha_1}\cdots\delta_d^{\alpha_d}, \tag{4}$$

где $\Pi(\delta_1,\ldots,\delta_d) := (-\delta_1,\delta_1] \times \cdots \times (-\delta_d,\delta_d]$.

Основным результатом является следующий критерий степенной скорости сходимости эргодических средних, обобщающий хорошо известную одномерную ситуацию [10, 11].

Теорема 1. *Пусть $\alpha_k \in [0,2]$, $1 \leq k \leq d$, и выполняется условие (3). Тогда справедливо неравенство (4) с константой*

$A = B\rho(\alpha_1)\cdots\rho(\alpha_d)$ *(дискретное время);*

$A = B\frac{\rho(\alpha_1)}{2^{\alpha_1}}\cdots\frac{\rho(\alpha_d)}{2^{\alpha_d}}$ *(непрерывное время),*

где $\rho(\beta) = \inf\limits_{x>0}\frac{x^{2-\beta}}{\sin^2 x}$.

Обратно, можно явно указать семейство специальных симметрических многочленов P_d^κ от d переменных с параметром $\kappa \in [0,2)$ такое, что если $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \geq \mathbf{0}$ является корнем одного из них, то условие (4) на спектральную меру влечет неравенство (3) с константой

$B = 2d!\frac{\pi^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}A}{2-\kappa}$ *(дискретное время);*

$B = 2d! \frac{2^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}A}{2-\kappa}$ (*непрерывное время*).

Доказательство этого критерия включает в себя два шага: импликация в одну сторону есть содержание теоремы 2, а импликация в обратную сторону представлена в п. 1 теоремы 4. Симметрические многочлены, возникающие в формулировке критерия, обсуждаются в § 4, там же доказывается теорема 4. В § 3 мы подробно разбираем в теореме 3 случай $d = 2$, используя новый подход к оценке норм эргодических средних. В § 2 приводятся необходимые конструкции и доказывается теорема 2.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Проективное свойство спектральных мер. Спектральные меры $\{\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{j}}}\}_{\mathbf{j}\in\mathscr{V}_d}$ образуют проективную систему мер. Это означает следующее (см., например, [12, 9.12(i)]). Обозначим последовательную нумерацию ненулевых координат мультииндекса $\mathbf{j} \in \mathscr{V}_d$ через $\ell(\mathbf{j})_n$. Для любых мультииндексов $\mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathscr{V}_d$ таких, что $\mathbf{j} \le \mathbf{k}$ (т. е. $\mathbf{j}_n \le \mathbf{k}_n$ для всех $1 \le n \le d$), рассмотрим отображения проектирования

$$\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^j \text{ и } \pi_{\mathbf{k}} := \pi_{\mathbf{k},\mathbf{1}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k,$$

где $k = \|\mathbf{k}\|_1$, $j = \|\mathbf{j}\|_1$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, задаваемые цепочкой преобразований:

$$\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}} : \sum_{n=1}^{k} x_n e_{k,n} \mapsto \sum_{n=1}^{k} x_n e_{d,\ell(\mathbf{k})_n} \mapsto \sum_{n=1}^{k} \mathbf{j}_{\ell(\mathbf{k})_n} x_n e_{d,\ell(\mathbf{k})_n} = \sum_{n=1}^{j} y_n e_{d,\ell(\mathbf{j})_n} \mapsto \sum_{n=1}^{j} y_n e_{j,n}.$$

Проектор $\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ каждому k-мерному вектору $\mathbf{x}$ сопоставляет j-мерный вектор $\mathbf{y}$, который получается следующим образом. Сначала k-мерный вектор $\mathbf{x}$ переводится в d-мерный, в котором координаты x_n заполняют единичные координаты мультииндекса $\mathbf{k}$. Далее в этом d-мерном векторе остаются ненулевыми лишь те координаты, которые соответствуют единицам в мультииндексе $\mathbf{j}$. Получившийся вектор $\mathbf{y}$ переводится в $\mathbb{R}^j$. Нетрудно видеть, что при $\mathbf{h} \le \mathbf{j} \le \mathbf{k}$

$$\pi_{\mathbf{h},\mathbf{j}}\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \pi_{\mathbf{h},\mathbf{k}}, \quad \pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\pi_{\mathbf{k}} = \pi_{\mathbf{j}}.$$

Предложение 1. *Для любых мультииндексов* $\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathscr{V}_d$ *таких, что* $\mathbf{j} \le \mathbf{k}$, *будет*

$$\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{j}}} = (\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}})_* \sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{k}}} := \sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{k}}} \circ \pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай группы $\mathbb{Z}^d$, для группы $\mathbb{R}^d$ рассуждения аналогичны. Для любых неотрицательных целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_j$ получим

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^j} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{j}}}(\mathbf{s}) = \bigl(f\bigl(T_{\ell(\mathbf{j})_1}^{n_1} T_{\ell(\mathbf{j})_2}^{n_2} \cdots T_{\ell(\mathbf{j})_j}^{n_j}\omega\bigr), f(\omega)\bigr)$$
$$= \bigl(f\bigl(T_{\ell(\mathbf{k})_1}^{\widetilde{n}_1} T_{\ell(\mathbf{k})_2}^{\widetilde{n}_2} \cdots T_{\ell(\mathbf{k})_k}^{\widetilde{n}_k}\omega\bigr), f(\omega)\bigr) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\widetilde{\mathbf{n}},\mathbf{t})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{k}}}(\mathbf{t}),$$

где $\widetilde{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}_+^k$ определяется следующим образом. Так как $\{\ell(\mathbf{j})_p\}_{p=1}^j \subset \{\ell(\mathbf{k})_q\}_{q=1}^k$, то при равенстве $\ell(\mathbf{k})_q = \ell(\mathbf{j})_p$ полагаем $\widetilde{n}_q = n_p$. Все остальные значения $\widetilde{n}_q$ равны 0. Из этого следует, что

$$(\widetilde{\mathbf{n}}, \mathbf{t})_{\mathbb{R}^k} = (\mathbf{n}, \pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(\mathbf{t}))_{\mathbb{R}^j}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^j} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{j}}(\mathbf{s}) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\widetilde{\mathbf{n}},\mathbf{t})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}(\mathbf{t})$$
$$= \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\mathbf{n},\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(\mathbf{t}))}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^j} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d(\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}})_*\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}(\mathbf{s}).$$

Таким образом, все коэффициенты Фурье мер $\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{j}}$ и $(\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}})_*\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}$ совпадают, а значит, и сами меры совпадают [13, 3.8.6]. $\square$

Следствие 1. *Для любого* $1 \le j \le d$

$$\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{1}}(\{x_j = 0\}) = \|\mathbb{E}_j f\|_2^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{1}}(\{x_j = 0\}) = \sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{1}}\big(\pi_{e_j}^{-1}\{\mathbf{0}\}\big) = \sigma_f^{\mathscr{G}_{e_j}}(\{\mathbf{0}\}) = \|\mathbb{E}_j f\|_2^2. \quad \square$$

Отметим, что условие (4) на спектральную меру влечет при $\alpha_j > 0$ равенство $\|\mathbb{E}_j f\|_2 = 0$. Действительно,

$$\|\mathbb{E}_j f\|_2^2 = \sigma_f(\{x_j = 0\}) = \lim_{\delta_k \to \delta_\infty} \big(\lim_{\delta_j \to 0} \sigma_f(\Pi(\delta_1, \dots, \delta_d))\big)$$
$$\le A \lim_{\delta_k \to \delta_\infty} \big(\lim_{\delta_j \to 0} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_d^{\alpha_d}\big) = 0.$$

Здесь $\delta_\infty = \pi$ для группы $\mathbb{Z}^d$ и $\delta_\infty = \infty$ для группы $\mathbb{R}^d$.

2.2. Спектральное представление норм. Рассмотрим два семейства функций $\mathscr{F}_n : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}_+$ и $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, задаваемых равенствами

$$\mathscr{F}_n(x) = \frac{1}{n^2} \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}},\ 0 < |x| \le \pi, \quad \mathscr{F}_n(0) = 1,\ n \in \mathbb{N};$$

$$F_t(x) = \left(\frac{\sin \frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2,\ x \ne 0, \quad F_t(0) = 1,\ t \in \mathbb{R}.$$

Функции $\mathscr{F}_n$ лишь на константу отличаются от классических ядер Фейера.

Предложение 2. *Для норм эргодических средних* (1) *и* (2) *справедливы интегральные представления*

$$\|A_\mathbf{n} f\|_2^2 = \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \mathscr{F}_{n_1}(x_1) \dots \mathscr{F}_{n_d}(x_d)\, d\sigma_f(x), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d; \tag{5}$$

$$\|A_\mathbf{t} f\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} F_{t_1}(x_1) \cdots F_{t_d}(x_d)\, d\sigma_f(x), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d. \tag{6}$$

Доказательство. Дискретный вариант (формула (5)) для группы $\mathbb{Z}^d$ по существу разобран в [14], где рассматривались усреднения по кубам (см. также обсуждение в [15, лемма 4.1]). Докажем для полноты изложения равенство (6) для группы $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим общий случай, а потом перейдем к частному — усреднениям по параллелепипедам. Имеем

$$\begin{aligned}\|A_\alpha f\|_2^2 &= (A_\alpha f, A_\alpha f)\\ &= \left(\frac{1}{\nu_d(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha} f(\tau_g\omega)d\nu_d(g), \frac{1}{\nu_d(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha} f(\tau_g\omega)\,d\nu_d(g)\right)\\ &= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{G_\alpha}(f(\tau_g\omega), f(\tau_{g'}\omega))\,d\nu_d(g)d\nu_d(g')\\ &= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{G_\alpha}(f(\tau_{g-g'}\omega), f(\omega))\,d\nu_d(g)d\nu_d(g')\\ &= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{\mathscr{G}^\wedge} e^{i(g-g',s)}\,d\sigma_f(s)\,d\nu_d(g)d\nu_d(g')\\ &= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{\mathscr{G}^\wedge}\int\limits_{G_\alpha} e^{i(g,s)}\,d\nu_d(g)\int\limits_{G_\alpha} e^{-i(g',s)}\,d\nu_d(g')\,d\sigma_f(s)\\ &= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{\mathscr{G}^\wedge}\left|\int\limits_{G_\alpha} e^{i(g,s)}\,d\nu_d(g)\right|^2 d\sigma_f(s).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|A_\alpha f\|_2^2 = \int\limits_{\mathscr{G}^\wedge} |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)|^2\;d\sigma_f(s), \tag{7}$$

где

$$\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s) = \int\limits_{\mathscr{G}} e^{i(g,s)}\,d\nu_d|G_\alpha(g)$$

— преобразование Фурье вероятностной меры $\nu_d|G_\alpha$,

$$\nu_d|G_\alpha(E) = \frac{\nu_d(E\cap G_\alpha)}{\nu_d(G_\alpha)}.$$

Для группы $\mathbb{R}^d$ это ненормированное преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$ индикатора $I_{\mathscr{G}_\alpha}$ множества $G_\alpha \subset \mathbb{R}^d$. Для усреднений по параллелепипедам будет получаться произведение кардинальных синусов

$$\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_d} e^{-i(g,s)}\,dg = \prod_{k=1}^d \int\limits_0^{t_k} e^{-ig_k s_k}\,dg_k = \frac{2\sin\left(\frac{t_1 s_1}{2}\right)}{s_1}\cdots\frac{2\sin\left(\frac{t_d s_d}{2}\right)}{s_d}e^{-i(t,s)/2}.$$

Отсюда, подставляя в общую формулу, получаем равенство (6). $\square$

2.3. Спектральные меры окрестности нуля. Покажем, как нормы усреднений оцениваются снизу через спектральные меры окрестностей нуля в форме параллелепипедов. Нам понадобится следующее соотношение для ядер $\mathscr{F}_n, F_t$:

$$\frac{1}{[t]^2}\frac{\sin^2\frac{[t]x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} \geq \left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2, \quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 1,\ |tx|<2\pi. \tag{8}$$

Следующее утверждение является аналогом известных одномерных оценок [16, лемма 2; 17, лемма 2] норм эргодических средних (1), (2). Для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \geq \mathbf{1}$ положим $[\mathbf{s}] := ([s_1], \dots, [s_d])$.

Предложение 3. *Для норм эргодических средних* (1) *и* (2) *справедливы оценки снизу: при любых* $\mathbf{a} \in (0, \pi]^d$, *для всех* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{s} \geq \mathbf{1}$ *и* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d_+$

$$F_1(a_1) \cdots F_1(a_d)\, \sigma_f \left(\Pi \left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d} \right) \right) \leq \|A_{[\mathbf{s}]} f\|_2^2; \tag{9}$$

$$F_1(a_1) \cdots F_1(a_d)\, \sigma_f \left(\Pi \left(\frac{a_1}{t_1}, \dots, \frac{a_d}{t_d} \right) \right) \leq \|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2. \tag{10}$$

Доказательство. Для доказательства (9) воспользуемся представлением (5) и неравенством (8):

$$\begin{aligned}
\|A_{[\mathbf{s}]} f\|_2^2 = \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} &\mathscr{F}_{[s_1]}(x_1) \dots \mathscr{F}_{[s_d]}(x_d)\, d\sigma_f(x) \\
&\geq \int\limits_{\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d}\right)} \mathscr{F}_{[s_1]}(x_1) \dots \mathscr{F}_{[s_d]}(x_d)\, d\sigma_f(x) \\
&\geq \int\limits_{\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d}\right)} F_{s_1}(x_1) \dots F_{s_d}(x_d)\, d\sigma_f(x) \\
&\geq \prod_{k=1}^d \min_{|x_k| \leq \frac{a_k}{s_k}} \left(\frac{\sin \frac{s_k x_k}{2}}{\frac{s_k x_k}{2}} \right)^2 \sigma_f \left(\Pi \left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d} \right) \right) \\
&= \prod_{k=1}^d \min_{|y| \leq \frac{a_k}{2}} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 \sigma_f \left(\Pi \left(\frac{a_1}{n_1}, \dots, \frac{a_d}{n_d} \right) \right) \\
&= F_1(a_1) \cdots F_1(a_d)\, \sigma_f \left(\Pi \left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d} \right) \right).
\end{aligned}$$

Неравенство (10) доказывается аналогично. □

Для $\beta \in [0, 2]$ определим

$$\rho(\beta) = \inf_{x > 0} \frac{x^{2-\beta}}{\sin^2 x}.$$

Нетрудно убедиться, что $\rho(0) = \rho(2) = 1$. Для $\beta \in (0, 2)$ инфимум достигается на первом положительном корне уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-\beta}$. Также ясно, что $1 \leq \rho(\beta) \leq \sin^{-2}(1)$.

Из предложения (3) вытекает

Теорема 2. *Пусть нормы эргодических средних* (1) *и* (2) *убывают степенным образом, т. е. справедлива оценка* (3) *с константами* $B > 0$ *и* $\alpha_j \in [0, 2]$, $1 \leq j \leq d$. *Тогда для спектральной меры* σ_f *выполняется неравенство*

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1, \dots, \delta_d)) \leq B \rho(\alpha_1) \cdots \rho(\alpha_d) \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_d^{\alpha_d}, \quad \boldsymbol{\delta} \in (0, \pi]^d \quad (\textit{дискретное время});$$

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1, \dots, \delta_d)) \leq B \frac{\rho(\alpha_1)}{2^{\alpha_1}} \cdots \frac{\rho(\alpha_d)}{2^{\alpha_d}} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_d^{\alpha_d}, \quad \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} \quad (\textit{непрерывное время}).$$

Доказательство. Рассмотрим дискретный случай. Фиксируем $\boldsymbol{\delta} \in (0, \pi]^d$. Каждую координату δ_k можно представить в виде $\delta_k = \frac{a_k}{s_k}$, где $a_k \in (0, \pi]$ и $s_k \geq 1$ — варьируемые вещественные параметры. Тогда из неравенства (9) и соотношения $\frac{1}{[x]} \leq \frac{2}{x}$ при $x \geq 1$ получим

$$\begin{aligned}\sigma_f(\Pi(\delta_1, \ldots, \delta_d)) = \sigma_f\left(\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_d}{s_d}\right)\right) \leq \frac{1}{F_1(a_1)\cdots F_1(a_d)}\|A_{[\mathbf{s}]}f\|_2^2 \\ \leq \left(\frac{a_1/2}{\sin(a_1/2)}\right)^2 \cdots \left(\frac{a_d/2}{\sin(a_d/2)}\right)^2 \frac{B}{[s_1]^{\alpha_1}\cdots[s_d]^{\alpha_d}} \\ \leq B\left(\frac{a_1/2}{\sin(a_1/2)}\right)^2 \cdots \left(\frac{a_d/2}{\sin(a_d/2)}\right)^2 \left(\frac{2}{s_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{2}{s_d}\right)^{\alpha_d} = \\ = B\frac{(a_1/2)^{2-\alpha_1}}{\sin^2(a_1/2)} \cdots \frac{(a_d/2)^{2-\alpha_d}}{\sin^2(a_d/2)} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_d^{\alpha_d}.\end{aligned}$$

Выбирая параметры a_k таким образом, чтобы функции, их содержащие, достигали своего минимума, получим требуемую оценку для дискретного времени. Оценка для спектральной меры в случае непрерывного времени доказывается аналогично. В этом случае не нужно использовать неравенство между числом и его целой частью. $\square$

3. Оценки сверху для норм усреднений: $d = 1$ и $d = 2$

Перепишем формулу (7) через интеграл от функции распределения [13, 2.9.3]:

$$\begin{aligned}\|A_\alpha f\|_2^2 = \int_{\mathscr{G}^\wedge} |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)|^2\, d\sigma_f(s) = 2\int_0^\infty u\sigma_f(\{s \in \mathscr{G}^\wedge : |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)| > u\})\, du \\ = 2\int_0^1 u\sigma_f(\{s \in \mathscr{G}^\wedge : |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)| > u\})\, du.\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку $|\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)| \leq 1$. Анализ приведенного соотношения позволяет говорить об эквивалентности степенной скорости сходимости эргодических средних вдоль параллелепипедов и степенной особенности спектральной меры специальных окрестностей нуля. В хорошо изученной одномерной ситуации подходящими оказались симметричные интервалы.

3.1. Окрестности нуля в виде промежутков: $d = 1$**.** Рассмотрим одномерный случай. Для групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ и $f \in L_2(\Omega, \lambda)$ предполагаем степенную оценку (4) спектральной меры симметричных интервалов, т. е. $\sigma_f((-\delta, \delta]) \leq A\delta^\alpha$ для некоторых констант $A > 0$ и $\alpha > 0$ при всех возможных $\delta > 0$. Тогда для непрерывного и дискретного времени имеем (см., например, [16, 17]):

	$\alpha \in [0, 2)$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$\|A_t f\|_2^2$	$\mathscr{O}(t^{-\alpha})$	$\mathscr{O}(t^{-2}\ln t)$	$\mathscr{O}(t^{-2})$
$\|A_n f\|_2^2$	$\mathscr{O}(n^{-\alpha})$	$\mathscr{O}(n^{-2}\ln n)$	$\mathscr{O}(n^{-2})$

Покажем новым способом эти соотношения, используя приведенную интегральную формулу. Сначала разберем случай группы $\mathbb{R}$. Пусть $\alpha \in [0,2)$, тогда для всех $t > 0$

$$\|A_t f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\right| > u\right\}\right) du$$
$$\leq 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{2}{tu}\right\}\right) du \leq 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{2}{tu}, \frac{2}{tu}\right]\right) du$$
$$\leq 2A\int_0^1 u\frac{2^\alpha}{(tu)^\alpha}\, du = \frac{2^{\alpha+1}A}{(2-\alpha)t^\alpha}.$$

Если $\alpha = 2$, то для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ получим

$$\|A_t f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\right| > u\right\}\right) du$$
$$\leq 2\int_0^\varepsilon u\|f\|_2^2\, du + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{2}{tu}, \frac{2}{tu}\right]\right) du$$
$$\leq \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2A\int_\varepsilon^1 u\frac{2^2}{(tu)^2}\, du = \varepsilon^2\|f\|_2^2 - \frac{8A}{t^2}\ln\varepsilon.$$

Минимум последнего выражения достигается при $\varepsilon^2 = \frac{4A}{\|f\|_2^2 t^2}$. Используя его, для всех достаточно больших $t > 0$ получаем

$$\|A_t f\|_2^2 \leq \frac{4A}{t^2}\ln\left(\frac{e\|f\|_2^2 t^2}{4A}\right).$$

Если $\alpha > 2$, то для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$

$$\|A_t f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\right| > u\right\}\right) du$$
$$\leq 2\int_0^\varepsilon u\|f\|_2^2\, du + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{2}{tu}, \frac{2}{tu}\right]\right) du$$
$$\leq \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2A\int_\varepsilon^1 u\frac{2^\alpha}{(tu)^\alpha}\, du \leq \varepsilon^2\|f\|_2^2 + \frac{2^{1+\alpha}A}{(\alpha-2)t^\alpha}\varepsilon^{2-\alpha}.$$

Полагая $\varepsilon = 1/t$, при всех достаточно больших $t > 0$ получаем

$$\|A_t f\|_2^2 \leq \left(\|f\|_2^2 + \frac{2^{1+\alpha}A}{\alpha-2}\right)t^{-2}.$$

Похожие выкладки применимы и для дискретного времени. Рассмотрим лишь случай $\alpha \in [0,2)$, чтобы сделать акцент на небольшом отличии и в дальнейшем подробно разбирать только непрерывное время. Учитывая неравенство

$|\sin(x/2)| \geq \frac{|x|}{\pi}$ для всех $|x| \leq \pi$, получаем

$$\|A_n f\|_2^2 = \int\limits_{(-\pi,\pi]} \left(\frac{\sin(nx/2)}{n\sin(x/2)}\right)^2 d\sigma_f(x) \leq \int\limits_{(-\pi,\pi]} \left(\frac{\pi\sin(nx/2)}{nx}\right)^2 d\sigma_f(x)$$

$$= 2\int\limits_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in (-\pi,\pi] : \left|\frac{\pi\sin(nx/2)}{nx}\right| > u\right\}\right) du \leq 2\int\limits_0^1 u\sigma_f\left(\left\{|x| < \frac{\pi}{nu}\right\}\right) du$$

$$\leq 2\int\limits_0^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{\pi}{nu}, \frac{\pi}{nu}\right]\right) du \leq 2A\int\limits_0^1 u\frac{\pi^\alpha}{(nu)^\alpha}\, du = \frac{2\pi^\alpha A}{(2-\alpha)n^\alpha}.$$

Выкладки для дискретного времени отличаются (после первого неравенства) от непрерывного по сути лишь константой π вместо 2.

Отметим, что все оценки удалось получить из-за того, что множества $\{s \in \mathscr{G}^\wedge : |\mathcal{F}[\nu_d|\nu G_\alpha](s)| > u\}$ содержатся в симметричных интервалах подходящей длины. В многомерной же ситуации происходит свое разбиение области параметров. Разберем подробно конструкцию для непрерывного времени сначала в размерности $d = 2$.

3.2. Окрестности нуля в виде прямоугольников: $d = 2$**.** Для группы $\mathbb{R}^2$ и $f \in L_2(\Omega, \lambda)$ снова предполагаем степенную оценку (4) спектральной меры симметричных прямоугольников, т. е. для некоторых констант $A > 0$ и $\alpha, \beta \geq 0$ при всех $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2) > \mathbf{0}$

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1, \delta_2)) \leq A\delta_1^\alpha \delta_2^\beta. \tag{11}$$

Для усреднений группы $\mathbb{R}^2$ по прямоугольникам $G_{t_1,t_2} = [0, t_1] \times [0, t_2]$ имеем

$$|\mathcal{F}[\nu_d|G_{t_1,t_2}](x)| = \left|\frac{2\sin\left(\frac{t_1x_1}{2}\right)}{t_1x_1}\frac{2\sin\left(\frac{t_2x_2}{2}\right)}{t_2x_2}\right|.$$

Нетрудно проверить, что для каждого $u \in (0,1)$ справедливо включение

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left|\frac{2\sin\left(\frac{t_1x_1}{2}\right)}{t_1x_1}\frac{2\sin\left(\frac{t_2x_2}{2}\right)}{t_2x_2}\right| > u\right\}$$
$$\subset \bigcap_{k=1}^2 \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_k| < \frac{2}{ut_k}\right\} \subset \Pi\left(\frac{2}{ut_1}, \frac{2}{ut_2}\right).$$

Более точным включением будет

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left|\frac{2\sin\left(\frac{t_1x_1}{2}\right)}{t_1x_1}\frac{2\sin\left(\frac{t_2x_2}{2}\right)}{t_2x_2}\right| > u\right\}$$
$$\subset \Pi\left(\frac{2}{ut_1}, \frac{2}{ut_2}\right) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1x_2| < \frac{4}{t_1t_2u}\right\}.$$

Обозначим множество в правой части через $\phi_{t_1,t_2}^{-1}E_u$, где $\phi_{t_1,t_2}(x) = \left(\frac{t_1x_1}{2}, \frac{t_2x_2}{2}\right)$ и $E_u = \Pi\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{u}\right) \bigcap \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1x_2| < \frac{1}{u}\right\}$, $u \in (0,1)$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство симметрических многочленов от двух переменных

$$P_2^\kappa(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \kappa(x+y), \quad \kappa \geq 0. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться (подробное обсуждение см. в доказательстве предложения (4)), что если неотрицательные α и β будут отличными от нуля корнями многочлена P_2^κ, то найдутся числа $0 \le p, q \le 1$, $p+q=1$, такие, что

$$\alpha + \beta p = \kappa, \quad \beta + \alpha q = \kappa. \tag{13}$$

Теорема 3. *Если имеет место степенная оценка* (11) *спектральной меры прямоугольных окрестностей нуля, то*

1) *если* $P_2^\kappa(\alpha,\beta)=0$, $\kappa\in[0,2)$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha}t_2^{-\beta}\big)$ *при* $t_1,t_2\to\infty$;

2) *если* $P_2^2(\alpha,\beta)=0$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha}t_2^{-\beta}\ln\big(t_1^{\alpha}t_2^{\beta}\big)\big)$ *при* $t_1,t_2\to\infty$;

3) *если* $P_2^\kappa(\alpha,\beta)=0$, $\kappa>2$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\frac{2\alpha}{\kappa}}t_2^{-\frac{2\beta}{\kappa}}\big)$ *при* $t_1,t_2\to\infty$.

Доказательство. Для произвольных чисел $0\le p,q\le 1$, $p+q=1$, вложим множество E_u в объединение двух прямоугольников:

$$E_u \subset \Pi\left(\frac{1}{u},\frac{1}{u^p}\right)\cup\Pi\left(\frac{1}{u^q},\frac{1}{u}\right).$$

Учитывая все включения и степенную оценку для спектральных мер прямоугольников, для любого $\varepsilon\in[0,1)$ получаем

$$\begin{aligned}
\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 &= 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x\in\mathbb{R}^2 : \left|\frac{2\sin\big(\frac{t_1x_1}{2}\big)}{t_1x_1}\frac{2\sin\big(\frac{t_2x_2}{2}\big)}{t_2x_2}\right| > u\right\}\right)du\\
&\le 2\int_0^\varepsilon u\|f\|_2^2\,du + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\phi_{t_1,t_2}^{-1}\left(\Pi\left(\frac{1}{u},\frac{1}{u^p}\right)\cup\Pi\left(\frac{1}{u^q},\frac{1}{u}\right)\right)\right)du\\
&= \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\Pi\left(\frac{2}{t_1u},\frac{2}{t_2u^p}\right)\cup\Pi\left(\frac{2}{t_1u^q},\frac{2}{t_2u}\right)\right)du\\
&\le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2\int_\varepsilon^1 uA\left(\left(\frac{2}{t_1u}\right)^\alpha\left(\frac{2}{t_2u^p}\right)^\beta + \left(\frac{2}{t_1u^q}\right)^\alpha\left(\frac{2}{t_2u}\right)^\beta\right)du\\
&= \varepsilon^2\|f\|_2^2 + \frac{2^{1+\alpha+\beta}A}{t_1^\alpha t_2^\beta}\int_\varepsilon^1\big(u^{1-\alpha-p\beta}+u^{1-\beta-q\alpha}\big)\,du.
\end{aligned}$$

Подставляя (13), получаем оценку

$$\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 \le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + \frac{2^{2+\alpha+\beta}A}{t_1^\alpha t_2^\beta}\int_\varepsilon^1 u^{1-\kappa}\,du. \tag{14}$$

В зависимости от того, какой знак принимает показатель $2-\kappa$, будем подбирать подходящее ε в виде $\varepsilon=\frac{c}{t_1^a t_2^b}$ для некоторых $a,b,c\ge 0$.

Пусть $\kappa\in[0,2)$. Тогда полагаем $\varepsilon=0$ и из (14) получаем

$$\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 \le \frac{2^{2+\alpha+\beta}A}{t_1^\alpha t_2^\beta(2-\kappa)}, \quad t_1,t_2>0.$$

Таким образом, $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha}t_2^{-\beta}\big)$ при $t_1,t_2\to\infty$.

Пусть $\kappa = 2$. Тогда из (14) для $\varepsilon = \frac{1}{t_1^{\alpha/2} t_2^{\beta/2}}$ имеем

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \le \varepsilon^2 \|f\|_2^2 - \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{t_1^\alpha t_2^\beta} \ln \varepsilon = \|f\|_2^2 \frac{1}{t_1^\alpha t_2^\beta} + \frac{2^{1+\alpha+\beta} A}{t_1^\alpha t_2^\beta} \ln\bigl(t_1^\alpha t_2^\beta\bigr), \quad t_1, t_2 > 0.$$

Таким образом,

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 = \mathscr{O}\bigl(t_1^{-\alpha} t_2^{-\beta} \ln\bigl(t_1^\alpha t_2^\beta\bigr)\bigr) \quad \text{при } t_1, t_2 \to \infty.$$

Пусть теперь $\kappa > 2$. Тогда из (14) для $\varepsilon = \frac{1}{t_1^a t_2^b}$ получим

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \le \varepsilon^2 \|f\|_2^2 + \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{t_1^\alpha t_2^\beta (\kappa - 2)} \varepsilon^{2-\kappa} = \|f\|_2^2 \frac{1}{t_1^{2a} t_2^{2b}} + \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{\kappa - 2} \frac{1}{t_1^{\alpha + a(2-\kappa)} t_2^{\beta + b(2-\kappa)}}.$$

Взяв параметры $a = \frac{\alpha}{\kappa}$ и $b = \frac{\beta}{\kappa}$, приходим к итоговой оценке

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \le \left(\|f\|_2^2 + \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{\kappa - 2} \right) t_1^{-\frac{2\alpha}{\kappa}} t_2^{\frac{-2\beta}{\kappa}}, \quad t_1, t_2 > 0. \quad \square$$

4. Общий случай $d > 2$

4.1. Симметрические многочлены. Напомним определения некоторых стандартных симметрических многочленов в $\mathbb{R}^d$:

$$\sigma_{d,1}(x) = \sum_{j=1}^d x_j, \quad \sigma_{d,d-1}(x) = \sum_{j=1}^d x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d, \quad \sigma_{d,d}(x) = x_1 x_2 \cdots x_d.$$

Здесь выражение $\widehat{x}_j$ означает, что переменной x_j нет, а все остальные есть. Рассмотрим два семейства симметрических многочленов, заданных рекуррентно. Первая последовательность многочленов $Q_d(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, задается следующим образом:

$$Q_1(x_1) = 1, \; Q_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad Q_d(x) = \sigma_{d,d-1}(x) \prod_{j=1}^d Q_{d-1}(\widehat{x}_j).$$

Для произвольного $\kappa \ge 0$ определим еще одну последовательность многочленов. Положим

$$P_1^\kappa(x_1) = x_1 - \kappa, \quad P_2^\kappa(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - \kappa(x_1 + x_2)$$

и

$$P_d^\kappa(x) = \sum_{j=1}^d A_j^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j) + B_d(x),$$

где

$$A_j^d(x) = x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \prod_{k \ne j} Q_{d-1}(\widehat{x}_k), \quad B_d(x) = \sigma_{d,d}(x) \prod_{j=1}^d Q_{d-1}(\widehat{x}_j).$$

В следующих леммах рассмотрим некоторые свойства этих многочленов. Основное внимание будет уделено нулям многочленов P_d^κ.

Лемма 1. *В многочлене P_d^κ слагаемое, содержащее κ, имеет вид $-\kappa Q_d(x)$, т. е. $P_d^\kappa(x) = R_d(x) - \kappa Q_d(x)$. При этом $R_d(x), Q_d(x) \geq 0$ при $x \geq \mathbf{0}$.*

Доказательство. Для $d = 1$ и $d = 2$ утверждение очевидно из определения многочленов. Предположим, что утверждение верно для всех номеров вплоть до $d-1$, докажем его для d. Исходя из предположения и индуктивного определения многочлена P_d^κ, имеем

$$\begin{aligned} P_d^\kappa(x) &= \sum_{j=1}^{d} A_j^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_j) - \kappa \sum_{j=1}^{d} A_j^d(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \\ &= R_d(x) - \kappa \sum_{j=1}^{d} x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \prod_{k \neq j} Q_{d-1}(\widehat{x}_k,) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) \\ &= R_d(x) - \kappa \prod_{k=1}^{d} Q_{d-1}(\widehat{x}_k) \sum_{j=1}^{d} x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \\ &= R_d(x) - \kappa \sigma_{d,d-1}(x) \prod_{k=1}^{d} Q_{d-1}(\widehat{x}_k) = R_d(x) - \kappa Q_d(x). \end{aligned}$$

Из определения многочленов следует, что $Q_d(x)$ и $A_j^d(x)$ неотрицательны при $x \geq \mathbf{0}$. Поэтому и

$$R_d(x) = \sum_{j=1}^{d} A_j^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \geq 0 \tag{15}$$

при $x \geq \mathbf{0}$, исходя из индуктивного предположения о неотрицательности $R_{d-1}(x)$. $\square$

Нас будут интересовать неотрицательные нули многочлена P_d^κ. Поищем такие нули сначала на координатных гиперплоскостях. Поскольку многочлены симметричны, возьмем, например, $x_1 = 0$. Тогда уравнение $P_d^\kappa(0, x_2, \ldots, x_d) = 0$ перепишется в виде $A_1^d(x) P_{d-1}^\kappa(x_2, \ldots, x_d) = 0$, так как нетрудно видеть, что остальные слагаемые занулятся. Поскольку у многочленов $Q_d(x)$ неотрицательным нулем будет только точка $\mathbf{0}$, то $A_1^d(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_2 \cdots x_d = 0$.

Таким образом, начиная с размерности $d = 3$ многочлен P_d^κ будет зануляться на $(d-2)$-мерных координатных подпространствах. Назовем такие нули тривиальными, за исключением нетривиальных нулей многочленов P_k^κ меньшей размерности $k < d$. У многочленов P_1^κ и P_2^κ нетривиальными будем считать все нули, кроме точки $\mathbf{0}$. Обозначим множество неотрицательных нетривиальных нулей многочлена P_d^κ через $\ker P_d^\kappa$. Положим также $\ker P_d^0 = \{\mathbf{0}\}$. Таким образом, неотрицательные нетривиальные нули многочлена P_d^κ, $\kappa > 0$, либо имеют все положительные координаты, либо имеют $0 < m \leq d-1$ нулевых координат, а оставшиеся положительные координаты являются корнями многочлена P_{d-m}^κ.

Лемма 2. *Множества $\ker P_d^\kappa$, $\kappa \geq 0$, расслаивают $[0, +\infty)^d$, т. е.*

$$[0, +\infty)^d = \bigsqcup_{\kappa \geq 0} \ker P_d^\kappa.$$

Доказательство. Покажем сначала, что множества нетривиальных нулей не пересекаются. Пусть, от противного, найдутся κ_1 и κ_2 и точка $x_0 \geq \mathbf{0}$, лежащая в обоих множествах. Пусть $0 \le m \le d-1$ — число нулевых координат x_0. Тогда $P^{\kappa_1}_{d-m}$ и $P^{\kappa_2}_{d-m}$ обращаются в нуль на оставшихся ненулевых координатах. Следовательно, $R_{d-m} - \kappa_1 Q_{d-m} = R_{d-m} - \kappa_2 Q_{d-m}$. Так как Q_{d-m} не равно нулю, то $\kappa_1 = \kappa_2$.

Для произвольной ненулевой точки $x_0 \ge \mathbf{0}$ необходимое значение κ находится из равенства $R_{d-m} = \kappa Q_{d-m}$, где m — число нулевых координат x_0. $\square$

Лемма 3. *Пусть $x \in \ker P^\kappa_d$. Тогда справедливы неравенства*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_d \ge \kappa, \quad x_j \le \kappa, \quad j = 1, \dots, d.$$

Доказательство. Для многочлена P^κ_2 неравенства следуют из представлений

$$P^\kappa_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2 - \kappa) - x_1 x_2 = 0,$$

$$P^\kappa_2(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2 - \kappa) - x_2(\kappa - x_2) = x_2(x_1 + x_2 - \kappa) - x_1(\kappa - x_1) = 0.$$

В общем d-мерном случае покажем индуктивно сначала наличие аналога первого равенства, а именно

$$P^\kappa_d(x) = Q_d(x)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa) - S_d(x),$$

где $S_d(x) \ge 0$ при $x \ge \mathbf{0}$. Учитывая уже проверенные при доказательстве леммы 1 равенства

$$Q_d(x) = \sum_{j=1}^d A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j), \quad A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) x_j = B_d(x),$$

получим

$$\begin{aligned}
P^\kappa_d(x) &= \sum_{j=1}^d A^d_j(x) P^\kappa_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \\
&= \sum_{j=1}^d A^d_j(x)(Q_{d-1}(\widehat{x}_j)(\sigma_{d-1,1}(\widehat{x}_j) - \kappa) - S_{d-1}(\widehat{x}_j)) + B_d(x) \\
&= \sum_{j=1}^d A^d_j(x)(Q_{d-1}(\widehat{x}_j)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa - x_j) - S_{d-1}(\widehat{x}_j)) + B_d(x) \\
&= (\sigma_{d,1}(x) - \kappa) \sum_{j=1}^d A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) \\
&\quad - \sum_{j=1}^d A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) x_j - \sum_{j=1}^d A^d_j(x) S_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \\
&= Q_d(x)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa) - \sum_{j=1}^d A^d_j(x) S_{d-1}(\widehat{x}_j) - (d-1) B_d(x) \\
&= Q_d(x)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa) - S_d(x).
\end{aligned}$$

Из предположения индукции следует, что при $x \ge \mathbf{0}$

$$S_d(x) = \sum_{j=1}^d A^d_j(x) S_{d-1}(\widehat{x}_j) + (d-1) B_d(x) \ge 0.$$

Покажем теперь, что выполняется и аналог второго соотношения. А именно, для любого $1 \le k \le d$ при всех $x \in \mathbb{R}^d$

$$P_d^\kappa(x) = R_d(x) - \kappa Q_d(x) = R_d(x) - x_k Q_d(x) - (\kappa - x_k) Q_d,$$

где $R_d(x) \ge x_k Q_d(x)$ при $x \ge \mathbf{0}$. Действительно, учитывая (15), по индукции имеем

$$R_d(x) = \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_j) + A_k^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_k) + B_d(x)$$
$$\ge x_k \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) = x_k Q_d(x).$$

Лемма 4. *Для любого $1 \le k \le d$ справедливо представление*

$$P_d^\kappa(x) = M_d^k(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + N_d^k(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где $M_d^k(x), N_d^k(x) \ge 0$ при $x \ge \mathbf{0}$.

Доказательство. Покажем по индукции, что

$$M_d^k(x) = \sigma_{d,d-1}(x) \prod_{j=1, j\neq k}^{d} Q_{d-1}(\widehat{x}_j),$$

а $N_d^k(x)$ будет определяться рекуррентным соотношением. Нетрудно видеть, что для $d = 2$ утверждение справедливо:

$$P_2^\kappa(x) = (x_1 + x_2)(x_1 - \kappa) + x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_2 - \kappa) + x_1^2,$$

т. е. $M_2^1(x) = M_2^2(x) = x_1 + x_2 = \sigma_{2,1}(x)$, $N_2^1(x) = x_1^2$, $N_2^2(x) = x_2^2$.

Предположим, что утверждение верно для всех номеров вплоть до $d-1$, и докажем его для d. Исходя из предположения, получим

$$P_d^\kappa(x) = \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j) + A_k^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + B_d(x)$$
$$= \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) \big(M_{d-1}^k(\widehat{x}_j) P_{d-2}^\kappa(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + N_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j) \big) + A_k^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + B_d(x)$$
$$= A_k^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + \left(\sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j) P_{d-2}^\kappa(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x) \right)$$
$$+ \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) N_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j).$$

Последнее слагаемое обозначим через $N_d^k(x)$, а для суммы первых двух покажем, что это $M_d^k(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k)$. Преобразуем произведение $A_j^d(x) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j)$, учитывая равенство

$$M_d^k(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_k) = Q_d(x).$$

Имеем

$$A_j^d(x) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j) = x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \Big(\prod_{l\neq j, l\neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) Q_{d-1}(\widehat{x}_k) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \Big(\prod_{l \neq j, l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) \Big(\sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \\
&\quad \times \prod_{q \neq k, q \neq j} Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_q) \Big) Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_j) M^k_{d-1}(\widehat{x}_j) \\
&= x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \Big(\prod_{l \neq j, l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) \Big(\sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{q \neq k, q \neq j} Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_q) \Big) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) \\
&= x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big(x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots \widehat{x}_k \cdots x_d \prod_{q \neq k, q \neq j} Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_q) \Big) \\
&= x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) A^{d-1}_j(\widehat{x}_k).
\end{aligned}
$$

Подставим полученное выражение в исходную сумму и получим

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1, j \neq k}^{d} A^d_j(x) M^k_{d-1}(\widehat{x}_j) P^\kappa_{d-2}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x) \\
&\quad = \sum_{j=1, j \neq k}^{d} \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) A^{d-1}_j(\widehat{x}_k) \Big) P^\kappa_{d-2}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x) \\
&\quad = \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) \sum_{j=1, j \neq k}^{d} A^{d-1}_j(\widehat{x}_k) P^\kappa_{d-2}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x) \\
&\quad = \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) (P^\kappa_{d-1}(\widehat{x}_k) - B_{d-1}(\widehat{x}_k)) + B_d(x) \\
&\quad = \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) P^\kappa_{d-1}(\widehat{x}_k).
\end{aligned}
$$

В последнем равенстве использовано легко проверяемое соотношение

$$
B_d(x) = x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) B_{d-1}(\widehat{x}_k).
$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
&x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) B_{d-1}(\widehat{x}_k) \\
&\quad = x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \sigma_{d-1,d-1}(\widehat{x}_k) \prod_{j \neq k} Q_{d-2}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) \\
&\quad = \sigma_{d,d}(x) \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \prod_{j \neq k} Q_{d-2}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) \\
&\quad = \sigma_{d,d}(x) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) Q_{d-1}(\widehat{x}_k) = B_d(x).
\end{aligned}
$$

Осталось убедиться, что выражение перед $P^\kappa_{d-1}(\widehat{x}_k)$ является многочленом

$M_d^k(x)$. Действительно,

$$A_d^k(x) + x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) =$$

$$= x_1 \cdots \widehat{x}_k \cdots x_d \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) + x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l)$$

$$= \sigma_{d,d-1}(x) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) = M_d^k(x). \quad \square$$

4.2. Итерационная система линейных уравнений. Наша цель в этом параграфе — показать, что каждая точка из множества $\ker P_d^\kappa$ нетривиальных нулей многочлена P_d^κ является решением некоторой системы линейных уравнений. При этом система получается из уравнения $x_1 - \kappa = 0$ с помощью итерационной процедуры. Опишем сначала эту линейную систему и итерационную процедуру.

Пусть уже имеется система $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1, \ldots, x_d)$, состоящая из $d!$ линейных уравнений от неизвестных $x_1, \ldots, x_d$ с параметрами $\mathscr{P}_d$. Полагаем $\mathscr{P}_1 = \varnothing$. Множество параметров $\mathscr{P}_d$, $d \geq 2$, состоит из наборов вероятностных векторов

$$p^k(m|d) = \big(p_1^k(m|d), p_2^k(m|d), \ldots, p_m^k(m|d)\big),$$

где $m = 2, \ldots, d$ — размерность вероятностного вектора, $k = 1, \ldots, \frac{d!}{m!}$ отвечает за нумерацию m-мерных векторов. Вероятностность вектора $p^k(m|d)$ означает, что все его координаты неотрицательны и в сумме дают 1.

Переход от системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1, \ldots, x_d)$ к системе $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_{d+1}}(x_1, \ldots, x_{d+1})$ состоит из двух шагов. На первом шаге к каждому из $d!$ уравнений прибавляем выражение $p^1_{d+1}(d+1|d+1)x_{d+1}$ и заменяем входящие вероятностные параметры системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1, \ldots, x_d)$ аналогичными из множества $\mathscr{P}_{d+1}$. Второй шаг состоит в симметризации полученной на первом шаге системы. А именно, добавляется еще d таких же систем уравнений, только с циклически переставленными переменными и с новыми вероятностными параметрами. Проиллюстрируем процедуру на системах малой размерности:

$$\mathscr{L}^\kappa_{\varnothing}(x_1)\colon x_1 - \kappa = 0 \overset{1\text{ шаг}}{\Rightarrow} p_2^1(2|2)x_2 + x_1 - \kappa = 0 \overset{2\text{ шаг}}{\Rightarrow} \begin{cases} p_2^1(2|2)x_2 + x_1 - \kappa = 0, \\ p_1^1(2|2)x_1 + x_2 - \kappa = 0, \end{cases}$$

$$\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_2}(x_1, x_2)\colon \begin{cases} p_2^1(2|2)x_2 + x_1 - \kappa = 0, \\ p_2^1(2|2)x_1 + x_2 - \kappa = 0 \end{cases} \overset{1\text{ шаг}}{\Rightarrow} \begin{cases} p_3^1(3|3)x_3 + p_2^1(2|3)x_2 + x_1 - \kappa = 0, \\ p_3^1(3|3)x_3 + p_1^1(2|3)x_1 + x_2 - \kappa = 0 \end{cases}$$

$$\overset{2\text{ шаг}}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} p_3^1(3|3)x_3 + p_2^1(2|3)x_2 + x_1 - \kappa = 0, \\ p_3^1(3|3)x_3 + p_1^1(2|3)x_1 + x_2 - \kappa = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} p_2^1(3|3)x_2 + p_2^2(2|3)x_3 + x_1 - \kappa = 0, \\ p_2^1(3|3)x_2 + p_1^2(2|3)x_1 + x_3 - \kappa = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} p_1^1(3|3)x_1 + p_2^3(2|3)x_2 + x_3 - \kappa = 0, \\ p_1^1(3|3)x_1 + p_1^3(2|3)x_3 + x_2 - \kappa = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отметим, что множество параметров $\mathscr{P}_{d+1}$ можно представить как объединение $(d+1)$-го множества параметров $\mathscr{P}_d^j$, $j = 1, \ldots, d+1$, и одного $(d+1)$-мерного вероятностного вектора $p^1(d+1|d+1)$. Система $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_{d+1}}(x_1, \ldots, x_{d+1})$ представляется как совокупность из $(d+1)$-й системы линейных уравнений

$$\mathscr{L}^{\kappa - p_j^1(d+1|d+1)x_j}_{\mathscr{P}_d^j}(x_1, \ldots \widehat{x}_j, \ldots, x_d).$$

Предложение 4. *Пусть $\kappa \geq 0$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \geq \mathbf{0}$. Точка $\boldsymbol{\alpha}$ принадлежит $\ker P_d^\kappa$ тогда и только тогда, когда найдется набор параметров $\mathscr{P}_d$ таких, что $\boldsymbol{\alpha}$ является решением системы линейных уравнений $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1, \ldots, x_d)$.*

Доказательство. Для $\kappa = 0$ утверждение очевидно. Для $\kappa > 0$ применим индукцию. Для $d = 1$ все очевидно. Для $d = 2$ решение системы из двух уравнений

$$p_2^1(2|2)\alpha_2 + \alpha_1 - \kappa = 0, \quad p_1^1(2|2)\alpha_1 + \alpha_2 - \kappa = 0$$

после умножения первого уравнения на α_1, второго на α_2 и сложения их вместе приводит к равенству $P_2^\kappa(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. При этом ясно, что координаты α_1 и α_2 не зануляются одновременно. Обратно, имея равенство $P_2^\kappa(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, где координаты α_1 и α_2 не зануляются одновременно, из леммы 3 получим, что числа

$$p_2^1(2|2) = \frac{\kappa - \alpha_1}{\alpha_2}, \quad p_1^1(2|2) = \frac{\kappa - \alpha_2}{\alpha_1}$$

образуют вероятностный вектор. При этом $\boldsymbol{\alpha}$ — решение системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_2}(x_1, x_2)$.

Предположим, что утверждение верно для всех размерностей вплоть до $d-1$, и докажем его для d. Сначала будем считать, что $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$ является решением системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1, \ldots, x_d)$. Если $\alpha_j = \kappa$ для некоторого j, то все остальные координаты $\boldsymbol{\alpha}$ равны нулю и, следовательно, $\boldsymbol{\alpha}$ является нетривиальным нулем многочлена P_d^κ. Пусть теперь $0 \leq \alpha_j < \kappa$ для всех j, тогда и $0 \leq p_j^1(d|d)\alpha_j < \kappa$. При этом получаем d систем

$$\mathscr{L}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}_{\mathscr{P}^j_{d-1}}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_d),$$

решением которых будет $\boldsymbol{\alpha}$. Поскольку эти системы уже размерности $d-1$, по предположению индукции получаем, что

$$(\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_d) \in \ker P_{d-1}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j},$$

т. е. имеем нетривиальное решение уравнений

$$P_{d-1}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}(\widehat{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, d.$$

По лемме 1 эти уравнения переписываются как

$$R_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) - (\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j)Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) = P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + p_j^1(d|d)\alpha_j Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) = 0.$$

Домножая эти равенства на $A_j^d(\boldsymbol{\alpha})$ и складывая их вместе, получим

$$\sum_{j=1}^d A_j^d(\boldsymbol{\alpha}) P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + \sum_{j=1}^d A_j^d(\boldsymbol{\alpha}) p_j^1(d|d)\alpha_j Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^d A_j^d(\boldsymbol{\alpha}) P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + B_d(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{j=1}^d p_j^1(d|d) = P_d^\kappa(\boldsymbol{\alpha}) = 0.$$

При этом $\boldsymbol{\alpha}$ является нетривиальным решением, поскольку иначе нашлись бы две координаты нулевые, а остальные могли принимать произвольные значения, но это противоречило бы нетривиальности $(\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_d)$ для многочленов меньшей размерности.

Пусть теперь $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$. Рассмотрим проекции $\boldsymbol{\alpha}$ на координатные гиперплоскости: $[\boldsymbol{\alpha}]_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \ldots, \alpha_d)$. По лемме 2 найдутся числа $\kappa_j \geq 0$ такие, что

$$[\boldsymbol{\alpha}]_j \in \ker P_{d-1}^{\kappa_j}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Из леммы 4 получим, что

$$0 = P_d^\kappa(\boldsymbol{\alpha}) = M_d^j(\boldsymbol{\alpha}) P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + N_d^j(\boldsymbol{\alpha}) = M_d^j\big(\boldsymbol{\alpha})(P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) - P_{d-1}^{\kappa_j}([\boldsymbol{\alpha}]_j)\big) + N_d^j(\boldsymbol{\alpha})$$
$$= M_d^j(\boldsymbol{\alpha})(\kappa_j - \kappa) Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) + N_d^j(\boldsymbol{\alpha}).$$

Отсюда заключаем, что $\kappa_j \leq \kappa$. Поэтому найдутся числа $0 \leq p_j^1(d|d) \leq 1$ такие, что $\kappa_j = \kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j$ (мы знаем, что $0 \leq \alpha_j \leq \kappa$). Таким образом,

$$(\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_d) \in \ker P_{d-1}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}.$$

По предположению индукции найдутся d множеств параметров $\mathscr{P}_{d-1}^j$ таких, что $\boldsymbol{\alpha}$ является решением совокупности систем

$$\mathscr{L}_{\mathscr{P}_{d-1}^j}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_d).$$

Это эквивалентно для $\boldsymbol{\alpha}$ быть решением одной системы $\mathscr{L}_{\mathscr{P}_d}^\kappa(x_1, \ldots, x_d)$ с параметрами

$$\mathscr{P}_d = \bigcup_{j=1}^d \mathscr{P}_{d-1}^j \cup \{p_j^1(d|d),\ j = 1, \ldots, d\}. \tag{16}$$

При этом вектор $p^1(d|d)$ с необходимостью вероятностный. □

4.3. Основной результат. Для группы $\mathbb{R}^d$ и $f \in L_2(\Omega, \lambda)$ предполагается выполненной степенная оценка (4) спектральной меры симметричных промежутков. Рассмотрим «крестообразные» множества E_u^d, $u \in (0, 1)$, определяемые как

$$E_u^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}| < 1/u,\ 1 \leq k \leq d,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq d\}.$$

Для произвольной итерационной системы $\mathscr{L}_{\mathscr{P}_d}^\kappa(x_1, \ldots, x_d)$ линейных уравнений обозначим входящие в нее линейные функции без слагаемого $-\kappa$ через $\ell_{\mathscr{P}_d}^j(x)$, $j = 1, \ldots, d!$, занумерованные в произвольном порядке. Положим

$$\ell_{\mathscr{P}_d}^j(x) = \sum_{k=1}^d q_{d,k}^j x_k.$$

Ясно, что коэффициенты $q_{d,k}^j$ принадлежат множеству параметров $\mathscr{P}_d$.

Лемма 5. *Для произвольного множества параметров* $\mathscr{P}_d$

$$E_u^d \subset \bigcup_{j=1}^{d!} \Pi\left(\frac{1}{u^{q_{d,1}^j}}, \ldots, \frac{1}{u^{q_{d,d}^j}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Применим индукцию по d. Случай $d = 1$ очевиден, а $d = 2$ фактически разобран при доказательстве теоремы 3. Предположим, что утверждение доказано для размерности $d - 1$, и докажем его для d. Представим множество параметров в виде (16).

Рассмотрим точку $\left(\frac{1}{u^{p_1^1(d|d)}}, \ldots, \frac{1}{u^{p_d^1(d|d)}}\right) \in \mathbb{R}^d$ и проведем через нее гиперплоскости, параллельные координатным гиперплоскостям. С помощью разрезов этими гиперплоскостями множества E_u^d можно увидеть, что

$$E_u^d \subset \bigcup_{n=1}^{d} E_u^{d-1}(n) \times \left(-\frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}, \frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}\right], \tag{18}$$

где $E_u^{d-1}(n)$ есть $(d-1)$-мерное «крестообразное» множество, в котором нет переменной x_n, переменная x_n принадлежит $\left(-\frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}, \frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}\right]$. По предположению индукции каждое множество $E_u^{d-1}(n)$ содержится в объединении $(d-1)!$ промежутков:

$$E_u^{d-1}(n) \subset \bigcup_{j=1}^{(d-1)!} \Pi\left(\frac{1}{u^{q_{d-1,1}^j(n)}}, \ldots, \frac{1}{u^{q_{d-1,d-1}^j(n)}}\right), \tag{19}$$

где параметры $q_{d-1,k}^j(n) \in \mathscr{P}_{d-1}^n$ появляются в выражении функции

$$\ell^j_{\mathscr{P}_{d-1}^n}(\widehat{x}_n) = \sum_{k=1,k\neq n}^{d} q_{d-1,k}^j(n) x_k.$$

Соединив включения (18) и (19), получим

$$E_u^d \subset \bigcup_{n=1}^{d} \bigcup_{j=1}^{(d-1)!} \Pi\left(\frac{1}{u^{q_{d-1,1}^j(n)}}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}}_{n\text{-я коорд.}}, \ldots, \frac{1}{u^{q_{d-1,d-1}^j(n)}}\right).$$

Остается заметить, что $\ell^j_{\mathscr{P}_{d-1}^n}(\widehat{x}_n) + p_n^1(d|d)x_n = \ell^{\widetilde{j}}_{\mathscr{P}_d}(x)$ для некоторого $1 \le \widetilde{j} \le d!$. $\square$

Для $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d$ положим $\phi_{\mathbf{t}}(x) = \left(\frac{t_1 x_1}{2}, \ldots, \frac{t_d x_d}{2}\right)$.

Лемма 6. *Пусть имеет место степенная оценка* (4) *спектральной меры* σ_f. *Тогда для произвольного множества параметров* $\mathscr{P}_d$

$$\sigma_f\left(\phi_{\mathbf{t}}^{-1}(E_u^d)\right) \le \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} \frac{1}{u^{\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha})}}. \tag{20}$$

Доказательство. По лемме 5 имеем

$$\phi_{\mathbf{t}}^{-1}(E_u^d) \subset \bigcup_{j=1}^{d!} \phi_t^{-1}\left(\Pi\left(\frac{1}{u^{q_{d,1}^j}}, \ldots, \frac{1}{u^{q_{d,d}^j}}\right)\right) = \bigcup_{j=1}^{d!} \Pi\left(\frac{2}{t_1 u^{q_{d,1}^j}}, \ldots, \frac{2}{t_d u^{q_{d,d}^j}}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\sigma_f\left(\phi_{\mathbf{t}}^{-1}(E_u^d)\right) &\le \sum_{j=1}^{d!} \sigma_f\left(\Pi\left(\frac{2}{t_1 u^{q_{d,1}^j}}, \ldots, \frac{2}{t_d u^{q_{d,d}^j}}\right)\right) \\
&\le A \sum_{j=1}^{d!} \left(\frac{2}{t_1 u^{q_{d,1}^j}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{2}{t_d u^{q_{d,d}^j}}\right)^{\alpha_d} \\
&= \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} u^{-(\alpha_1 q_{d,1}^j + \cdots + \alpha_d q_{d,d}^j)} = \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} \frac{1}{u^{\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha})}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Сформулируем основной результат этого раздела, частным случаем которого является теорема 3.

Теорема 4. *Если имеет место степенная оценка* (4) *спектральной меры* σ_f, *то*

(1) *если* $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$, $\kappa \in [0,2)$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha_1} \cdots t_d^{-\alpha_d}\big)$, $t_1,\dots,t_d \to \infty$;

(2) *если* $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^2$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha_1} \cdots t_d^{-\alpha_d} \ln\big(t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}\big)\big)$, $t_1,\dots,t_d \to \infty$;

(3) *если* $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$, $\kappa > 2$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\frac{2\alpha_1}{\kappa}} \cdots t_d^{-\frac{2\alpha_d}{\kappa}}\big)$, $t_1,\dots,t_d \to \infty$.

Доказательство. Учитывая неравенство (20) в лемме 6, для любого $\varepsilon \in [0,1)$ имеем

$$\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|\frac{2\sin\big(\frac{t_1x_1}{2}\big)}{t_1x_1} \cdots \frac{2\sin\big(\frac{t_dx_d}{2}\big)}{t_dx_d}\right| > u\right\}\right) du$$
$$\le 2\int_0^\varepsilon u\|f\|_2^2\,du + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\phi_{\mathbf{t}}^{-1}\big(E_u^d\big)\right) du$$
$$= \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2\int_\varepsilon^1 u\frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})}A}{t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} \frac{1}{u^{\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha})}}\,du.$$

Поскольку $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$, по предложению 4 для всех $j = 1,\dots,d!$ имеются равенства $\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha}) = \kappa$. Отсюда

$$\|A_tf\|_2^2 \le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2d!\frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})}A}{t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}}\int_\varepsilon^1 u^{1-\kappa}\,du.$$

Дальше применяем такие же рассуждения, как в теореме 3 для случая $d = 2$. $\square$

4.4. Окрестности нуля в виде кубов. Для исследования степенной сходимости эргодических средних $A_{\mathbf{t}}f$ и $A_{\mathbf{n}}f$, построенных вдоль d-мерных кубов (т. е. $t_1 = \dots = t_d$ и $n_1 = \dots = n_d$), можно рассматривать степенную особенность спектральной меры только окрестностей нуля в виде d-мерных кубов. Предположим, что выполняется неравенство

$$\sigma_f((-\varepsilon,\varepsilon]^d) \le A\varepsilon^\alpha$$

для некоторых $A > 0$, $\alpha \ge 0$ при всех $\varepsilon > 0$. В этом случае степенная оценка эргодических средних с тем же показателем α получается только для $\alpha \in [0,2)$. Покажем это снова на примере группы $\mathbb{R}^d$. Здесь воспользуемся наилучшим вложением множества $\phi_{t\cdot\mathbf{1}}^{-1}E_u^d$ в d-мерный куб:

$$\phi_{t\cdot\mathbf{1}}^{-1}E_u^d \subset \left(-\frac{2}{tu},\frac{2}{tu}\right]^d, \quad t > 0,\ u \in (0,1).$$

Тогда

$$\|A_{t\cdot\mathbf{1}}f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left|\frac{2\sin\big(\frac{tx_1}{2}\big)}{tx_1} \cdots \frac{2\sin\big(\frac{tx_d}{2}\big)}{tx_d}\right| > u\right\}\right) du$$
$$\le 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\phi_{t\cdot\mathbf{1}}^{-1}\big(E_u^d\big)\right) du \le 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{2}{tu},\frac{2}{tu}\right]^d\right) du \le 2A\int_0^1 u\left(\frac{2}{tu}\right)^\alpha du$$

$$= \frac{2^{1+\alpha}A}{t^\alpha(2-\alpha)} = \mathscr{O}(t^{-\alpha}).$$

Если применить п. (1) теоремы 4 при $t_1 = \dots = t_d$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d = \alpha$, то также получим $\|A_{t\cdot\mathbf{1}}f\|_2^2 = \mathscr{O}(t^{-\alpha})$ при $t \to \infty$. Но при этом α может принимать значения из полуинтервала $[0, \alpha_0)$, где

$$\alpha_0 := \sup_{P_d^\kappa(\alpha_1,\dots,\alpha_d)=0,\kappa\in[0,2)} \alpha = \sup_{P_d^2(\alpha/d,\dots,\alpha/d)=0} \alpha > 2.$$

Таким образом, диапазон показателей степени особенности спектральной меры, для которых нами доказана такая же степенная скорость сходимости, показывает, что для получения оценок скорости сходимости для усреднений вдоль кубов тоже естественнее исследовать спектральную меру окрестностей нуля в виде параллелепипедов (а не кубов). С другой стороны, даже для параллелепипедов мы не получили оценки для всего возможного диапазона показателей степени скорости сходимости соответствующих эргодических средних. Например, интересны показатели, близкие к максимально возможной скорости (см. [18, 19]). Поэтому, возможно, при усреднении вдоль параллелепипедов нужно рассматривать спектральные меры более «хитрых» окрестностей нуля. Это тема для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dunford N.* An individual ergodic theorem for non-commutative transformations // Acta Sci. Math. (Szeged). 1951. V. 14. P. 1–4.

2. *Zygmund A.* An individual ergodic theorem for non-commutative transformations // Acta Sci. Math. (Szeged). 1951. V. 14. P. 103–110.

3. *Krengel U.* Ergodic theorems. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1985.

4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Часть 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

5. *Karagulyan G. A., Lacey M. T., Martirosyan V. A.* On the convergence of multiple ergodic means // New York J. Math. 2022. V. 28. P. 1448–1462.

6. *Tempelman A.* Ergodic theorems for group actions. Informational and thermodynamical aspects. Dordrecht: Springer-Verl., 1992. (MAIA; V. 78).

7. *Nevo A.* Pointwise ergodic theorems for actions of groups // Handbook of dynamical systems. 2006. V. 1. Part B. P. 871–982.

8. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1, 2. М.: Мир, 1975.

9. *Folland G. B.* A course in abstract harmonic analysis. Boca Raton: CRC Press, 1995.

10. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.

11. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Тр. Моск. мат. о-ва. 2016. Т. 77, № 1. С. 1–66.

12. *Богачев В. И.* Теория меры. М.; Ижевск: РХД, 2003. Т. 2.

13. *Богачев В. И.* Теория меры. М.-Ижевск: РХД, 2003. Т. 1.

14. *Качуровский А. Г.* О сходимости средних в эргодической теореме для групп $\mathbb{Z}^d$ // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1999. Т. 256. С. 121–128.

15. *Tempelman A.* Randomized consistent statistical inference for random processes and fields // Stat. Inference Stoch. Process. 2022. V. 25. P. 599–627.

16. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э.* Uniform convergence on subspaces in von Neumann's ergodic theorem with continuous time // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 183–206.

17. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Хакимбаев А. Ж.* Равномерная сходимость на подпространствах в эргодической теореме фон Неймана с дискретным временем // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 713–730.

18. *Cohen G., Lin M.* Double coboundaries for commuting contractions // Pure Appl. Funct. Anal. 2017. V. 2, N 1. P. 11–36.

19. *Cohen G., Lin M.* Joint and double coboundaries of commuting contractions // Indiana Univ. Math. J. 2021. V. 70, N 4. P. 1355–1394.

Поступила в редакцию 28 июня 2023 г.
После доработки 28 июня 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Качуровский Александр Григорьевич (ORCID 0000-0002-2747-2660),
Подвигин Иван Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
agk@math.nsc.ru, ipodvigin@math.nsc.ru

Тодиков Владислав Эдуардович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский технический государственный университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630073
v.todikov@g.nsu.ru

Хакимбаев Азиз Жамалатдин улы
Новосибирский государственный университет,
механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
a.khakimbaev@g.nsu.ru