Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 510.643+517.11

ДОПУСТИМЫЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА МОДАЛЬНЫХ WCP–ЛОГИК

В. В. Римацкий

Аннотация. Исследуются допустимые правила расширений модальных логик $S4$ и GL со слабым свойством ко-накрытий. Для таких логик описывается явный независимый базис для допустимых правил. Полученный базис состоит из бесконечной последовательности правил, которые имеют компактную и простую форму.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.114

Ключевые слова: модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, базис допустимых правил.

1. Введение

Современные приложения логики в компьютерных науках и в искусственном интеллекте нуждаются в языке, приспособленном для описания различных динамических систем. Язык неклассических логик (например, модальных или временных) успешно выполняет эту функцию. Но изначально факты, утверждения в этом языке описываются с помощью формул, которые предназначены для описания моделей в общем и неспособны выразить изменяющиеся условия и предпосылки. Эти условия и предпосылки могут моделироваться с помощью различных вариантов понятия логического следования. Одна из особенностей предлагаемого подхода к изучению логического следования состоит в том, что исследуется логическое следование в терминах правил вывода, секвентов, а не просто формул или утверждений.

Формализм описания свойств моделей посредством формул глубоко развит, широко распространен и подробно представлен в научной литературе. Он является базисом представления и изучения человеческого мышления. Однако формулы описывают только стабильные, статичные явления; утверждение только фиксирует факт и не способно ухватить меняющиеся условия. Поэтому изучение (структурных) правил вывода (или секвентов): выражений, имеющих посылки (заданный набор предположений) и заключение, предоставляет нам более тонкий и выразительный аппарат для моделирования мышления и вычислений. Посылки правила вывода выражают текущую, заданную информацию как предположения, а заключение представляет вывод или факт, который можно получить из предположений. Правила вывода позволяют также моделировать стандартную ситуацию в изучении логического следования: даны некоторые предположения или факты, что из них следует, что является непротиворечивым следствием наблюдаемых фактов?

Исследование поддержано Российским научным фондом (проект No. 23-21-00213).

Очевидно, что понятие (структурного) правила вывода обобщает понятие формулы: любая формула может быть рассмотрена как структурное правило вывода без посылки, без предположений. Однако допустимые правила вывода оказались намного сильнее обычных структурных правил: благодаря примеру Харропа (1960 г. [1]) известно, что даже интуиционистская логика Int не является структурно полной, т. е. в ней существуют допустимые, но не выводимые правила вывода, правила, не представимые посредством формул. Благодаря примерам Минца [2] и Порта [3] это также справедливо и для широкого класса модальных логик.

Понятие допустимого правила вывода было впервые введено Лоренценем [4] в 1955 г. Для произвольной логики допустимыми являются те правила вывода, которые не изменяют множество доказуемых теорем данной логики. Понятно, что любое выводимое правило является допустимым в заданной логике, но обратное в общем случае неверно, как показывают примеры Харропа, Минца и Порта. Непосредственно из определения можно также заключить, что множество всех допустимых в логике λ правил вывода образует *наибольший* класс правил вывода, которыми можно расширить аксиоматическую систему данной логики, не изменяя множества доказуемых теорем. Кроме того, допустимые правила значительно усиливают дедуктивную систему заданной логики.

Начало истории изучения допустимых правил может быть датировано 1975 г. с появления проблемы Фридмана [5] о существовании алгоритмического критерия допустимости правил в интуиционистской логике Int. В классической логике вопрос допустимости решался тривиально — допустимы только выводимые, доказуемые правила. В случае неклассических логик существуют допустимые, но не доказуемые правила вывода. В середине 70-х гг. Минц [2] получил достаточные условия выводимости правил специальной формы. Положительное решение проблемы Фридмана о существовании алгоритма, распознающего допустимость правил вывода в интуиционистской логике Int, было получено В. В. Рыбаковым в 1984 г. [6]. Для широкого класса модальных и суперинтуиционистских логик критерий допустимости правил вывода был позднее сформулирован в [7].

К проблеме А. Кузнецова (1973) о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода логики Int восходит другой способ описания всех допустимых правил логики. Имея базис для допустимых правил, все остальные можно вывести из него как следствия. Первый положительный результат в изучении базисов для допустимых правил вывода был получен А. Циткиным [8], который нашел базис для всех допустимых в Int квазихарактеристических правил вывода. Изначально исследование базисов для допустимых правил вывода нестандартных логик фокусировалось на наиболее важных индивидуальных логиках таких, как логика доказуемости GL или системах $S4$, $S5$, а также на обобщении существующих методов и получении общей техники, применимой не только к отдельным, индивидуальным логикам, а к целым подклассам логик, включающих наиболее интересные и важные логики. В общем проблема Кузнецова о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода решалась отрицательно не только для Int [9] но и для большинства других базовых логик. В. В. Рыбаков [7, гл. 4] показал, что логики Int, KC, $K4$, $S4$ и многие другие базовые логики не имеют конечного базиса для допустимых правил от конечного числа переменных.

Учитывая отрицательное решение проблемы Кузнецова для многих базовых неклассических логик, к концу 20-го века базис для допустимых правил вывода мог быть получен только из известного алгоритмического критерия допустимости (см. [7, гл. 3.5]). Однако этот критерий является вычислительно сложным и неприменимым для описания такого базиса в легко обозримой форме. Поэтому становится актуальной проблема явного описания легко обозримого базиса для всех допустимых правил вывода хотя бы для основных базовых логик, а также для тех «сильных» табличных логик, которые имеют конечный базис допустимых правил (см. [10, 11]). Первый шаг в этом направлении был сделан в 2000 г.: в статье [12] был получен рекурсивный базис для допустимых правил интуиционистской логики Int, состоящий из правил в полуредуцированной форме. Позже Иемхофф в [14] и последующих работах был получен явный базис допустимых правил логики Int и ее расширений со слабым свойством ко-накрытий (extension property) плюс дизъюнктивным свойством. В [15] В. В. Рыбаков построил явный базис для всех допустимых правил логики $S4$. В [16, 17] был получен явный независимый базис допустимых правил расширений $S4$, наследующих допустимые правила $S4$ (т. е. обладающих (сильным) свойством ко-накрытий). В [18] Б. Р. Федоришин получил явный базис для допустимых правил логики GL. Наличие слабого свойства ко-накрытий (extension property) и дизъюнктивного свойства логики были ключевыми при доказательстве этих результатов.

В настоящей работе продолжено изучение базисов для допустимых правил вывода модальных логик. С использованием техники работ [15, 18] описан явный независимый базис допустимых правил вывода для расширений логик $S4$ и GL со слабым свойством ко-накрытий (WCP-логики), но без дизъюнктивного свойства. При этом количество переменных, от которых зависят правила, образующие базис в $S4\,(GL)$ [15, 18], было уменьшено, и не требуется дизъюнктивное свойство логики. Тем самым удалось значительно расширить класс логик, для которых описан явный независимый базис допустимых правил.

2. Определения, предварительные результаты

Вначале напомним кратко необходимые определения и результаты (для детального знакомства с предметом рекомендуем [7]).

Язык модальных логик состоит из счетного множества пропозициональных переменных $p_1, \dots, p_n, \dots$, логических связок классической логики $\neg, \wedge, \vee, \to$ и унарного модального оператора $\Box$. Оператор $\Diamond$, также используемый далее, определяется как $\Diamond\alpha = \neg\Box\neg\alpha$. *Нормальная модальная логика* есть множество модальных формул L, содержащее все пропозициональные тавтологии, схему аксиом $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ и замкнутое относительно подстановок, правила отделения $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ и необходимости $\alpha \vdash \Box\alpha$. Минимальная модальная логика обозначается через K. Расширение логики K схемой $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ обозначается $K4$; расширение $K4$ схемой $\Box\alpha \to \alpha$ порождает логику $S4$. Если L — нормальная модальная логика, то для формул $\alpha \in L$ пишем $\vdash_L \alpha$ или $L \vdash \alpha$. Если логика L фиксирована или ясна из контекста, то обозначаем для простоты $\vdash \alpha$. Далее рассматриваются только логики, расширяющие $S4$ или GL.

Фрейм $\mathscr{F} := \langle F, R\rangle$ есть пара, где F — непустое множество и R — бинарное отношение на F. Содержательно F представляет множество всех «возможных» миров, R — отношение перехода из одного мира в другой. Далее базисное множество и сам фрейм будем обозначать одной и той же буквой, например $\mathscr{F}$. Так как рассматриваются логики, расширяющие $S4$ (или GL), отношение достижимости R на фреймах считается рефлексивным (иррефлексивным) и транзитивным.

Моделью называем тройку $\mathscr{M} := \langle F, R, V\rangle$, где $\langle F, R\rangle$ — фрейм, и *означивание* V есть отображение множества пропозициональных переменных в множество 2^F всех подмножеств множества F. Означивание V ставит в соответствие каждой переменной множество «миров» $V(p)$, в которых переменная p истинна. Обозначим истинность переменной p в точке $x \in F$ при заданном означивании V как $(F, x) \models_V p$. В тех случаях, когда базисное множество (фрейм) ясно из контекста, истинность переменной будем записывать как $x \models_V p$.

Истинность формулы α на элементе $x \in \mathscr{F}$ при заданном означивании V индуктивно определяется следующим образом:

- $x \models_V p \iff x \in V(p)$;
- $x \models_V \neg\alpha \iff x \not\models_V \alpha$;
- $x \models_V \alpha \vee \beta \iff x \models_V \alpha$ или $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \alpha \wedge \beta \iff x \models_V \alpha$ и $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \alpha \to \beta \iff x \not\models_V \alpha$ или $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \Box\alpha \iff \forall y \in \mathscr{F}(xRy \Longrightarrow y \models_V \alpha)$;
- $x \models_V \Diamond\alpha \iff \exists y \in \mathscr{F}(xRy \& y \models_V \alpha)$;

Формула A истинна на модели $\mathscr{M} = \langle F, R, V\rangle$ (обозначение $\mathscr{M} \models A$ или $\mathscr{F} \models_V A$), если данная формула A истинна на каждом элементе модели $\mathscr{M}$ при означивании V. *Формула A истинна на фрейме* $\mathscr{F}$ (обозначение $\mathscr{F} \models A$), если она истинна на любой модели $\mathscr{M}$, порожденной $\mathscr{F}$, т. е. истинна при любом означивании на $\mathscr{F}$.

Подмножество $\mathscr{X}$ заданной модели $\mathscr{M}$ называется *формульным* (*определимым*), если существует формула α такая, что $\forall z \in \mathscr{M}[z \models_V \alpha \iff z \in \mathscr{X}]$. Соответственно *элемент $z \in \mathscr{M}$ является формульным*, если множество $\{z\}$ формульное. Означивание V *определимо* (*формульное*) в модели $\mathscr{M}$, если для любой переменной p из области V множество $V(p)$ формульное.

Модель $\mathscr{M} = \langle F, R, V\rangle$ называется *адекватной* для логики L (L-моделью), если любая формула, доказуемая в логике L, истинна на данной модели. Соответственно фрейм $\langle F, R\rangle$ *адекватен* для логики L, если на нем истинны все доказуемые формулы логики L. Класс фреймов K называется *характеристическим* для логики L, если любой фрейм из данного класса адекватен для L и для любой формулы, не доказуемой в L, найдется фрейм из класса K, на котором опровергается данная формула. Для заданного класса фреймов $\mathscr{K}$ *логика $L(\mathscr{K})$, порожденная $\mathscr{K}$*, есть множество всех формул, истинных на всех фреймах из $\mathscr{K}$. В данном случае говорят, что логика $L(\mathscr{K})$ *порождена классом фреймов $\mathscr{K}$*.

Модальная логика L называется *разрешимой*, если для любой формулы существует алгоритм, позволяющий установить ее доказуемость в данной логике. Модальная логика L называется *финитно аппроксимируемой*, если для любой формулы α, не доказуемой в L, существует конечный фрейм (или конечная алгебра), адекватный L, на котором не истинна формула α. Модальная логика L обладает *дизъюнктивным свойством*, если для любых формул α, β из доказуемости в L формулы $\Box\alpha \vee \Box\beta$ следует доказуемость в L одной из формул $\Box\alpha$ или $\Box\beta$.

Напомним, что если $\mathscr{F} = \langle F, R\rangle$ — некоторый фрейм, то множество $C \subseteq \mathscr{F}$ называется *сгустком*, если: 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in F$ $(xRy \& yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным* если $|C| > 1$; в противном случае — *одноэлементным* или *вырожденным.* Для элемента $a \in \mathscr{F}$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a.

Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма $\mathscr{F}$ называется *антицепью.* Антицепь $\mathscr{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathscr{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае — *тривиальной.* Для любого элемента $a \in \mathscr{F}$ обозначим $a^R = \{z \mid aRz\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент *a порождает как корень* подфрейм a^R фрейма F. Фрейм $\mathscr{F}$ — *корневой*, если существует элемент $a \in \mathscr{F}$ такой, что $\forall b \in \mathscr{F} aRb$. Данный элемент a называем также *корнем* $\mathscr{F}$. Множество $X^R := \bigcup\{z^R \mid z \in X\}$ называется *открытым подфреймом*, порожденным X. Понятия корневой модели, подмодели и открытой подмодели определяются аналогичным образом.

Говорят, что фрейм $\mathscr{F}$ является *L-фреймом*, если все теоремы логики L истинны на $\mathscr{F}$ при любом означивании переменных (т. е. фрейм адекватен логике L). Соответственно множество $L(\mathscr{F})$ формул, истинных на $\mathscr{F}$, есть логика, порожденная фреймом $\mathscr{F}$.

Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R \backslash C(a) = X^R$. Говорят, что *элемент a есть ко-накрытие* для $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. Под *ко-накрытием* далее понимаем одноэлементный сгусток, являющийся ко-накрытием. *L-ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень L-фрейм.

Глубиной элемента z модели (фрейма) $\mathscr{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего z. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathscr{F}$ глубины не более чем n будем обозначать через $S_{\leq n}(\mathscr{F})$, а множество элементов глубины n — через $S_n(\mathscr{F})$.

Для заданного фрейма $\mathscr{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k/\beta\}$ будем говорить, что *r истинно на $\mathscr{F}$ при означивании V* (обозначаем через $\mathscr{F} \models_V r$), если как только $\forall z \in \mathscr{F}\, \forall i (z \models_V \alpha_i)$, то $\forall z \in \mathscr{F}\, (z \models_V \beta)$. *Правило r истинно на $\mathscr{F}$*, если r истинно на $\mathscr{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathscr{F} \models r$).

Правило вывода $\{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)/\beta(p_1, \dots, p_n)\}$ называется *допустимым* в логике L [обозначаем $r \in Ad(L)$], если для любых формул $\delta_1, \dots, \delta_n$ из $(\forall j \alpha_j(\delta_1, \dots, \delta_n) \in L)$ следует $\beta(\delta_1, \dots, \delta_n) \in L$. Для произвольного правила вывода r обозначим посылку правила через $\mathrm{Pr}(r)$.

Допустимые правила (ДПВ) пропозициональной модальной (суперинтуиционистской) логики L имеют алгебраическое описание — им соответствуют квазитождества, истинные на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(L)$ многообразия алгебр $\mathrm{Var}(L)$, соответствующего данной логике, т. е. справедливо

Утверждение 2.1 [1, гл. 3]. *Правило вывода*

$$r = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)/\beta(p_1, \dots, p_n)\}$$

допустимо в логике L, если и только если на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(L)$ из многообразия алгебр $\mathrm{Var}(L)$ истинно квазитождество

$$r^* = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n) = 1 \& \dots \& \alpha_k(p_1, \dots, p_n) = 1 \Longrightarrow \beta(p_1, \dots, p_n) = 1\}.$$

Правило r называется *следствием правил $r_1, \dots, r_k$ в логике L*, если заключение r выводимо из посылок r с помощью теорем L, правил $r_1, \dots, r_k$ и постулированных правил вывода L. Множество $Ad^*(L)$ допустимых правил логики L называем *базисом допустимых правил*, если для любого допустимого правила r найдутся правила $r_1, \ldots, r_k \in Ad^*(L)$ такие, что r выводимо из $r_1, \ldots, r_k$ в логике L.

Утверждение 2.2 [1, разд. 3.5, 4.1]. *$r_1, \ldots, r_k$ — базис допустимых правил вывода логики L тогда и только тогда, когда $r_1^*, \ldots, r_k^*$ — базис квазитождеств $\mathfrak{F}_w(L)$.*

Модель $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики L* тогда и только тогда, когда $\alpha \in L \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$ для любой формулы $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$.

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику $S4(GL)$, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках. Следуя [7, гл. 3], опишем конструкцию этой модели. Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$, и пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n, и все элементы каждого сгустка имеют попарно различные означивания. Предположим, что $S_{\leq m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m+1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathscr{X} \subset S_{\leq m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один элемент (сгусток) глубины m и добавим к этой антицепи снизу копию каждого сгустка C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathscr{X}$ при условии

(i) фрейм $C^R = \mathscr{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фреймом;

(ii) если $\mathscr{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $Ch_n(\lambda)$. Для расширений логики GL такая модель строится аналогично, при построении используем только иррефлексивные элементы. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 2.3 [7, гл. 3]. *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4(GL)$, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели формульный.*

Утверждение 2.4 [7, гл. 3]. *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4(GL)$, правило вывода r допустимо в λ, если и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных.*

В данном исследовании также понадобится редуцированная форма модальных правил вывода. Говорят, что *правило R имеет редуцированную форму*, если $R := \bigvee\limits_{1\leq j\leq m} \phi_j/\Box x_0$, где $\phi_j := \bigwedge\limits_{0\leq i\leq k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge\limits_{0\leq i\leq k} \Diamond x_i^{b_i}$, $a_i, b_i \in \{0, 1\}$; $x^0 := x$, $x^1 := \neg x$. Для каждого члена ϕ_j посылки правила в редуцированной форме определим также множества

$$\theta_1(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, a_j = 0\}, \quad \theta_2(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, b_j = 0\},$$

$$\theta_3(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, a_j = 1\}, \quad \theta_4(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, b_j = 1\}.$$

Утверждение 2.5 [7]. *Для любого модального правила вывода R существует правило $rf(R)$ в редуцированной форме, эквивалентное R относительно истинности на (GL-) $S4$-алгебрах и (GL-) $S4$-фреймах; R и $rf(R)$ одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей $S4(GL)$.*

3. Базис ДПВ WCP-логик над $S4$

Говорят, что логика λ, расширяющая логику $S4$, имеет *слабое свойство ко-накрытий над* $S4$ (weak co-cover property), если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathscr{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathscr{X}$ сгустков из $\mathscr{F}$ фрейм $\mathscr{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия к фрейму $\bigcup\limits_{c\in\mathscr{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом. Логики, обладающие этим свойством, будем называть WCP-*логиками над* $S4$.

Для всех чисел $n > 1$, $1 \leq i,\ j \leq n$, $n \in N$, определим формулы

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1\leq i\leq n} \Diamond\pi_i;$$

$$A_{n,1} := \Box\Big[\bigwedge_{1\leq i\leq n} (p_i \to \neg\Diamond q)\Big]; \quad B := q \vee \neg\Diamond q.$$

Определим также последовательность правил вывода:

$$\mathscr{R}_1 := \frac{\Diamond p \wedge \Diamond\neg p}{p \wedge \neg p}; \quad \mathscr{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)}{\Box\neg A_n}.$$

Лемма 1. *Правило* $\mathscr{R}_1$ *допустимо в любой финитно аппроксимируемой модальной логике* $\lambda \supseteq S4$.

Доказательство почти очевидно. По построению n-характеристической модели $C_k(\lambda)$ первый слой этой модели содержит вырожденные одноэлементные сгустки. При любом означивании переменной p на элементах первого слоя, порождающих вырожденные сгустки, истинно либо p, либо $\neg p$. Соответственно на таких элементах посылка правила $\mathscr{R}_1$ не выполняется, что влечет допустимость данного правила вывода в логике λ. $\Box$

Заметим также, что посылка правила $\mathscr{R}_1$ выполнима (например, на собственных сгустках), но не унифицируема (т. е. при любой подстановке не становится теоремой логики). Поэтому такое правило бесполезно в доказательстве, и будем называть правила с неунифицируемой посылкой *пассивными.* Правило $\mathscr{R}_1$ образует базис для пассивных правил вывода (см. [13, теорема 3.4]).

Теорема 3.1. *Правила* $\mathscr{R}_n$, $n > 1$, *допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике* λ, *расширяющей* $S4$, *имеющей слабое свойство ко-накрытий.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого n правило вывода $\mathscr{R}_n$ недопустимо в логике λ. Тогда по утверждению 2.4 существует формульное означивание V переменных правила $\mathscr{R}_n$, при котором правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на некоторой k-характеристической модели $C_k(\lambda)$. Итак, справедливо

$$C_k(\lambda) \Vdash_V \Box(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B))\& C_k(\lambda) \nVdash_V \Box\neg A_n. \tag{1}$$

Следовательно, существует элемент $a \in C_k(\lambda)$ такой, что $a \nVdash_V \Box\neg A_n$, откуда вытекает $\exists a_1 : aRa_1 \& a_1 \Vdash_V A_n$. Тогда найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n \in C_k(\lambda)$ такие, что $a_1 R b_i \& b_i \Vdash_V \pi_i$. По слабому свойству ко-накрытий существует рефлексивный элемент $b \in C_k(\lambda)$, являющийся ко-накрытием для множества R-минимальных сгустков $\{C(b_1), C(b_2), \ldots C(b_n)\}$, порожденных элементами $b_1, \ldots, b_n$.

По выбору элемента выполняется $b \Vdash_V A_n$. По (1) выполняется $b \Vdash_V A_{n,1}$. Поскольку b является ко-накрытием для $\{b_1, \ldots, b_n\}$, легко проверить, что формула B выполняется на элементе b при означивании V. Действительно, $b_i \Vdash_V p_i$

и по (1) справедливо $b_i \Vdash_V A_{n,1}$, откуда следует $\forall i \leq n,\ b_i \Vdash_V \neg\Diamond q$. Отсюда получаем, что $b \models_V q$, или $b \models_V \neg q$ влечет $b \models_V \neg\Diamond q$. Таким образом, выполнено $b \Vdash_V A_n \wedge B$, что противоречит $b \Vdash_V \Box\neg(A_n \wedge B)$ по предположению (1).

Если все элементы $b_1, \ldots, b_n \in Ch_k(\lambda)$ принадлежат одному сгустку, то любой из них может рассматриваться как накрытие для остальных, и на нем также выполнится формула $(A_n \wedge B)$, что противоречит предположению. $\Box$

Пусть задана логика λ, расширяющая логику $S4$ и удовлетворяющая условиям:

(1) λ финитно аппроксимируема;

(2) имеет слабое свойство ко-накрытий;

(3) правило r в редуцированной форме недопустимо в $\lambda \iff$ существует λ-модель $\mathscr{M} = \langle F, V\rangle$ такая, что

(i) $\forall x \in F x \models_V \bigvee \phi_j$;

(ii) $\exists y \in \mathscr{F} y \not\models_V \Box x_0$;

(iii) $\forall \mathscr{D} \subseteq F \exists e \in Fe \models_V \phi_e, \phi_e \in \mathrm{Pr}(r), \& \theta_2(\phi_e) = \theta_1(\phi_e) \cup \bigcup\limits_{z\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi_z) \cup \theta_2(\phi_z))$.

Условие (3) является аналогом критерия допустимости правила в редуцированной форме. Для логик $K4, S4, Grz, GL$ соответствующие теоремы можно найти, например, в [7, гл. 3.9]. Если посылка правила r истинна на некоторой модели $\mathscr{M} = \langle F, V\rangle$, то на каждом элементе этой модели выполняется только одна формула ϕ_j из посылки. Действительно, по определению формулы ϕ_j справедливо: $\theta_1(\phi_j) \cup \theta_3(\phi_j) = \theta_2(\phi_j) \cup \theta_4(\phi_j) = \mathrm{Var}(r) = \{x_0, \ldots, x_k\}$. При заданном означивании для каждого элемента модели множества $\theta_i(\phi_j)$ определяются однозначно.

Напомним определение обертывающей (wrapping) алгебры (см. определения 2.5.1, 2.5.3 в [7]). Для заданного фрейма $\mathscr{F} = \langle F, R\rangle$ модальная алгебра $\mathscr{F}^+$, где

(1) $\langle 2^F, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \bot, \top\rangle$ — булева алгебра всех подмножеств множества F,

(2) $\forall X \subseteq F(\Box X = \{a : \forall y(aRy) \Longrightarrow (y \in X)\})$,

называется *ассоциированной для фрейма* $\mathscr{F}$.

Аналогично для модели $\mathscr{M} = \langle F, R, V\rangle$ алгебра $\mathscr{M}^+$, порожденная множеством элементов $\{V(p)\}$ алгебры $\langle F, R\rangle^+$, называется *ассоциированной для данной модели.*

Покажем теперь, что все допустимые правила вывода логики λ, удовлетворяющей условиям (1)–(3), выводятся в данной логике из набора правил $\{\mathscr{R}_n\}$.

Теорема 3.2. *Пусть модальная логика* λ ($\supseteq S4$) *удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда любое допустимое правило* r (*в редуцированной форме*) *логики* λ *выводится из правил* $\{\mathscr{R}_n,\, n \in N\}$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. некоторое допустимое в λ правило r не выводится из правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$. Тогда по теореме 1.4.11 в [7] найдется λ-алгебра $\mathscr{B} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, разделяющая эти правила: $\forall n \mathscr{B} \models \mathscr{R}_n, \mathscr{B} \not\models r$.

Докажем вспомогательное утверждение. Пусть задана модальная алгебра $\mathscr{A} := \mathscr{F}^+(V(x_0), V(x_1), \ldots, V(x_k))) \in \mathrm{Var}(\lambda)$, порожденная множеством подмножеств $(V(x_0), V(x_1), \ldots, V(x_k)) \subseteq \mathscr{F}$ обертывающей алгебры $\mathscr{F}^+$, где $\mathscr{F}$ — заданный рефлексивный и транзитивный λ-фрейм. Пусть r — правило вывода в редуцированной форме.

Лемма 2. *Если правило r в редуцированной форме допустимо в логике λ, удовлетворяющей условиям (1)–(3), и опровергается на алгебре $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, то для некоторого n правило $\mathscr{R}_n$ также опровергается на $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть правило r в редуцированной форме, допустимое в логике λ, имеет вид

$$r := \bigvee_{1\le j\le t} \phi_j/\Box x_0,$$

где

$$\phi_j := \bigwedge_{0\le i\le k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0\le i\le k} \Diamond x_i^{b_i}, \quad a_i, b_i \in \{0,1\},\ x^0 := x,\ x^1 := \neg x.$$

Пусть правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$ при некотором означивании $V(x_i) := \mathscr{Y}_i \in \mathscr{A}$. Так как правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, то

$$\mathscr{F} \models_V \bigvee_{1\le j\le t} \phi_j; \exists\, b \in \mathscr{F} : b \not\models_V \Box x_0.$$

Рассмотрим алгебру $(b^R)^+$, порожденную фреймом b^R, и ее подалгебру $\mathscr{B} := (b^R)^+(V(x_0),\dots,V(x_k))$, порожденную множеством элементов $V(x_0),\dots, V(x_k)$. Поскольку правило r опровергается на b^R, то $\mathscr{B} \not\models_V r$.

Применим условие (3), которому удовлетворяет логика λ. Так как r допустимо в λ и условия (i), (ii) выполнены на b^R, условие (iii) не выполняется:

$$\exists \mathscr{G} \subseteq b^R \forall e \in F : e \models_V \phi_e \& \phi_e \in \mathrm{Pr}(r),$$
$$\Longrightarrow \theta_2(\phi_e) \ne \theta_1(\phi_e) \cup \bigcup\{(\theta_1(\phi_z) \cup \theta_2(\phi_z)) : z \in \mathscr{G} \& z \models_V \phi_z \& \phi_z \in \mathrm{Pr}(r)\}. \quad (*)$$

Пусть антицепь X состоит из R-минимальных элементов $\mathscr{G}$, т. е. $X^R = \mathscr{G}^R \cup X$. Тогда X нетривиальна и не имеет ко-накрытия в $\mathscr{F}$. В противном случае если найдется элемент $c \in b^R$, для которого справедливо $c^R = X^R$ либо $c^R = X^R \cup \{c\}$, то для формулы $\phi_c \in \mathrm{Pr}(r) : c \models_V \phi_c$, не выполнено условие $(*)$.

Рассмотрим множества $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, состоящие из всех дизъюнктивных членов посылки правила r, имеющих в b^R и X^R непустое множество истинности соответственно, т. е.

$$\mathscr{X} := \{\phi_j \mid \exists c \in b^R : c \models_V \phi_j\}, \quad \mathscr{Y} := \{\phi_j \mid \exists e \in X^R : e \models_V \phi_j\}.$$

Определим множество $\mathscr{D}$ дизъюнктов посылки правила r, истинных на элементах антицепи $X \subset b^R$, т. е.

$$\mathscr{D} := \{\phi_s \mid \exists e \in X e \models_V \phi_s\},$$

и множество дизъюнктов $\mathfrak{B}$, истинных на фрейме $\mathscr{F}$:

$$\mathfrak{B} := \{\phi_s \mid \exists e \in \mathscr{F} e \models_V \phi_s \& \phi_s \in \mathrm{Pr}(r)\}.$$

Так как зафиксированная антицепь $X \subset b^R$ не имеет ко-накрытия ε в $\mathscr{F}$, то $\forall \phi_j \in \mathfrak{B}$ выполняется

$$\theta_2(\phi_j) \ne \theta_1(\phi_j) \cup \bigcup_{\phi\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi)). \quad (2)$$

Пусть n — мощность множества $\mathscr{D}$, т. е. $n := |\mathscr{D}|$. Ясно, что в силу нетривиальности антицепи $X \subset b^R$ справедливо $n > 1$. Определим также

$$P_V := \mathrm{Var}(r) = \{x_0,\dots,x_k\};$$

$$P_T := \mathrm{Var}\Big(\bigcup_{x\in\mathscr{D}}(\theta_1(\phi_x)\cup\theta_2(\phi_x))\Big) = \{p \mid \exists c\in X : c\models_V p \vee c\models_V \Diamond p\}.$$

Зафиксируем взаимно однозначное соответствие f между $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $\mathscr{D}$. Расширим означивание V на алгебру $\mathscr{B}$ с переменных правила r на переменные правила $\mathscr{R}_n$ следующим образом:

$$V(p_i) := V(f(p_i)) \ \&\ V(q) := V(P_V - P_T). \tag{3}$$

Утверждение 3.3. *При означивании V правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на алгебре $\mathscr{B}$.*

Доказательство. Так как элемент b принадлежит R-наименьшему сгустку фрейма, порождающего алгебру $\mathscr{B}$, и $\forall x\in X$ выполняется $x \models_V \pi_i$ для некоторого i, то

$$b\models_V \bigwedge_{1\le i\le n}\Diamond\pi_i,$$

т. е. $b\models_V A_n$. Отсюда заключаем, что $\mathscr{B}\not\models_V \Box\neg A_n$.

Возьмем произвольный $c\in b^R$ и предположим, что $c\models_V p_i$. Тогда $c\models_V f(p_i)$ и тем самым $c\models_V \phi_i$, $\phi_i\in\mathscr{D}$. Следовательно, по выбору P_T и в силу $c\models_V\phi_i$, $\phi_i\in\mathscr{D}$ заключаем, что $c\models_V\neg\Diamond q$. Таким образом, $c\models_V A_{n,1}$, откуда в силу произвольности выбора элемента $c\in b^R$ имеем $b\models_V\Box A_{n,1}$.

Предположим, что $c\models_V A_n$. Кроме того, пусть выполняется $c\models_V\phi_c, \phi_c\in\mathscr{X}$. Тогда $c\models_V A_n \iff c\models_V\Diamond\phi_j$ для всех $\phi_j\in\mathscr{D}$. Следовательно, $c\models_V \Diamond\phi_j, \forall\phi_j\in\mathscr{D}$. Отсюда $P_T\subseteq\theta_2(\phi_c)$ и $c\not\models_V q$ по выбору P_T. Предположим также, что $c\models_V\neg\Diamond q$. Тогда $\forall\, e\in c^R e\not\models q$. Отсюда следует, что $c^R\cap V(P_V-P_T)=\varnothing$. Таким образом, $\theta_2(\phi_c)\subseteq P_T$.

Итак, совместно доказанное выше влечет: $\theta_2(\phi_c)=P_T$, т. е.

$$\theta_2(\phi_c)=\theta_1(\phi_c)\cup\bigcup_{\phi\in\mathscr{D}}(\theta_1(\phi)\cup\theta_2(\phi))$$

и $\phi_c\in\mathscr{X}$, что противоречит (2). Утверждение доказано. $\Box$

Доопределим означивание V на алгебре $\mathscr{A}$ переменной q правила $\mathscr{R}_n$ так, чтобы опровергнуть $\mathscr{R}_n$ на $\mathscr{A}$.

Лемма 3. $\mathscr{A}\not\models_V\mathscr{R}_n$.

Доказательство. Пусть зафиксированная выше нетривиальная антицепь $X\subset b^R$ состоит из сгустков $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ (т. е. $X=\{C_1, C_2,\ldots, C_n\}$). Так как посылка правила истинна на всем фрейме $\mathscr{F}$, для каждого элемента $t\in\mathscr{F}$ найдется уникальная формула ϕ_t из посылки такая, что выполняется $t\models_V\phi_t$.

Доопределим на фрейме $\mathscr{F}\setminus b^R$ означивание переменных правила $\mathscr{R}_n$ следующим образом. Определим $X^{-R}=\{x : xRC_1\&xRC_2\&\ldots\&xRC_n\}$ и

$$V(q) := \{y\in\mathscr{F}\setminus X^R : y\notin X^{-R}\&\exists x\in X^{-R}(xRy)\}$$
$$= V\Big(\neg\bigwedge_{\phi_j\in\mathscr{D}}\Diamond\phi_j\wedge\neg\Box\Big(\bigvee_{\phi_j\in\mathscr{Y}}\phi_i\Big)\wedge\bigvee\Big\{\phi_y : \exists\phi_z\Big(z\models_V\bigwedge_{\phi_j\in\mathscr{D}}\Diamond\phi_j\Longrightarrow z\models_V\Diamond\phi_y\Big)\Big\}\Big).$$

Покажем, что при таком означивании V правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathscr{F}$.

По определению означивания V непосредственно получаем

$$\forall e\in X^R e\models_V\neg\Diamond q;\quad \forall x\in\mathscr{F}(x\models_V p_i \iff x\in X).$$

По определению означивания переменных p_i и q, очевидно, выполнено $\forall x \in \mathscr{F}$ $x \not\models_V \bigvee\limits_{1\le i\le n} p_i \wedge \Diamond q$. Учитывая, что

$$\Box A_{n,1} = \Box \bigwedge_{1,n}(p_i \to \neg\Diamond q) = \Box \bigwedge_{1,n}(\neg p_i \vee \neg\Diamond q) = \Box\neg[\bigvee_{1,n}(p_i \wedge \Diamond q)],$$

получаем $\forall x \in \mathscr{F}(x \models_V \Box A_{n,1})$.

Пусть для некоторого элемента $z \in \mathscr{F}$ выполняется $z \models_V A_n$, т. е. из него достижима по отношению R зафиксированная антицепь $X = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ и сгусток $C(z)$ не является ко-накрытием для этой антицепи, значит, $z \in \mathscr{X}^{-R}$. Следовательно, по определению означивания $V(q)$ выполняется $z \models_V \neg q$. Кроме того, найдется такой элемент $y \in \mathscr{F}$, что $y \notin X^{-R}, y \notin X^R$ и zRy.

Действительно, если сгусток $C(z)$ является непосредственным R-предшественником для антицепи X (т. е. глубина $d(C(z))$ сгустка $C(z)$ есть $\max\limits_{i\in X} d(i)+1$), то должен существовать по крайней мере один элемент y такой, что zRy и $C(y)\cup \mathscr{X}$ образуют антицепь, для которой сгусток $C(z)$ является ко-накрытием (таких элементов $y_1, \dots, y_k$ с этим свойством может оказаться несколько — $C(y_1) \cup \dots \cup C(y_k) \cup \mathscr{X}$ образуют антицепь). Тогда для этого элемента y выполняется $y \notin \mathscr{X}^{-R}$, $y \notin \mathscr{X}^R$ и zRy.

Если сгусток $C(z)$ не является непосредственным R-предшественником для антицепи X, то из него достижим некоторый R-предшественник $C(z_1)$ для антицепи X или достижимы по отношению R некоторые элементы $z_1, z_2, \dots, z_k$, которые являются непосредственными R-предшественниками для подмножеств антицепи X и выполняется $X \subseteq z_1^R \cup \dots \cup z_k^R$. В первом случае, как и выше, получаем существование элемента y с нужными свойствами. Во втором случае в качестве такого элемента y можем взять, например, z_1 с требуемыми свойствами.

Таким образом, такой элемент $y \in \mathscr{F}$ существует и для него выполняется $y \notin \mathscr{X}^{-R}, y \notin \mathscr{X}^R$ и zRy. В этом случае справедливо $y \models_V q$. Отсюда $z \models_V \neg q \wedge \Diamond q$, что влечет $z \models_V \neg(A_n \wedge B)$.

Итак, показано, что при таком определении означивания посылка правила истинна на всех элементах фрейма $\mathscr{F}$. Так как элемент b является R-предшественником антицепи $\mathscr{X} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ и $\forall x \in C_i$ $x \models_V p_i$, $x \not\models p_j$, $i \ne j$, выполнено $b \models_V \bigwedge\limits_{1\le i\le n} \Diamond\pi_i$, т. е. $b \models_V A_n$. Отсюда $b \not\models_V \Box\neg A_n$, что доказывает опровержимость правила $\mathscr{R}_n$ на фрейме $\mathscr{F}$ при данном означивании V. Лемма 3 доказана. $\Box$

Таким образом, как только допустимое в логике λ правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, на данной алгебре также опровергается одно из правил $\mathscr{R}_n$ из набора правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$, что завершает доказательство теоремы 3.2. $\Box$

Теорема 3.4. *Пусть модальная логика λ ($\supseteq S4$) удовлетворяет условиям (1)–(3). Тогда множество правил $\{\mathscr{R}_n,\ n > 1,\ n \in N\}$ образует независимый базис допустимых правил вывода логики λ.*

Доказательство. Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что множество правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$ образует базис для допустимых правил. Покажем его независимость.

Как показано в [19], конечное множество правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N, n \le L\}$ образует базис для допустимых правил финитно аппроксимируемых логик конечной ширины L. Поэтому далее рассмотрим только WCP-логики неограниченной ширины.

Зафиксируем произвольное натуральное число $n > 1$. Определим λ-фрейм $\mathscr{F}$, разделяющий правила $\mathscr{R}_n$, следующим образом. Первый слой состоит из единственного рефлексивного элемента: $S_1(\mathscr{F}) := \{a_0\}$, a_0Ra_0. Второй слой данного фрейма образует антицепь из t $(t > n)$ рефлексивных элементов: $S_2(\mathscr{F}) := \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$, $\forall i \leq t(a_iRa_0\&a_iRa_i)$. Выберем наименьшее число t, при котором антицепь всех элементов второго слоя $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ имеет λ-ко-накрытие b_0. Если такого числа t не существует, то ширина логики конечна, что невозможно по предположению. Зафиксируем нетривиальную антицепь $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq S_2(\mathscr{F})$.

Для построения третьего слоя выбираем все (в том числе тривиальные) антицепи, отличные от фиксированной антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, и к каждой такой антицепи приписываем снизу рефлексивный элемент как λ-ко-накрытие (т. е. если этот элемент порождает как корень λ-фрейм). Отношение достижимости считаем транзитивным. Заметим, что если ко-накрытие $b_0 \in S_3(\mathscr{F})$ для антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ порождает как корень λ-фрейм, то ко-накрытие для любого ее подмножества также порождает λ-фрейм.

Пусть теперь $S_{\leq k}(\mathscr{F})$ глубины не более k $(3 \leq k)$ уже построен. Слой $S_{k+1}(\mathscr{F})$ глубины $k+1$ построим следующим образом. Выберем все (в том числе и тривиальные) антицепи сгустков $\mathscr{X} \subset S_{\leq k}(\mathscr{F})$, содержащие хотя бы один сгусток глубины k и отличные от антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Затем к каждой такой антицепи приписываем снизу одноэлементный сгусток, если он порождает как корень λ-фрейм. Продолжая описанную процедуру для последующих слоев, получим λ-фрейм $\mathscr{F}$, в котором любая антицепь, отличная от антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, имеет λ-ко-накрытие, сама эта антицепь имеет R-предшественника.

Обозначим $X^{-R} = \{z \mid zRa_1\&zRa_2\dots\&zRa_n\}$, т. е. X^{-R} — множество элементов, из которых достижима вся зафиксированная антицепь $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (ее нижний конус). Определим на $\mathscr{F}$ означивание V, опровергающее правило $\mathscr{R}_n$, следующим образом:

$$V(p_i) := a_i, a_i \in S_2(\mathscr{F}), 1 \leq i \leq n; \quad \forall i > nV(p_i) = \varnothing;$$
$$V(q) := \{a_{n+1}, \dots a_t\} \cup (S_3(\mathscr{F}) \setminus X^{-R}).$$

Заметим, что посылка правила $\mathscr{R}_1$ не выполняется на элементе первого слоя a_0, т. е. правило истинно на фрейме $\mathscr{F}$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 3, легко показать, что при таком означивании правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathscr{F}$.

Действительно, по определению V выполняется: $\forall\, a_i \in Xa_i \models_V p_i\&a_i \not\models_V p_j, i \neq j$, и тем самым верно $a_i \models_V \pi_i$. Тогда для ко-накрытия антицепи всех элементов второго слоя $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ — элемента b_0 — выполняется $b_0 \not\models_V \Box\neg A_n$, т. е. заключение правила опровергается при таком означивании.

Покажем, что посылка истинна на всем фрейме $\mathscr{F}$. По определению $V(q)$ имеем $\forall i \leq n\, a_i \not\models_V \neg\Diamond q$. Тогда, очевидно, выполнено $\forall x \in \mathscr{F}\, x \not\models_V \bigvee\limits_{1 \leq i \leq n} p_i \wedge \Diamond q$. В силу

$$\Box A_{n,1} = \Box\bigwedge_{1,n}(p_i \to \neg\Diamond q) = \Box\bigwedge_{1,n}(\neg p_i \vee \neg\Diamond q) = \Box\neg\Big[\bigvee_{1,n}(p_i \wedge \Diamond q)\Big]$$

заключаем $\forall x \in \mathscr{F} x \models_V \Box A_{n,1}$.

Предположим теперь, что $z \in \mathscr{F}$ и выполняется $z \models_V A_n$. Тогда $z \in X^{-R}$ и по определению $V(q)$ выполняется $z \not\models_V q$. Так как сгусток $C(z)$ не является ко-накрытием для антицепи X (такого не существует в $\mathscr{F}$), но вся антицепь достижима из него, найдется элемент $y \in \mathscr{F} : y \notin X^R, y \notin X^{-R} \& zRy$.

Действительно, если z принадлежит $S_3(\mathscr{F})$ и является R-предшественником для зафиксированной антицепи X, то из него также достижим по крайней мере один из элементов $\{a_{n+1}, \dots, a_t\} \subseteq S_2(\mathscr{F} \setminus X)$. Тогда по определению $V(q)$ заключаем, что $z \models_V \Diamond q$ и, значит, $z \models_V \neg q \wedge \Diamond q$, что влечет истинность $z \models_V \neg(A_n \wedge B)$.

Если же глубина этого элемента z строго больше 3 ($d(z) > 3$), т. е. сгусток $C(z)$ не является непосредственным R-предшественником антицепи X, то из него достижим по отношению R некоторый сгусток $z_1 \in S_3(\mathscr{F})$, являющийся непосредственным R-предшественником антицепи X (но не ко-накрытием), либо достижимы элементы $z_1, z_2, \dots, z_k \in S_3(\mathscr{F} \backslash X^{-R})$, $k > 1$, являющиеся непосредственными R-предшественниками некоторых собственных подмножеств антицепи X, и выполняется $X \subseteq z_1^R \cup \dots \cup z_k^R$. В первом случае найдется элемент $y : z_1 R y$ с требуемыми свойствами $y \in \mathscr{F} : y \notin X^R$, $y \notin X^{-R} \& zRy$ (и по транзитивности отношения имеем zRy) или во втором случае в качестве такого элемента можем взять элемент z_1, для которого также выполнены требуемые свойства. И опять по определению $V(q)$ заключаем $z \models_V \Diamond q$, что влечет истинность $z \models_V \neg(A_n \wedge B)$.

Предположим теперь, что при $k \neq n$ правило $\mathscr{R}_k$ опровергается на $\mathscr{F}$, т. е. найдется элемент $c \in \mathscr{F}$ такой, что $c \not\models_V \Box\neg A_k$. При $k > n$ это невозможно, так как не может быть выполнено $c \models_V \Diamond p_j$, $j > n$, и тем самым заключение правила $\mathscr{R}_k$ верно при таком означивании.

Рассмотрим случай $k < n$. Тогда существуют элементы $a_1, \dots, a_k \in S_2(\mathscr{F})$ такие, что $cRa_j \& a_j \models_V \pi_j$. По построению фрейма $\mathscr{F}$ антицепь $\{a_1, \dots, a_k\}$ имеет ко-накрытие z в $\mathscr{F}$, так как она отлична от зафиксированной выше антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и логика имеет слабое свойство ко-накрытий. Легко проверить (как это сделано при доказательстве теоремы 3.2), что на данном ко-накрытии z посылка правила $\mathscr{R}_k$ не выполняется. Так как z ко-накрытие для антицепи $\{a_1, \dots, a_k\}, k < n$, и $a_j \models_V \pi_j$, выполняется $z \models_V A_k$. В силу $a_i \models_V \neg\Diamond q$ легко проверить, что истинность или ложность переменной q на этом ко-накрытии z влечет выполнимость формулы B из посылки правила, что влечет $z \models_V (A_n \wedge B)$. Следовательно, посылка правила опровергается на элементе z, что также влечет истинность правила $\mathscr{R}_k$. Таким образом, при $k \neq n$ правило $\mathscr{R}_k$ истинно на $\mathscr{F}$. $\Box$

Отсюда непосредственно получаем

Следствие 1. *Множество правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$ образует независимый базис допустимых правил вывода логик $S4$, $S4.1$, $S4.2$, Grz, $Grz.2$.*

Определение (аксиоматику) этих логик и описание характеристических классов фреймов можно найти, например, в [7, гл. 2]. Финитная аппроксимируемость этих логик была доказана в теоремах 2.6.12, 2.6.25, 2.8.11 из [7]. Для проверки остальных условий теоремы важно отметить, что любая нетривиальная антицепь элементов n-характеристической модели (или ее компоненты в случае логик $S4.2, Grz.2$) имеет рефлексивное ко-накрытие. Следовательно, добавление рефлексивного элемента как ко-накрытия к произвольной антицепи элементов произвольного корневого фрейма, адекватного логике из данного списка, также порождает фрейм, адекватный логике, т. е. эти логики имеют слабое свойство ко-накрытий. Условие (3) (критерий допустимости правила в редуцированной форме) для логик $S4, Grz$ были доказаны в теоремах 3.9.6, 3.9.9 из [7]. Для остальных логик наличие всех возможных ко-накрытий позволяет воспроизвести доказательство этого критерия в более простых ситуациях, т. е. условие (3) для этих логик также выполняется.

4. Базис ДПВ WCP-логик над GL

Говорят, что логика λ, расширяющая логику GL, имеет *слабое свойство ко-накрытий над* GL (weak co-cover property), если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathscr{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathscr{X}$ сгустков из $\mathscr{F}$ фрейм $\mathscr{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного иррефлексивного ко-накрытия к фрейму $\bigcup\limits_{c\in(\mathscr{X}^R\cup\mathscr{X})} c^R$, также является λ-фреймом. Логики, обладающие этим свойством, будем называть WCP-*логиками над* GL.

Обозначим $\Box_0\alpha := \alpha\wedge\Box\alpha$; $\Diamond_0 := \alpha\vee\Diamond\alpha$. Для всех чисел $n>1$, $1\le i,j\le n$, $n\in N$, определим формулы

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i}\neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1\le i\le n}\Diamond\pi_i;$$

$$A^{ir}_{n,1} := \Box_0\big[\bigwedge_{1\le i\le n}(p_i\to\neg\Diamond_0 q)\big]; \quad B^{ir} := \neg\Diamond q.$$

Определим также для чисел $n>1, n\in N$, последовательность правил вывода:

$$\mathscr{R}^{ir}_n := \frac{\Box_0\big(A^{ir}_{n,1}\wedge\neg(A_n\wedge B^{ir})\big)}{\Box_0\neg A_n};$$

Пусть логика λ, расширяющая логику GL, удовлетворяет условиям:

(1) λ финитно аппроксимируема;

(2) имеет слабое свойство ко-накрытий над GL;

(3) правило r в редуцированной форме недопустимо в $\lambda \iff$ существует λ-модель $\mathscr{M}=\langle F,V\rangle$ такая, что

(i) $\forall x\in F x\models_V \bigvee\phi_j$;

(ii) $\exists y\in\mathscr{F} y\not\models_V \Box x_0$;

(iii) $\forall\mathscr{D}\subseteq F\exists e\in F e\models_V \phi_e, \phi_e\in\mathrm{Pr}(r), \&\theta_2(\phi_e)=\bigcup\limits_{z\in\mathscr{D}}(\theta_1(\phi_z)\cup\theta_2(\phi_z))$.

Покажем, что последовательность правил вывода $\{\mathscr{R}^{ir}_n,\ n>1,\ n\in N\}$ образует независимый базис допустимых правил логики λ, расширяющей логику GL и удовлетворяющей условиям (1)–(3). Так как доказательство практически полностью повторяет доказательство в случае расширений $S4$ в более простом случае, ниже приводится только схема доказательства (там, где это не мешает пониманию).

Теорема 4.1. *Правила $\mathscr{R}^{ir}_n$, $n>1$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей GL, имеющей слабое свойство ко-накрытий над GL.*

Доказательство практически полностью повторяет доказательство теоремы 3.1. Если правило вывода $\mathscr{R}^{ir}_n$ недопустимо в логике λ, т. е. существует элемент $a\in Ch_k(\lambda)$ такой, что $a\nVdash_V \Box_0\neg A_n$, то найдутся элементы $b_1,\dots,b_n\in Ch_k(\lambda)$ такие, что $aRb_i\&b_i\Vdash_V\pi_i$. По слабому свойству ко-накрытий существует иррефлексивный элемент $b\in Ch_k(\lambda)$, являющийся ко-накрытием для множества $\{b_1,\dots,b_n\}$. По выбору элемента выполняется $b\Vdash_V A_n$. В силу истинности посылки правила имеем $b\Vdash_V A^{ir}_{n,1}$. Так как b является ко-накрытием для $\{b_1,\dots,b_n\}$, легко проверить, что формула $(A_n\wedge B^{ir})$ выполняется на элементе b при означивании V; противоречие. $\Box$

Теорема 4.2. *Пусть модальная логика* λ ($\supseteq GL$) *удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда любое допустимое правило* r (*в редуцированной форме*) *логики* λ *выводится из правил* $\{\mathscr{R}_n^{ir}, n > 1, n \in N\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2, поэтому в данном случае приведем схему доказательства, опуская некоторые детали. Предположим противное, т. е. некоторое допустимое в λ правило r не выводится из правил $\{\mathscr{R}_n^{ir},\ n > 1,\ n \in N\}$. Тогда найдется λ-алгебра $\mathscr{B} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, разделяющая эти правила: $\forall n \mathscr{B} \models \mathscr{R}_n^{ir}, \mathscr{B} \not\models r$.

Пусть задана модальная алгебра

$$\mathscr{A} := \mathscr{F}^+(V(x_0), V(x_1), \dots, V(x_k))) \in \mathrm{Var}(\lambda),$$

порожденная множеством подмножеств $(V(x_0), V(x_1), \dots, V(x_k)) \subseteq \mathscr{F}$ обертывающей алгебры $\mathscr{F}^+$, где $\mathscr{F}$ — заданный иррефлексивный и транзитивный λ-фрейм (определение этой алгебры было приведено выше), и пусть r — правило вывода в редуцированной форме.

Лемма 4. *Если правило* r *в редуцированной форме допустимо в логике* λ, *удовлетворяющей условиям* (1)–(3), *и опровергается на алгебре* $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, *то для некоторого* n *правило* $\mathscr{R}_n^{ir}$ *также опровергается на* $\mathscr{A}$.

Доказательство. Пусть правило r в редуцированной форме опровергается на алгебре $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$ при некотором означивании $V(x_i) := \mathscr{Y}_i \in \mathscr{A}$. Так как правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, то $\mathscr{F} \models_V \bigvee_{1 \le j \le t} \phi_j; \exists b \in \mathscr{F} : b \not\models_V \Box x_0$. Как и в рефлексивном случае, на каждом элементе $x \in \mathscr{F}$ выполняется только одна формула из посылки. Рассмотрим алгебру $(b^R)^+$, порожденную фреймом b^R, и ее подалгебру $\mathscr{B} := (b^R)^+(V(x_0), \dots, V(x_k))$, порожденную множеством элементов $V(x_0), \dots, V(x_k)$. Так как правило r опровергается на b^R, то $\mathscr{B} \not\models_V r$.

По свойству (3), которому удовлетворяет логика λ, условие (iii) не выполняется на b^R:

$$\exists \mathscr{G} \subseteq b^R \forall e \in F : e \models_V \phi_e \& \phi_e \in \Pr(r)$$
$$\Longrightarrow \theta_2(\phi_e) \neq \bigcup \{(\theta_1(\phi_z) \cup \theta_2(\phi_z)) : z \in \mathscr{G} \& z \models_V \phi_z \& \phi_z \in \Pr(r)\}. \quad (**)$$

Пусть антицепь X состоит из R-минимальных элементов $\mathscr{G}$, т. е. $X^R = \mathscr{G}^R \cup X$. Тогда X нетривиальна и не имеет ко-накрытия в $\mathscr{F}$. В противном случае, если найдется элемент $c \in b^R$, для которого справедливо $c^R = X^R \cup X$ либо $c^R = X^R \cup \{c\}$, то для формулы $\phi_c \in \Pr(r) : c \models_V \phi_c$, не выполнено условие $(**)$.

Как и прежде, определяем множества дизъюнктов посылки правила:

$$\mathscr{X} := \{\phi_j \mid \exists c \in b^R \cup b : c \models_V \phi_j\}; \quad \mathscr{Y} := \{\phi_j \mid \exists e \in X^R \cup X : e \models_V \phi_j\};$$
$$\mathscr{D} := \{\phi_s \mid \exists e \in X e \models_V \phi_s\}; \quad \mathfrak{B} := \{\phi_s \mid \exists e \in \mathscr{F} e \models_V \phi_s \& \phi_s \in \Pr(r)\}.$$

Так как зафиксированная антицепь $X \subset b^R$ не имеет ко-накрытия ε в $\mathscr{F}$, то $\forall \phi_j \in \mathfrak{B}$ выполняется:

$$\theta_2(\phi_j) \neq \bigcup_{\phi \in \mathscr{D}} (\theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi)). \quad (4)$$

Как и ранее, при доказательстве утверждения 3.3, расширим означивание V на алгебру $\mathscr{B}$ с переменных правила r на переменные правила $\mathscr{R}_n^{ir}$ следующим образом:

$$V(p_i) := V(f(p_i)) \ \&\ V(q) := V(P_V - P_T). \quad (5)$$

Воспроизводя почти без изменений доказательство утверждения 3.3, можно доказать

Утверждение 4.3. *При означивании V правило $\mathscr{R}_n^{ir}$ опровергается на алгебре $\mathscr{B}$.*

Доопределим означивание переменной q так, чтобы посылка правила R_n^{ir} стала истинна на $\mathscr{F} \setminus b^R$:

$$V(q) := \{y \in \mathscr{F} \setminus X^R : y \notin X^{-R} \& \exists x \in X^{-R}(xRy)\}$$
$$= V\Big(\neg \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \wedge \neg \Box_0\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\Big) \wedge \bigvee \Big\{\phi_y : \exists \phi_z (z \models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \Longrightarrow z \models_V \Diamond\phi_y\Big)\Big\}\Big).$$

Так как элемент b — R-предшественник антицепи X и $\forall e \in X e \models_V \pi_i$, то $b \not\models_V \Box_0 \neg A_n$, т. е. заключение правила опровергается на алгебре $\mathscr{A}$. Остается показать (аналогично доказательству леммы 3), что справедливо

Утверждение 4.4. *При таком определении означивания посылка правила R_n^{ir} истинна на алгебре $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathscr{F}$ и выполняется $c \models_V p_i$. Тогда $c \models_V f(p_i)$, откуда следует, что $c \models_V \phi_i$, $\phi_i \in \mathscr{D}$. В частности, $c \in X$. Тогда $c \not\models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \& c \models_V \Box_0\big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\big)$ по выбору $\mathscr{D}$ и $\mathscr{Y}$, т. е. $c \not\models_V q$. Если $e \in c^R$, то $e \models_V \Box_0\big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\big)$ и, значит, $e \not\models_V q$. Таким образом, $c \models_V \neg\Diamond_0 q$ и тем самым $c \models_V A_{n,1}^{ir}$. Для остальных элементов $c \notin X$ справедливо $\forall i\, c \not\models_V p_i$, т. е. $c \models_V A_{n,1}^{ir}$.

Предположим теперь, что $c \in \mathscr{F}$ и выполняется $c \models_V A_n$. Тогда по определению означивания имеем $c \models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j$, откуда $c \not\models_V q$ и $X \subseteq c^R$. Так как элемент c не является ко-накрытием антицепи X и $X \subseteq c^R$, то c есть R-предшественник элемента z, ко-накрывающего собственное подмножество антицепи X и тем самым

$$z \not\models_V \Box_0\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\Big) \& z \not\models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j,$$

или R-предшественник некоторого (R-максимального предшественника для X) элемента e, из которого достижим некоторый элемент $z \notin X^R$, т. е.

$$e \models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \& \exists z \in e^R z \not\models_V \Box_0\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{X}} \phi_i\Big) \& z \not\models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j.$$

В обоих случаях по определению $V(q)$ получаем $z \models_V q$. Стало быть, выполняется $c \models_V \neg q \& c \models_V \Diamond q$, т. е. $c \not\models_V B$.

Итак, показано, что при таком определении означивания посылка правила истинна на алгебре $\mathscr{A}$, что доказывает опровержимость правила $\mathscr{R}_n^{ir}$ на алгебре $\mathscr{A}$ при данном означивании V. Утверждение доказано. □

Таким образом, как только допустимое в логике λ правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, то на данной алгебре также опровергается одно из правил $\mathscr{R}_n^{ir}$ из набора правил $\{\mathscr{R}_n^{ir},\, n \in N\}$, что завершает доказательство теоремы 4.2. □

Теорема 4.5. *Пусть модальная логика λ ($\supseteq GL$) удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда множество правил $\{\mathscr{R}_n^{ir},\, n > 1,\, n \in N\}$ образует независимый базис допустимых правил вывода логики λ.*

Доказательство. Из теорем 4.1 и 4.2 следует, что множество правил $\{\mathscr{R}_n^{ir},\, n \in N\}$ образует базис для допустимых правил.

Доказательство его независимости почти полностью воспроизводит доказательство теоремы 3.4 с той разницей, что при построении фрейма $\mathscr{F}_n$, разделяющего правила, используются иррефлексивные элементы вместо рефлексивных. $\square$

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 2. *Множество правил* $\{\mathscr{R}_n^{ir}, n > 1, n \in N\}$ *образует независимый базис допустимых правил вывода логики* GL.

Определение (аксиоматику) этой логики и описание характеристических класса фреймов можно найти, например, в [7, гл. 2]. Финитная аппроксимируемость была доказана в теореме 2.6.20 из [7]. Для проверки остальных условий теоремы важно отметить, что любая нетривиальная антицепь элементов n-характеристической модели имеет иррефлексивное ко-накрытие. Следовательно, добавление иррефлексивного элемента как ко-накрытия к произвольной антицепи элементов произвольного корневого фрейма, адекватного логике GL, также порождает фрейм, адекватный логике, т. е. логика имеет слабое свойство ко-накрытий. Условие (3) (критерий допустимости правила в редуцированной форме) для логики GL доказано в теореме 3.9.12 из [7].

5. Заключение

В работе получены явные независимые базисы для допустимых правил вывода широкого класса расширений логик $S4$ и GL со слабым свойством ко-накрытий. Из доказательства результатов статьи видно, что условия финитной аппроксимируемости и наличие слабого свойства ко-накрытий являются необходимыми, ослабить их пока не представляется возможным. Видимо, единственным способом усилить полученные результаты является доказательство условия (3) для всех расширений логик $K4, S4, GL$ и т. д. Вопрос наличия конечного (явного) базиса как нетранзитивных логик (например, K, T), так и логик без слабого свойства ко-накрытий остается открытым.

Благодарность. Выражаю признательность и благодарность уважаемому рецензенту, замечания и предложения которого позволили существенно улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harrop R.* Concerning formulas of the types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$ // J. Symbol. Logic. 1960. V. 26, N 1. P. 27–32.
2. *Минц Г. Е.* Выводимость допустимых правил // Журн. советской математики. 1976. Т. 6, № 4. С. 417–421.
3. *Port J.* The deducibilities of $S5$ // J. Phylos. Logic. 1981. V. 10, N 1. P. 409–422.
4. *Lorenzen P.* Einfung in Operative Logik und Mathematik. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1955.
5. *Fridman H.* One hundred and two problems in mathematical logic // J. Symbol. Logic. 1975. V. 40, N 3. P. 113–130.
6. *Рыбаков В. В.* Критерий допустимости правил вывода в модальной системе $S4$ и интуиционистской логики H // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 546–572.
7. *Rybakov V.* Admissibility of logical inference rules. New-York; Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1997. (Stud. Logic Found. Math.; V. 136).
8. *Циткин А. И.* О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 314–323.
9. *Рыбаков В. В.* Базис для допустимых правил логики $S4$ и интуиционистской логики H // Алгебра и логика. 1984. Т. 24, № 1. С. 87–107.

10. *Римацкий В.В.* О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2 // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 4. С. 436–455.

11. *Римацкий В. В.* Явный базис для допустимых правил K-насыщенных табличных логик // Дискр. математика. 2022. Т. 34, № 1. С. 126–140.

12. *Rybakov V. V., Terziler M., Rimatskiy V. V.* Basis in semi-reduced form for the admissible rules of the intuitionistic logic IPC // Math. Logic Quart. 2000. V. 46, N 2. P. 207–218.

13. *Rybakov V. V., Terziler M., Genzer C.* An essay on unification and inference rules for modal logic // Bull. Sect. Logic. 1999. V. 28, N 3. P. 145–157.

14. *Iemhoff R.* On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic // J. Symbol. Logic. 2001. V. 66, N 2. P. 281–294.

15. *Rybakov V. V.* Construction of an explicit basis for rules admissible in modal system $S4$ // Math. Logic Quart. 2001. V. 47, N 4. P. 441–451.

16. *Jeřábek E.* Admissible rules of modal logics // J. Logic Comput. 2005. V. 15, N 4. P. 411–431.

17. *Jeřábek E.* Independent bases of admissible rules // Logic J. IGPL. 2008. V. 16, N 3. P. 249–267.

18. *Федоришин Б. Р.* Явный базис для допустимых правил вывода логики Гёделя — Леба GL // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 45, № 2. С. 423–430.

19. *Римацкий В. В.* Явный базис допустимых правил вывода логик конечной ширины // Журнал СФУ, Сер. математика и физика. 2008. № 1. С. 85–93.

Поступила в редакцию 6 октября 2022 г.
После доработки 23 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Римацкий Виталий Валентинович
Сибирский федеральный университет,
институт математики,
пр. Свободный 79, Красноярск 660041
`Gemmeny@rambler.ru`