Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.545

О КЛАССЕ ЛЕВИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ ПРАВОУПОРЯДОЧИВАЕМЫХ ГРУПП

А. В. Зенков

Аннотация. Показано, что класс Леви квазимногообразия правоупорядочиваемых групп строго содержит это квазимногообразие.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.105

Ключевые слова: класс Леви, правоупорядочиваемая группа, квазимногообразие.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *правоупорядочиваемой*, если на ней можно ввести отношение линейного порядка $\geq$, устойчивое относительно умножения справа, т. е. для любых $x, y, z \in G$ неравенство $x \geq y$ влечет $xz \geq yz$.

Непосредственно из определения правоупорядочиваемой группы вытекает, что она не имеет кручения. Также хорошо известно (см., например, [1]), что класс $\mathscr{D}_r$ всех правоупорядочиваемых групп образует квазимногообразие.

Замечание. Если в определении правоупорядочиваемой группы заменить требование устойчивости порядка при умножении справа устойчивостью при двухстороннем умножении, то получим определение *упорядочиваемой* группы. Разумеется, любая упорядочиваемая группа будет правоупорядочиваемой.

Пусть G — произвольная группа и $x \in G$. Через $G_x = (x^G)$ обозначим нормальное замыкание элемента x в группе G. Для произвольного класса групп $\mathscr{K}$ определим его *класс Леви* $L(\mathscr{K})$ следующим образом: группа G принадлежит $L(\mathscr{K})$ тогда и только тогда, когда $G_x \in \mathscr{K}$ для каждого $x \in G$.

Понятие класса Леви было введено в [2] под влиянием работы Леви [3], где изучались группы с *абелевыми* нормальными замыканиями элементов. В работе [4] показано, что класс Леви любого многообразия является многообразием. Аналогичный результат верен и для квазимногообразий [5]. Классы Леви конкретных (в основном, нильпотентных) квазимногообразий изучались В. В. Лодейщиковой в [6–8] и С. А. Шаховой [9, 10].

Непосредственно из определения класса Леви следует: 1) оператор L сохраняет отношение теоретико-множественного включения, 2) если класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $\mathscr{K} \subseteq L(\mathscr{K})$.

Стало быть, имеет место $\mathscr{D}_r \subseteq L(\mathscr{D}_r)$. Основной результат состоит в том, что последнее включение на самом деле *строгое*. Именно, существует не правоупорядочиваемая группа без кручения, нормальное замыкание каждого элемента которой правоупорядочиваемо.

Все необходимые сведения по теории правоупорядочиваемых групп можно найти в [1], по теории групп — в [11].

2. Основной результат

Рассмотрим два отображения $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определяемые по правилу

$$a(x, y, z) = (x + 1, 1 - y, -z), \quad b(x, y, z) = (-x, y + 1, 1 - z). \tag{1}$$

Обозначим через $\mathbb{G}$ группу преобразований пространства $\mathbb{R}^3$, порожденную этими элементами. Эта группа отмечена в [12, с. 13]. Вычислим действие отображения ab в $\mathbb{R}^3$, т. е.

$$ab(x, y, z) = a(-x, y + 1, 1 - z) = (1 - x, -y, z - 1).$$

Стало быть,

$$(ab)^2(x, y, z) = (x, y, z - 2). \tag{2}$$

Аналогично проверяется справедливость следующих формул:

$$(ba)^2(x, y, z) = (x, y, z + 2), \tag{3}$$

$$a^2(x, y, z) = (x + 2, y, z), \tag{4}$$

$$b^2(x, y, z) = (x, y + 2, z), \tag{5}$$

$$(b^2)^a(x, y, z) = (x, y - 2, z), \tag{6}$$

$$(a^2)^b(x, y, z) = (x - 2, y, z), \tag{7}$$

$$((ab)^2)^a(x, y, z) = (x, y, z + 2), \tag{8}$$

$$((ab)^2)^b(x, y, z) = (x, y, z + 2). \tag{9}$$

Пусть $c = (ab)^2$. Тогда в силу формулы (3) имеем $(ba)^2 = c^{-1}$. Из формул (2), (4), (5) следует, что элементы a^2, b^2, c попарно перестановочны, т. е.

$$[a^2, c] = [b^2, c] = [a^2, b^2] = e. \tag{10}$$

Соотношения (6)–(9) показывают, что

$$(a^2)^b = a^{-2}, \quad (b^2)^a = b^{-2}, \tag{11}$$

$$c^a = c^b = c^{-1}. \tag{12}$$

Рассмотрим произвольный элемент $g \in \mathbb{G}$. В силу формулы (11) можно утверждать, что $g = g' a^{2\alpha} b^{2\beta}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и

$$g' = a^{\varepsilon_1} b \cdot \ldots \cdot ab^{\delta_s} \tag{13}$$

и ε_1, δ_s равны 0 или 1.

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 = 1$ (несобранная часть g' элемента g начинается с a). Далее, если $\delta_s = 1$, то $g' = (ab)^s$. Пусть $s = 2\gamma + r$, r равно 0 или 1. Тогда $g' = c^\gamma (ab)^r$. Следовательно,

$$g = \begin{cases} c^\gamma a^{2\alpha} b^{2\beta}, & \text{если } s = 2\gamma, \\ c^\gamma a^{-2\alpha} b^{-2\beta}(ab), & \text{если } s = 2\gamma + 1. \end{cases}$$

Пусть теперь $\delta_s = 0$. Тогда $g' = (ab)^s b^{-1}$ и поэтому $g = (ab)^s a^{-2\alpha} b^{2\beta - 2} b$. Стало быть,

$$g = \begin{cases} c^\gamma a^{-2\alpha} b^{2\beta-2} b, & \text{если } s = 2\gamma, \\ c^\gamma a^{2\alpha} b^{-2\beta} a, & \text{если } s = 2\gamma + 1. \end{cases}$$

Аналогичные формулы можно получить и в случае, когда несобранная часть g' элемента g начинается с b ($\varepsilon_1 = 0$). Таким образом, произвольный элемент $g \in \mathbb{G}$ можно представить в виде

$$g = c^{\gamma} a^{2\alpha} b^{2\beta} a^{\varepsilon} b^{\delta}, \tag{14}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ и ε, δ равны 0 или 1.

Пусть $\mathbb{H} = gr(c, a^2, b^2)$. Из сказанного выше следует, что $\mathbb{H} = (c) \times (a^2) \times (b^2)$ и $\mathbb{H} \lhd \mathbb{G}$.

Покажем, что $[a, b] \in \mathbb{H}$. Действительно, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-2}b^2abab = cb^2a^{-2} \in \mathbb{H}$. Отсюда немедленно следует, что коммутант $\mathbb{G}'$ группы $\mathbb{G}$ содержится в $\mathbb{H}$. Поэтому $\mathbb{H}ab = \mathbb{H}ba$. Очевидно, $\mathbb{H}b = \mathbb{H}b^{-1}, \mathbb{H}a = \mathbb{H}a^{-1}$. Таким образом, имеет место следующее разложение группы $\mathbb{G}$ в объединение правых смежных классов:

$$\mathbb{G} = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}a \cup \mathbb{H}b \cup \mathbb{H}ab. \tag{15}$$

Ясно, что для любого $g \in \mathbb{G}$ верно $g^2 \in \mathbb{H}$. Поэтому для доказательства отсутствия кручения достаточно заметить, что для всякого неединичного элемента его квадрат также отличен от единицы. Пусть, например, $g = h(ab)$, где $h = c^{\gamma}a^{2\alpha}b^{2\beta} \in \mathbb{H}$. Тогда

$$g^2 = h(ab)h(ab) = c^{\gamma}a^{2\alpha}b^{2\beta}c^{\gamma}a^{-2\alpha}b^{-2\beta}(ab)^2 = c^{2\gamma+1} \neq e.$$

Оставшиеся случаи проверяются так же.

Покажем, что $\mathbb{G}$ не правоупорядочиваема. Пусть это не так и на $\mathbb{G}$ задан правый линейный порядок $\geq$. Не ограничивая общности можно считать, что $c \geq e \geq c^{-1}$. Ввиду изолированности порядка получаем, что $ab \geq e \geq ba$. Поэтому элементы a и b имеют разные знаки. Предположим, что элемент a положителен. Тогда $a \geq b^{-1} \geq e$. Отсюда $a^2b^{-1} \geq b^{-1}ab^{-1}$. Стало быть, $b^{-1}a^{-1} \geq b^{-1}ab^{-1}a \geq e$, что ведет к противоречию: $(ab)^{-1} \geq e$. Случай $a^{-1} \geq b \geq e$ разбирается аналогично.

Стандартно через $sgr(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ обозначаем подполугруппу группы G, порожденную элементами $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нам потребуется следующий (полугрупповой) критерий правоупорядочиваемости [1, с. 48]: *группа G правоупорядочиваема тогда и только тогда, когда для любых неединичных $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ найдутся такие $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \ldots, n$, что $e \notin sgr(y_1^{\varepsilon_1}, \ldots, y_n^{\varepsilon_n})$.*

Доказательство того, что для каждого $x \in \mathbb{G}$ группа $\mathbb{G}_x$ правоупорядочиваема, распадается на четыре случая (по количеству правых смежных классов).

Случай 1: $x \in \mathbb{H}$. В этом случае $\mathbb{G}_x \leq \mathbb{H}$ и поэтому упорядочиваема.

Случай 2: $x \in \mathbb{H}a$, т. е. $x = ha$, где $h \in \mathbb{H}$. Пусть $g \in \mathbb{G}$. Тогда $x^g = (h^g[g, a^{-1}])a = h_1a$, где $h_1 = h^g[g, a^{-1}] \in \mathbb{H}$. Так как $x^{-1} = \widetilde{h}a$, где $\widetilde{h} = (h^{-1})^a a^{-2}$, то, повторяя для x^{-1} рассуждения, проведенные выше, получаем, что $(x^{\pm 1})^g = h^* a$ для подходящего $h^* \in \mathbb{H}$.

Следовательно, в рассматриваемом случае всякий элемент $y \in \mathbb{G}_x$ имеет вид

$$y = ha^{\delta}, \tag{16}$$

где $h = c^{\gamma}a^{2\alpha}b^{2\beta} \in \mathbb{H}$, δ равно 0 или 1. Более точно, выпишем y^{-1} в случае, когда $\delta = 1$. В этом случае $y = c^{\gamma}b^{2\beta}a^{2\alpha+1}$ и поэтому $y^{-1} = c^{\gamma}b^{2\beta}a^{-(2\alpha+1)}$. Если $\delta = 0$, то, очевидно, что $y^{-1} = c^{-\gamma}b^{-2\beta}a^{-2\alpha}$. В дальнейшем степень, например, элемента a в записи элемента y обозначаем через $\deg_y(a)$. Используя введенное обозначение, сказанное выше можно записать так:

$$\deg_y(a) \geq 0 \Longleftrightarrow \deg_{y^{-1}}(a) \leq 0.$$

Пусть даны неединичные элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{G}_x$. Для каждого y_i подбираем степень ε_i в следующей последовательности:

1) если $\deg_{y_i}(a) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(a) > 0$;

2) если $\deg_{y_i}(a) = 0$ и $\deg_{y_i}(b) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(b) > 0$;

3) если $\deg_{y_i}(a) = \deg_{y_i}(b) = 0$, то $\deg_{y_i}(c) \neq 0$ и тогда ε_i такое, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(c) > 0$.

Элемент $z \in sgr(y_1^{\varepsilon_1}, \ldots, y_n^{\varepsilon_n})$ имеет вид

$$z = y_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \cdot \ldots \cdot y_{i_t}^{\varepsilon_{i_t}}, \tag{17}$$

где $t > 0$. Если найдется $y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ такой, что $\deg_{y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}}(a) > 0$, то $\deg_z(a) > 0$ и потому $z \neq e$. Пусть теперь в записи каждого $y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ отсутствует a, но есть хотя бы один элемент, в записи которого присутствует b. Тогда, конечно, $\deg_z(a) = 0$, но $\deg_z(b) > 0$. Следовательно, $z \neq e$. Наконец, если в записи каждого $y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ отсутствуют как a, так и b, то $\deg_z(c) > 0$. Рассмотрение случая 2 закончено.

Случай 3: $x \in \mathbb{H}b$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Случай 4: $x \in \mathbb{H}ab$. Рассуждая по аналогии со случаем 2, получаем, что при любом $g \in \mathbb{G}$ имеет место $(x^{\pm 1})^g = h^* ab$ для подходящего $h^* \in \mathbb{H}$. Поэтому элемент $y \in \mathbb{G}_x$ имеет вид

$$y = h(ab)^{\delta}, \tag{18}$$

где $h = c^{\gamma} a^{2\alpha} b^{2\beta} \in \mathbb{H}$, δ равно 0 или 1. Так как $c^{\gamma} = (ab)^{2\gamma}$, то $y = a^{2\alpha} b^{2\beta} (ab)^{2\gamma+\delta}$. Пусть даны неединичные элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{G}_x$. Выбор знаков осуществляется по аналогии со случаем 2, только в следующей последовательности:

1) если $\deg_{y_i}(ab) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(ab) > 0$;

2) если $\deg_{y_i}(ab) = 0$ и $\deg_{y_i}(a) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(a) > 0$;

3) если $\deg_{y_i}(ab) = \deg_{y_i}(a) = 0$, то $\deg_{y_i}(b) \neq 0$ и тогда ε_i такое, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(b) > 0$.

Рассуждая, как и выше, видим, что $e \notin sgr(y_1^{\varepsilon_1}, \ldots, y_n^{\varepsilon_n})$, т. е. $\mathbb{G}_x$ правоупорядочиваема.

Итак, для любого $x \in \mathbb{G}$ группа $\mathbb{G}_x$ правоупорядочиваема. Стало быть, $\mathscr{D}_r \subsetneqq L(\mathscr{D}_r)$.

Напомним, что группа локально индикабельна, если всякая ее неединичная конечно порожденная подгруппа допускает гомоморфизм на аддитивную группу целых чисел. Хорошо известно, что всякая локально индикабельная группа правоупорядочиваема и класс $\mathscr{J}$ всех локально индикабельных групп есть квазимногообразие [1]. Также образует квазимногообразие и класс $\mathscr{D}_o$ всех упорядочиваемых групп. Более того, $\mathscr{D}_o \subsetneqq \mathscr{J}$.

В этой связи представляет интерес изучение свойств квазимногообразий $\mathscr{D}_o$, $\mathscr{J}$ и $\mathscr{D}_r$ и их классов Леви как элементов решетки квазимногообразий групп без кручения.

Например, невозможно включение $\mathscr{J} \subseteq L(\mathscr{D}_o)$, поскольку группа $\mathbb{K} = \langle a, b | a^b = a^{-1} \rangle$ локально индикабельная (допускает четыре правых порядка), но нормальное замыкание $\mathbb{K}_{ab}$ ее элемента ab неупорядочиваемо. Однако из сказанного выше следует, что $\mathscr{D}_o \subseteq L(\mathscr{D}_o) \cap \mathscr{J}$. Возможно ли здесь совпадение или существует неупорядочиваемая локально индикабельная группа, в которой нормальное замыкание любого элемента упорядочиваемо? Аналогичные вопросы можно рассмотреть и для других случаев.

Благодарность. В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность профессору А. И. Будкину за высказанные замечания при обсуждении результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копытов В. М., Медведев Н. Я.* Правоупорядоченные группы. Новосибирск: Науч. книга, 1996.
2. *Kappe L. C.* On Levi-formations // Arch. Math. 1972. V. 23, N 6. P. 561–572.
3. *Levi F. W.* Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc., New Ser. 1942. V. 6. P. 87–97.
4. *Morse R. F.* Levi-properties generated by varieties // W. Abikoff (ed.) et al., The mathematical legacy of Wilhelm Magnus (May 1 -3, 1992, Polytechnic Univ. Brooklin, NY, USA) Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1994. P. 467-474. (Contemp. Math.; V. 169).
5. *Будкин А. И.* Квазимногообразия Леви // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 266–270.
6. *Лодейщикова В. В.* О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1359–1366.
7. *Лодейщикова В. В.* О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 26–41.
8. *Лодейщикова В. В.* О классе Леви, порожденном квазимногообразием нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 4. С. 486–499.
9. *Шахова С. А.* Об аксиоматическом ранге классов Леви // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 5. С. 587–600.
10. *Шахова С. А.* Классы Леви квазимногообразий групп с коммутантом экспоненты p // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 5. С. 510–524.
11. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
12. *Clay A., Rolfsen D.* Ordered groups and topology. arXiv:1511.05088v1 [math.GT] 16 Nov. 2015, 126.

Поступила в редакцию 15 сентября 2023 г.
После доработки 15 сентября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский государственный аграрный университет,
кафедра математики, механики и инженерной графики,
пр. Красноармейский, 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com