Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.554

СТРОЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР С ТОЖДЕСТВОМ ЛИ–НИЛЬПОТЕНТНОСТИ СТЕПЕНИ 5

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Построен аддитивный базис относительно свободной альтернативной алгебры Ли-нильпотентной степени 5. Описаны ассоциативный центр и ядро этой алгебры; найдены T-порождающие элементы полного центра. Указана асимптотическая оценка в свободной альтернативной алгебре коразмерности T-идеала, порожденного коммутатором степени 5. Найдена конечномерная супералгебра, грассманова оболочка которой порождает многообразие альтернативных алгебр с тождеством Ли-нильпотентности степени 5.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.113

Ключевые слова: Ли-нильпотентная алгебра, альтернативная алгебра, коразмерность T-идеала, аддитивный базис свободной алгебры, центры алгебры.

Введение

В [1, 2] было начато изучение строения относительно свободной ассоциативной алгебры с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 над полем нулевой характеристики. В частности, было описано ее ядро (наибольший идеал, содержащийся в центре) и классифицированы собственные центральные многочлены этой алгебры.

В [3, 4] были получены более точные результаты о строении указанной алгебры над кольцом скаляров, содержащим $\frac{1}{6}$. В частности, был построен ее аддитивный базис, описано ядро, изучен ее центр, найдена асимптотика последовательности коразмерностей идеала $T^{(5)}$ в свободной ассоциативной алгебре.

Предлагаемая статья посвящена распространению указанных результатов на многообразие альтернативных алгебр Ли-нильпотентных степени 5. Заметим, что близкие результаты ранее были получены в [5] для метабелевых альтернативных алгебр.

Работа состоит из шести параграфов и посвящена изучению относительно свободной альтернативной алгебры $A^{(5)}$, удовлетворяющей тождеству Ли-нильпотентности степени 5.

В § 1 приведены основные обозначения и тождества, выполняющиеся в альтернативных алгебрах.

В § 2 доказаны две леммы о коммутаторах и теорема о произведении для алгебры $A^{(5)}$. Теорема о произведении в общем виде для альтернативных и йордановых алгебр была доказана автором в [6, 7].

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-11-00081).

В § 3 строится вспомогательная супералгебра $S^{(5)}$, с помощью которой опровергается ряд тождественных соотношений.

В § 4 указан аддитивный базис ассоциаторного идеала D алгебры $A^{(5)}$ и найдена асимптотика его полилинейной части $P_n \cap D$.

В § 5 указано разложение многообразия $\mathrm{Alt}^{(5)}$ альтернативных алгебр с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 в объединение трех подмногообразий, а также указана конечномерная супералгебра, грассманова оболочка которой порождает многообразие $\mathrm{Alt}^{(5)}$.

В заключительном § 6 изучаются центральные элементы алгебры $A^{(5)}$. В частности, доказано, что ядро $Z^*(A^{(5)})$ алгебры $A^{(5)}$ порождается слабым элементом Холла $[[a,b]^2,b]$ и ядро $Z^*(A^{(5)})$ не пересекается с ассоциаторным идеалом $D(A^{(5)})$. Кроме того, указаны порождающие элементы центра $Z(A^{(5)})$ как Т-пространства.

§ 1. Основные понятия

Всюду ниже термин «алгебра» означает линейную алгебру, обычно с единицей, над бесконечной областью целостности Φ, содержащей элемент $\frac{1}{6}$.

Алгебра называется *альтернативной*, если в ней выполнены тождества

$$x^2y = x(xy), \quad xy^2 = (xy)y.$$

Согласно теореме Артина алгебра альтернативна тогда и только тогда, когда всякая ее 2-порожденная подалгебра ассоциативна (см. [8, 9]).

Если a, b, c — элементы алгебры A, то положим:

$[a,b] = ab - ba$ — коммутатор элементов a, b;

$a \circ b = ab + ba$ — симметризованное произведение элементов a, b;

$(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор элементов a, b, c.

В дальнейшем, часто без пояснений, в альтернативной алгебре используется кососимметричность ассоциатора по всем переменным.

Напомним, что во всякой альтернативной алгебре справедливы тождества (см. [8, 9]):

$$[xy, z] = x[y,z] + [x,z]y + 3(x,y,z), \tag{1.1}$$

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 6(x,y,z), \tag{1.2}$$

$$(x^2,y,z) = x \circ (x,y,z) = (x, x \circ y, z), \tag{1.3}$$

$$(x,y,yz) = (x,y,z)y, \quad (xy,y,z) = y(x,y,z). \tag{1.4}$$

Пусть A — альтернативная алгебра и $A^{(+)}$, $A^{(-)}$ — присоединенные алгебры относительно «симметризованного» умножения $x.y = \frac{1}{2}x \circ y$ и коммутирования $[x,y]$. Известно (см. [9]), что $A^{(+)}$ — специальная йорданова алгебра, а $A^{(-)}$ — алгебра Мальцева. В частности, в алгебре $A^{(-)}$ выполнено *тождество Сейгла* [10]

$$[x,y,z,t] + [y,z,t,x] + [z,t,x,y] + [t,x,y,z] = [x,z,[y,t]], \tag{1.5}$$

как обычно, предполагается, что если расстановка скобок не указана, то она считается правонормированной, например, $[x,y,z,t] = [[[x,y],z],t]$.

В альтернативной алгебре A выполнены тождества (см. [9, 11])

$$4(a,b,c)^{(+)} = 2(b,a,c) + [b,[a,c]], \tag{1.6}$$

где $(a,b,c)^{(+)}$ — ассоциатор в йордановой алгебре $A^{(+)}$;

$$2[(x,y,z),t] = ([x,y],z,t) + ([y,z],x,t) + ([z,x],y,t), \tag{1.7}$$

$$(xy, z, t) + (x, y, [z, t]) = x(y, z, t) + (x, z, t)y. \tag{1.8}$$

Из последнего равенства следует, что

$$([x, y], z, t) + 2(x, y, [z, t]) = [x, (y, z, t)] + [(x, z, t), y]. \tag{1.9}$$

Следуя [6], альтернативную алгебру A назовем *Ли-нильпотентной степени* n, если коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ нильпотентна индекса n, т. е. любое полилинейное коммутаторное слово от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ является тождеством в A, но существует коммутаторное слово меньшей длины, которое в A отлично от нуля.

Как обычно, через $D_a : x \to [x, a]$ обозначим «коммутирование» алгебры A, определенное элементом a. Положим также $R_{a,b} : x \to (x, a, b)$. Из тождеств (1.1) и (1.3) следует, что отображения D_a и $R_{a,b}$ являются дифференцированиями алгебры $A^{(+)}$. Применяя правило Лейбница для дифференцирований, получаем равенство

$$(x \circ y)D_aD_b = x \circ (yD_aD_b) + (xD_aD_b) \circ y + (xD_{\overline{a}}) \circ (yD_{\overline{b}}), \tag{1.10}$$

где черта над элементами a и b означает симметризацию по ним.

Всюду ниже, если не оговорено противное, используются обозначения

$$U = U(A) = [A, A], \quad A' = \mathrm{idl}_A(U), \quad V = V(A) = (A, A, A), \quad D(A) = \mathrm{idl}_A(V),$$

где $\mathrm{idl}_A(X)$ обозначает идеал в A, порожденный множеством X.

Для центров алгебры A используются следующие обозначения:

$K(A) = \{k \in A \mid (\forall a \in A)[k, a] = 0\}$ — коммутативный центр,

$N_{\mathrm{Ass}}(A) = \{n \in A \mid (\forall a, b \in A)(n, a, b) = 0\}$ — ассоциативный центр,

$Z(A) = K(A) \cap N_{\mathrm{Ass}}(A)$ — (полный) центр,

$C^*(A)$ — наибольший идеал алгебры A, содержащийся в центре $C(A)$, идеал $C^*(A)$ называется С-*ядром.*

Далее, $K(A) = Z(A)$ ввиду (1.2) и $Z^*(A) \subseteq \mathrm{Ann}(A')$ ввиду (1.1). Ясно, что $A' = UA$.

§ 2. Предварительные результаты

2.1. Вспомогательные леммы. Введем следующие обозначения:

$F_{\mathrm{Alt}}[X]$ — свободная альтернативная алгебра (с единицей) над счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ свободных порождающих;

$[x_1, \dots, x_n]$ — правонормированный коммутатор степени $n \geq 2$, т. е. $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ и по индукции $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$.

Всюду далее через $\mathrm{Alt}^{(5)}$ обозначается многообразие альтернативных алгебр с тождеством

$$[x_1, x_2, \dots, x_5] = 0, \tag{2.1}$$

которое называется тождеством *Ли-нильпотентности степени* 5.

Через $U^{(n)}$ обозначим Т-пространство, порожденное правонормированным коммутатором $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ при $n \leq 5$.

Лемма 2.1. *В многообразии* $\mathrm{Alt}^{(5)}$ *выполнено тождество*

$$[x_1, x_2, x_3, [x_4, x_5]] = 0.$$

Иначе говоря, всякий коммутатор степени ≤ 5 *является линейной комбинацией правонормированных коммутаторов.*

Доказательство представим в виде последовательности шагов.

1^0. В силу тождества (1.2) верно $(a,b,c) \in U^{(3)}$.

2^0. В силу тождества Сейгла (1.5) элемент $[x,y,[z,t]]$ является линейной комбинацией правонормированных коммутаторов.

3^0. Из п. 2^0 и тождества (1.2) следует, что $([a,b],c,d), [(a,b,c),d] \in U^{(4)}$.

4^0. Докажем, что $([a,b],c,[x,y]) \in U^{(5)}$. Заметим сначала, что в силу (1.4)

$$([a,b],a,[x,y]) = [(b,a,[x,y]),a] \in [U^{(4)},a] \subseteq U^{(5)}.$$

Это означает, что по модулю $U^{(5)}$ элемент $([a,b],c,[x,y])$ кососимметричен по всем переменным. Тогда по модулю $U^{(5)}$ имеем

$$([a,b],c,[x,y]) \equiv -([x,b],c,[a,y]) \equiv ([x,y],c,[a,b]) = -([a,b],c,[x,y]),$$

откуда $2([a,b],c,[x,y]) \in U^{(5)}$ и получаем требуемое.

5^0. Пусть $z = [a,b]$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \equiv [x,(y,z,t)] + [(x,z,t),y] \quad (\text{в силу п. } 3^0) \quad &= ([x,y],z,t) + 2(x,y,[z,t]) \\ (\text{в силу } (1.9)) \quad &\equiv 2(x,y,[a,b,t]) \quad (\text{в силу п. } 4^0). \end{aligned}$$

Отсюда в силу тождества (1.2) имеем $[U^{(3)},U^{(2)}] \subseteq U^{(5)}$. Лемма доказана.

Замечание. Используя аддитивный базис свободной альтернативной алгебры Грассмана, построенный в [12], легко понять, что коммутатор степени 6 вида $[x_1,x_2,x_3,x_4,[x_5,x_6]]$ не является линейной комбинацией правонормированных коммутаторов степени 6.

Через $T^{(n)}(A)$ обозначим T-идеал алгебры A, порожденный всеми коммутаторами степени n. Всюду ниже через $A^{(n)}$ обозначается фактор-алгебра $A/T^{(n)}(A)$.

Если Y, Z — подмножества в алгебре A, то через $Y * Z$ обозначается подпространство, порожденное произведениями yz и zy, где $y \in Y$, $z \in Z$.

Следующие две леммы доказаны в [6] (см. леммы 2.1 и 3.2).

Лемма 2.2. *Для любых $x,y,z \in A$ верно включение*

$$[A,x] * [U^{(3)},x] + [U^{(2)},x] * (A,x,y) + [A,x] * (U^{(2)},x,y) + (A,x,y)(A,x,z) \subseteq T^{(5)}.$$

Лемма 2.3. *Для любых $x,y,z,t \in A = A^{(5)}$ выполнены соотношения*

$$[x,y]^2 \in N_{\mathrm{Ass}}(A), \quad [[x,y]^2,z] \in Z(A), \quad [[x,y]^2,[z,t]] = 0.$$

2.2. Теорема о произведении для алгебры $A^{(5)}$. В [6] доказана теорема о произведении для альтернативных алгебр. Она, вообще говоря, отличается от теоремы о произведении для ассоциативных алгебр. Для алгебры $A = A^{(5)}$ она имеет вид $\mathrm{idl}_A((A,A,A)^{(+)}) * T^{(3)}(A) = 0$. В этом пункте будет указан, по существу, единственный частный случай, когда теорема о произведении для ассоциативных алгебр дословно переносится на альтернативные алгебры. Более точно, справедлива следующая

Лемма 2.4. *В алгебре $A = A^{(5)}$ верно равенство $(T^{(3)})^2 = 0$.*

Доказательство представим в виде ряда шагов.

1^0. $(V(A),A,A) = 0 = (A,U,U)$ в силу тождества (1.2) и леммы 2.1.

2^0. Докажем, что $f = 0$, где $f := (a,b,c) \circ (x,y,z)$.

Заметим сначала, что элемент f кососимметричен по всем переменным. В самом деле, в силу (1.3) и п. 1^0 имеем

$$(a,b,c)\circ(a,y,z)=(a\circ(a,y,z),b,c)-a\circ((a,y,z),b,c)=((a^2,y,z),b,c)=0.$$

Меняя последовательно переменные a и x, b и y, c и z, получаем

$$f=(a,b,c)\circ(x,y,z)=-(x,b,c)\circ(a,y,z)=(x,y,c)\circ(a,b,z)$$
$$=-(x,y,z)\circ(a,b,c)=-f,$$

значит, $2f=0$ и $f=0$.

3^0. $(a,b,c)\circ[x,y,z]=0$ в силу теоремы о произведении для альтернативных алгебр [6], п. 2^0 и тождества (1.6).

4^0. Аналогично п. 3^0 получаем $[x,y,z]\circ[a,b,c]=0$. Значит, $U^{(3)}U^{(3)}=0$. Поскольку $U^{(3)}\subseteq N_{\mathrm{Ass}}(A)$ и $T^{(3)}=U^{(3)}A=AU^{(3)}$, то $(T^{(3)})^2=0$. Лемма доказана.

2.3. Некоторые тождества в алгебре $A^{(5)}$.

Лемма 2.5. *В алгебре $A=A^{(5)}$ идеал $T^{(3)}=T^{(3)}(A)$ обладает свойствами*

$$[[T^{(3)},A],A]=0=[T^{(3)},[A,A]].$$

Если $t\in T^{(3)}$, то элементы t и $w:=t[y_1,z_1]\dots[y_n,z_n]$, где $n\geq 1$, содержатся в ассоциативном ядре алгебры A и элемент w кососимметричен по переменным $y_1,z_1,\dots,y_n,z_n$.

Доказательство. Пусть $u\in U^{(3)}$, $x,a,b\in A$. Тогда в силу леммы 2.2 и тождества (1.10) последовательно получаем

$$[u,a]\circ[x,a]=0,\quad [u,\overline{a}]\circ[x,\overline{b}]=0,$$

$$(u\circ x)D_aD_b=u\circ(xD_aD_b)+(uD_aD_b)\circ x+(uD_{\overline{a}})\circ(xD_{\overline{b}})=0.$$

Проверим, что $(T^{(3)}(A),A,A)=0$. Во-первых, имеем $(U^{(3)},A,A)=0$. Во-вторых, $(U^{(3)}A,A,A)=0$ в силу тождества (1.8) и леммы 2.4. Из доказанных соотношений вытекают утверждения об идеале $T^{(3)}$.

Кроме того, ясно, что расстановка скобок на элементе w не играет роли. Поскольку $[a,b][a,c]\in T^{(3)}$, верно утверждение об элементе w. Лемма доказана.

В ходе доказательства леммы 2.5 было отмечено, что расстановка скобок на элементе w не играет роли. На всем протяжении статьи это замечание будет использоваться без дополнительных пояснений.

Лемма 2.6. *В алгебре $A^{(5)}$ выполнено тождество*

$$[(x,y,z)\cdot[z,t],a]=([x,z],y,z)\cdot[a,t].$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$([x,z],x,a)\cdot[z,t]=0. \tag{2.2}$$

В самом деле, по лемме 2.2

$$([x,z],x,a)\cdot[z,t]=-([x,z],x,z)\cdot[a,t]=0.$$

Линеаризуя равенство (2.2) по x, получаем

$$\{([x,z],y,a)+([y,z],x,a)\}\cdot[z,t]=0. \tag{2.3}$$

В силу леммы 2.4 и тождества (1.1) имеем

$$
\begin{aligned}
2[(x,y,z)\cdot[z,t],a] &= 2[(x,y,z),a]\cdot[z,t]\\
&= \{([x,y],z,a)+([y,z],x,a)+([z,x],y,a)\}\cdot[z,t] \quad (\text{в силу } (1.7))\\
&= \{([y,z],x,a)+([z,x],y,a)\}\cdot[z,t] \quad (\text{в силу леммы } 2.2)\\
&= -2([x,z],y,a)\cdot[z,t] \quad (\text{в силу } (2.3)) \quad = 2([x,z],y,z)\cdot[a,t] \quad (\text{по лемме } 2.2).
\end{aligned}
$$

После сокращения на 2 получаем требуемое тождество. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *В алгебре $A^{(5)}$ выполнено тождество*

$$[(a,b,x)\cdot[b,y],a]=0.$$

Доказательство. В силу тождества (1.1) и леммы 2.4 имеем

$$
\begin{aligned}
[(a,b,x)\cdot[b,y],a] = [(a,b,x),a]\cdot[b,y] = (a,b,[a,x])\cdot[b,y] \quad (\text{в силу } (1.4))\\
= 0 \ (\text{в силу леммы } 2.2).
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

§ 3. Вспомогательная супералгебра $S = S^{(5)}$

Построим вспомогательную супералгебру $S=S^{(5)}$, которая является расширением 6-мерного идеала с нулевым умножением и 2-мерной супералгебры $\Phi[\sqrt{1}]$.

Рассмотрим супералгебру $S=S_0\oplus S_1$, где четная часть S_0 имеет базис $1,a,b,c$, а нечетная часть S_1 — базис x,a',b',c'. Обозначим через R подпространство, порожденное элементами a,b,c,a',b',c'. Определим умножение на S с помощью следующей таблицы, считая, что 1 — единица алгебры, $x^2=1$ и $R^2=0$:

$$
\begin{gathered}
a\cdot x=a',\quad b\cdot x=b',\quad c\cdot x=c',\quad a'\cdot x=a+b,\quad b'\cdot x=b,\quad c'\cdot x=c,\\
x\cdot a=a'-c',\quad x\cdot a'=a+2b-c,\quad x\cdot b=b',\quad x\cdot b'=b,\quad x\cdot c=3b'-c',\quad x\cdot c'=3b-c.
\end{gathered}
$$

Лемма 3.1. *Супералгебра S альтернативна.*

Доказательство. Для проверки тождеств альтернативности достаточно вычислить ненулевые ассоциаторы от базисных элементов. Каждый из таких ассоциаторов содержит два элемента x и какой-то элемент $r\in R$. Если r совпадает с одним из элементов b, b', c, c', то

$$(x,x,r)=(x,r,x)=(r,x,x)=0.$$

Рассмотрим оставшиеся варианты $r=a$ и $r=a'$:

1) $(x,a,x)=(xa)x-x(ax)=(a'-c')x-xa'=a'x-c'x-xa'=(a+b)-c-(a+2b-c)=-b$,

$$(a,x,x)=(ax)x-a=a'x-a=(a+b)-a=b,$$

$$(x,x,a)=a-x(xa)=a-x(a'-c')=a-xa'+xc'=a-(a+2b-c)+(3b-c)=b;$$

2) $(x,a',x)=(xa')x-x(a'x)=(a+2b-c)x-x(a+b)=ax+2bx-cx-xa-xb=a'+2b'-c'-(a'-c')-b'=b'$,

$$(a',x,x)=(a'x)x-a'=(a+b)x-a'=bx=b',$$

$$
\begin{aligned}
(x,x,a')=a'-x(xa')=a'-x(a+2b-c)=a'-xa-2xb+xc\\
=a'-(a'-c')-2b'+(3b'-c')=b'.
\end{aligned}
$$

Для каждого из рассмотренных случаев 1 и 2 видно, что выполнены тождества супер-альтернативности

$$(p,q,r)+(-1)^{|p||q|}(q,p,r)=0,\quad (p,q,r)+(-1)^{|q||r|}(p,r,q)=0,$$

где $|p|$ обозначает четность элемента p. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Супер態алгебра S Ли-нильпотентна степени* 5.

Доказательство. Определим супер-коммутатор $[a,b]_s = ab - (-1)^{|a||b|}ba$ однородных элементов a, b. По индукции определяется правонормированный супер-коммутатор произвольной степени. Докажем, что супералгебра S удовлетворяет тождеству

$$[x_1, x_2, \dots, x_5]_s = 0, \tag{3.1}$$

где в левой части указан правонормированный супер-коммутатор.

Пусть $D(S)$ — ассоциаторный идеал алгебры S, P — линейное пространство, порожденное элементами b, b'. Заметим, что $[[S,S]_s, S]_s \subseteq D(S)$. Учитывая вычисления, проведенные в лемме 3.1, и таблицу умножения супералгебры S, убеждаемся, что $D(S) = P$. Далее, $[b', x]_s = 2b$, $[b, x]_s = 0$, значит, верно тождество (3.1).

Легко видеть, что $[[[a', x]_s, x]_s, x]_s = 6b \neq 0$. Лемма доказана.

Пусть G — ассоциативная алгебра Грассмана с 1 и набором стандартных порождающих $\xi_1, \xi_2, \dots$; $G = G_0 \oplus G_1$ — ее стандартная градуировка. Обозначим через $G(S) = (G_0 \otimes S_0) \oplus (G_1 \otimes S_1)$ грассманову оболочку вспомогательной супералгебры S.

Лемма 3.3. *В супералгебре S верно $([a', x]_s, x, x) = 2b$. В частности, в алгебре $G(S)$ верно*

$$h_1 := ([x_1, x_2], x_3, x_4)[x_5, x_6] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \neq 0$$

для любого $k \geq 3$. Кроме того, в $G(S)$ следующие два элемента, имеющие степень 2 по переменной x_1 и полилинейные по остальным переменным, отличны от нуля:

$$h_2 := (x_1, x_2, x_3)[x_1, x_4][x_5, x_6] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \neq 0,$$

$$h_3 := ([x_1, x_2], x_1, x_3)[x_4, x_5] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}] \neq 0.$$

Доказательство. В самом деле, из таблицы умножения в S и вычислений, проведенных в лемме 3.1, имеем

$$[a', x]_s = a'x + xa' = 2a + 3b - c,$$

$$([a', x]_s, x, x) = 2(a, x, x) + 3(b, x, x) - (c, x, x) = 2b.$$

Значит, $([a', x]_s, x, x) \neq 0$. Отсюда немедленно вытекает, что $h_1 \neq 0$. Если $h_2 = 0$, то, проводя линеаризацию подстановкой $x_1 \to [y, z]$, получаем нулевой элемент вида h_1.

Если $h_3 = 0$, то, линеаризуя это равенство, получаем

$$\{([y, x_2], z, x_3) + ([z, x_2], y, x_3)\}[x_4, x_5] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}] = 0.$$

Полагая здесь $y = \xi_1 \otimes a'$, $z = \xi_2 \otimes x$, $x_i = \xi_{i+1} \otimes x$, $i = \overline{2, 2k+1}$, получаем $([a', x]_s, x, x) = 0$, что невозможно. Лемма доказана.

§ 4. Аддитивный базис идеала $D(A^{(5)})$

В [13] был указан аддитивный базис ассоциаторного идеала $D(A^{(4)})$ относительно свободной альтернативной алгебры $A^{(4)}$, удовлетворяющей тождеству Ли-нильпотентности степени 4. Целью этого параграфа является построение аддитивного базиса идеала $D(A^{(5)})$. Для решения наших задач достаточно построения аддитивного базиса пространства $P_n(A^{(5)}) \cap D(A^{(5)})$, где $P_n(A^{(5)})$ —

подпространство алгебры $A^{(5)}$, состоящее из полилинейных многочленов, зависящих от переменных из множества $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$.

4.1. Собственные многочлены нечетной степени. Многочлен $f \in P_n(A^{(5)})$ называется *собственным*, если он обращается в нуль при подстановке $x_i = 1$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Пусть $n = 3 + 2k$, $k \geq 1$, и $X_n = \{p, q, r, y_i, z_i,\ i = \overline{1, k}\}$. Положим

$$f_n(p, q, r) = (p, q, r)w, \quad F_n = \mathrm{span}\langle f_n(p, q, r)\rangle, \tag{4.1}$$

где $w = [y_1, z_1][y_2, z_2] \dots [y_k, z_k]$ и $\mathrm{span}\langle Y\rangle$ обозначает подпространство, порожденное множеством Y.

Нетрудно понять, что всякий собственный многочлен нечетной степени $n \geq 5$ из $D(A^{(5)})$ лежит в пространстве F_n.

В [5] доказано, что в альтернативной метабелевой алгебре пространство полилинейных элементов из F_n порождается элементами

$$f_n = (x_1, x_2, x_3)[x_4, x_5] \dots [x_{n-1}, x_n],$$

$$f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} = (x_1, \overline{x_2}, x_3)[\overline{x_4}, x_5] \dots [x_{n-1}, x_n], \quad f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)} \quad (i = \overline{4, n}).$$

При доказательстве этого факта использовались тождество $(x, y, z)[y, z] = 0$ и кососимметричность элемента $f_n(p, q, r)$ по переменным, входящим в произведение коммутаторов; тождество метабелевости при этом не использовалось. Из тождества $(x, y, z) \circ [y, z] = 0$ [9] и леммы 2.5 вытекает, что эти свойства имеют место и для алгебры $A^{(5)}$.

Лемма 4.1. $\dim_\Phi(P_n \cap F_n) = n - 1$, *если* $n = 2k + 3$, $k \geq 1$.

Доказательство. Достаточно доказать линейную независимость элементов f_n, $f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)}$, $f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)}$ $(i = \overline{4, n})$. Допустим, что верно равенство

$$\alpha f_n + \rho f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} + \sum_{i \geq 4} \chi_i f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)} = 0 \tag{4.2}$$

для некоторых скаляров α, ρ, χ_i. Рассмотрим грассманову оболочку $G(S)$ вспомогательной супералгебры S. Подставляя $x_1 = 1 \otimes a$ и $x_i = \xi_i \otimes x$, $i \geq 2$, в равенство (4.2), в силу леммы 3.3 получим $\alpha = 0$. Тогда

$$\rho f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} + \sum_{i \geq 4} \chi_i f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)} = 0. \tag{4.3}$$

Пусть $i_0 \geq 5$ — фиксированный индекс. Полагая $x_{i_0} = u \in U$ в (4.3), получим равенство $\chi_{i_0}(x_1, x_2, u)[x_4 x_5] \dots [x_{n-1} x_n] = 0$, откуда в силу леммы 3.3 следует, что $\chi_{i_0} = 0$, значит, верно $\rho f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} + \chi_4 f_n^{\mathrm{Id}+(3,4)} = 0$. Полагая в этом равенстве $x_1 = x_2 = t$, получим $\rho(t, x_4, x_3)[t, x_5] \dots = 0$. Тогда $\rho = 0$ и $\chi_4 f_n^{\mathrm{Id}+(3,4)} = 0$. Аналогично получаем $\chi_4 = 0$. Итак, доказано, что $\alpha = 0$, $\rho = 0$ и все $\chi_i = 0$ при $i \geq 4$. Лемма доказана.

4.2. Собственные многочлены четной степени. Пусть $n = 4 + 2k$, $k \geq 0$, и $X_n = \{p, q, r, s, y_i, z_i,\ i = \overline{1, k}\}$. Положим

$$g_n(p, q, r, s) = ([p, q], r, s)w, \quad G_n = \mathrm{span}\langle g_n(p, q, r, s)\rangle, \tag{4.4}$$

где $w = [y_1, z_1][y_2, z_2] \dots [y_k, z_k]$. Нетрудно понять, что всякий собственный многочлен четной степени $n \geq 4$ из $D(A^{(5)})$ лежит в пространстве G_n. Докажем, что векторное пространство $P_n \cap G_n$ полилинейных многочленов из G_n порождается элементами вида

$$g_n(j) = ([x_1, x_j], x_{i_1}, x_{i_2})[x_{i_3}, x_{i_4}] \dots [x_{i_{n-1}}, x_{i_n}],$$

$$g'_n = ([x_2, x_3], x_1, x_4)[x_5, x_6] \dots [x_{n-1}, x_n],$$

где $\{i_1, \dots, i_n, j\} = \{2, 3, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Обозначим через P подпространство, порожденное элементами $g_n(j)$. Заметим, что элемент $([a, b], x, y)[z, t]$ кососимметричен по x, y, z, t в силу леммы 2.2. Значит, если элемент $([p, q], r, s)v$, где v — произведение коммутаторов, отличен от элементов вида $g_n(j), g'_n$, то можно считать, что $([p, q], r, s) = ([p, q], x_1, x_m)$, где $m \in 2, 3$. Поскольку в альтернативной алгебре верно тождество $([a, b], a, b) = 0$, справедлива и его линеаризация

$$([p, q], x_1, x_m) + ([x_1, q], p, x_m) + ([p, x_m], x_1, q) + ([x_1, x_m], p, q) = 0. \tag{4.5}$$

Стало быть, по модулю P элемент $([p, q], x_1, x_m)v$ сравним с точностью до знака с одним из элементов $([p, x_2], x_1, x_3)v$ или $([p, x_3], x_1, x_2)v$. По тем же соображениям каждый из этих элементов по модулю P сравним с элементом $\pm g'_n$. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Лемма 4.2. $\dim_\Phi(P_n \cap G_n) = n$, *если* $n = 2k + 4$, $k \geq 0$.

Доказательство. Докажем линейную независимость элементов $g_n(j)$, g'_n, где $j = \overline{2, n}$. Допустим, что верно равенство $\sum\limits_{j \geq 2} \alpha_j g_n(j) + \rho g'_n = 0$ для некоторых скаляров α_j, ρ. Докажем сначала, что $\alpha_j = 0$ для всех $j \geq 4$.

Поскольку все случаи рассматриваются аналогично, предположим, что $j = 4$. Заметим, что элементы $g_n(j)$ при $j \neq 4$ и g'_n являются йордановыми дифференцированиями по переменной x_4. Тогда должно быть выполнено равенство

$$\alpha_4(a, x_2, x_3)[x_1, a][x_5, x_6] \dots [x_{n-1}, x_n] = 0.$$

Отсюда после его линеаризации подстановкой $a \to u \in U$ получаем $\alpha_4 = 0$. Точно так же проверяется, что $\alpha_j = 0$ для $j = 5, \dots, n$.

Следовательно, верно равенство

$$\{\alpha_2([x_1, x_2], x_3, x_4) + \rho([x_2, x_3], x_1, x_4) - \alpha_3([x_3, x_1], x_2, x_4)\}w = 0, \tag{4.6}$$

где $w = [x_5, x_6] \dots [x_{n-1}, x_n]$. Переставляя в этом равенстве два раза переменные x_1, x_2, x_3 по циклу и складывая почленно три полученных равенства, получаем

$$\delta\{([x_1, x_2], x_3, x_4) + ([x_2, x_3], x_1, x_4) + ([x_3, x_1], x_2, x_4)\}w = 0,$$

где $\delta = \alpha_2 + \rho - \alpha_3$. Отсюда $\delta[(x_1, x_2, x_3), x_4]w = 0$ в силу тождества (1.7). Если $[(x_1, x_2, x_3), x_4]w = 0$, то элемент $h := [([x_1, x_2], x_3, x_4)w$ кососимметричен по всем переменным и в силу (1.9) $h = 0$, что противоречит лемме 3.3. Значит, $\delta = 0$ и $\rho = \alpha_3 - \alpha_2$. Тогда в силу (4.6) и (4.5) имеем

$$\begin{aligned} 0 = \{\alpha_2([x_1, x_2], x_3, x_4) + (\alpha_3 - \alpha_2)([x_2, x_3], x_1, x_4) - \alpha_3([x_3, x_1], x_2, x_4)\}w \\ = \{\alpha_2\{([x_1, x_2], x_3, x_4) + ([x_3, x_2], x_1, x_4)\}w \\ + \alpha_3\{([x_2, x_3], x_1, x_4) + ([x_1, x_3], x_2, x_4)\}w \\ = -\alpha_2\{([x_1, x_4], x_3, x_2) + ([x_3, x_4], x_1, x_2)\}w \\ + \alpha_3\{([x_2, x_3], x_1, x_4) + ([x_1, x_3], x_2, x_4)\}w. \end{aligned}$$

Поскольку среди последних четырех слагаемых три являются йордановыми дифференцированиями по x_2, то и $\alpha_3([x_2, x_3], x_1, x_4)w$ обладает этим свойством, откуда следует равенство $\alpha_3(t, x_1, x_4)[t, x_3]w = 0$. Тогда $\alpha_3 = 0$. Аналогично $\alpha_2 = 0$. Тем самым лемма доказана.

Замечание. Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ унитарно замкнуто и $B = F_{\mathfrak{M}}[X]$ — относительно свободная алгебра (с единицей 1) многообразия $\mathfrak{M}$. Напомним, что условие бесконечности области целостности скаляров Φ гарантирует, что всякий T-идеал алгебры B является однородным и, значит, инвариантен относительно операторов $\Delta(y)$ [9]. Произвольный многочлен (не обязательно полилинейный) называется *собственным*, если он аннулируется всеми операторами из множества $\Delta(1)$.

Стандартным одночленом над X называется правонормированное произведение $x_1^{k_1} \dots x_l^{k_l}$, где $k_i \geq 0$, $i = \overline{1, l}$.

Следуя [14], напомним, что

(а) всякий элемент из T-идеала T алгебры $C = F_{\mathrm{Alt}}[X]$ является линейной комбинацией элементов вида gv, где g — собственный многочлен из T, v — стандартный одночлен над X;

(б) всякий собственный многочлен g алгебры A линейно выражается через произведения $\pi = t_1 \dots t_m$ значений термов t_i, $i = \overline{1, m}$, в сигнатуре $\Sigma_0 = \{c\}$, где $c(x, y) = [x, y]$ — коммутатор;

(в) если $g \in D(C)$, то g является линейной комбинацией подходящих произведений вида $\pi = t_1 \dots t_m$, каждое из которых содержит терм t_i в сигнатуре $\Sigma_1 = \{c, d\}$, где $d(x, y, z) = (x, y, z)$ — ассоциатор, в запись которого обязательно входит символ d.

В силу тождества (1.2) в алгебре C терм $d(x, y, z)$ линейно выражается через термы в сигнатуре $\Sigma_0 = \{c\}$.

Из результатов п. 2.1 вытекает, что всякий собственный многочлен идеала $D(A^{(5)})$ является линейной комбинацией однородных многочленов вида (4.1) и (4.4). Если многочлен указанного вида имеет степень ≥ 3 по некоторой переменной, то он равен 0. Тем самым нетрудно указать аддитивный базис ассоциаторного идеала $D(A^{(5)})$. Однако в общем виде он нам не потребуется, поэтому мы не будем его выписывать.

4.3. Рост размерности пространств $P_n(A) \cap D(A)$.

Предложение 4.1. *Пусть $A = A^{(5)}$ и $d_n = \dim_\Phi P_n(A) \cap D(A)$. Тогда имеет место асимптотика*

$$d_n \sim (n-1) \cdot 2^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $X_n = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \varnothing$, где $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, $Z = \{z_1, \dots, z_l\}$. Стандартным одночленом над $Z = \{z_1, \dots, z_l\}$ является правонормированное произведение переменных $z_1, \dots, z_l$ при условии, что эти переменные упорядочены по возрастанию индексов. Через $F_k(Y)$ и $G_k(Y)$ обозначим образы пространств $P_k \cap F_k$ и $P_k \cap G_k$ при изотонных отображениях $X_k \longrightarrow Y$, $x_i \mapsto y_i$, $i = \overline{1, k}$. Заметим, что всякий элемент из пространства $P_n(A) \cap D(A)$ является линейной комбинацией элементов вида $f(y_1, \dots, y_k) \cdot v(z_1, \dots, z_l)$, где $k + l = n$, $f \in F_k \cup G_k$ и $v(z_1, \dots, z_l)$ — правильный одночлен над Z.

Нам потребуются следующие два хорошо известных равенства (см. [15]):

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad \sum_k \binom{n+1}{2k+1} = 2^n.$$

При $n \geq 5$ в силу лемм 4.1 и 4.2 для подходящей последовательности $\theta_n = o(2^n)$ (бесконечно малой относительно 2^n при $n \to \infty$) имеем

$$d_n = \theta_n + \sum_k 2k\left\{\binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1}\right\}$$

(поскольку при малых значениях k множества F_k и G_k не определены)

$$= \theta_n + \sum_k 2k\binom{n+1}{2k+1} = \theta_n + \sum_k (2k+1)\binom{n+1}{2k+1} - \sum_k \binom{n+1}{2k+1}$$

$$= \theta_n + (n+1)\sum_k \binom{n}{2k} - 2^n = \theta_n + (n+1)2^{n-1} - 2^n = \theta_n + (n-1)2^{n-1},$$

что и требовалось.

Из [4, теорема 3.1] и предложения 4.1 вытекает

Теорема 1. *Пусть $A = A^{(5)}$ и $c_n = \dim_\Phi P_n(A)$. Тогда имеет место асимптотика*

$$c_n \sim n^2 \cdot 2^{n-2}.$$

§ 5. Компоненты многообразия $\mathbf{Alt}^{(5)}$

Обозначим через $\mathrm{Ass}^{(5)}$ многообразие ассоциативных Ли-нильпотентных алгебр степени 5; через $\mathrm{var}(A)$ обозначается многообразие, порожденное алгеброй A.

Из лемм 4.1 и 4.2 вытекает

Предложение 5.1. *Многообразие* $\mathrm{Alt}^{(5)}$ *является объединением многообразий* $\mathrm{Ass}^{(5)}$ *и* $\mathrm{var}(G(S))$.

Многообразие $\mathrm{Ass}^{(5)}$ также может быть разложено в объединение двух компонент. Для их описания введем вспомогательные алгебры.

5.1. Супералгебра $V = V^{(5)}$. Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — ассоциативная супералгебра с единицей 1 в многообразии $\mathrm{Ass}^{(5)}$, порожденная четным элементом r и нечетным элементом x и удовлетворяющая определяющим соотношениям

$$r^2 \in Z(V), \quad x^2 = 1, \quad r \circ x = r^4 = 0.$$

Покажем, что алгебра V имеет размерность 8 над Φ. Заметим, что она линейно порождается элементами $r^k x^\varepsilon$, где $0 \leq k \leq 3$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Обозначим через Δ алгебру над Φ с базисом $1, \rho$, считая, что $\rho^2 = 0$. Проверим, что V является свободным Δ-модулем, порожденным элементами 1, r, x, rx. Рассмотрим сначала алгебру M над Δ с указанным базисом и следующей таблицей умножения:

1) 1 — единица,
2) $r \cdot r = \rho 1$, $x \cdot r = -rx$, $rx \cdot r = -\rho x$,
3) $1 \cdot x = x$, $r \cdot x = rx$, $x \cdot x = 1$, $rx \cdot x = r$,
4) $1 \cdot rx = rx$, $r \cdot rx = \rho x$, $x \cdot rx = -r$, $rx \cdot rx = -\rho 1$.

Легко видеть, что для ассоциативного и коммутативного кольца $\Delta = \Phi[\rho]$ алгебра M ассоциативна. В самом деле, операторы правого умножения на элементы r, x, rx в базисе $1, r, x, rx$ имеют вид

$$R(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(rx) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью указанных представлений легко проверить ассоциативность алгебры M, например,

$$R(x)R(rx) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} = -R(r) = R(x \cdot rx),$$

$$R(rx)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\rho & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \end{pmatrix} = R(rx \cdot rx).$$

На Φ-алгебре V имеется градуировка

$$V_0 = \operatorname{span}(1, r, \rho, \rho r), \quad V_1 = \operatorname{span}(x, rx, \rho x, \rho rx).$$

Докажем, что супералгебра V удовлетворяет тождеству (3.1). Во-первых,

$$[x, r]_s = [x, r] = x \cdot r - r \cdot x = -2rx, \quad [x, x]_s = 2, \quad [x, rx]_s = xrx + rx^2 = -r + r = 0,$$

$$[rx, r]_s = [rx, r] = r[x, r] = -2\rho x, \quad [rx, rx]_s = 2rxrx = -2\rho 1.$$

Значит, $V^{s(2)} = [V, V]_s \subseteq \operatorname{span}(1, rx) + \widehat{\rho} V$, где $\widehat{\rho} = \Phi \cdot \rho$. Тогда

$$V^{s(3)} = [V^{s(2)}, V]_s \subseteq [rx, V]_s + \widehat{\rho} V^{s(2)} \subseteq \widehat{\rho} + \widehat{\rho} x + \widehat{\rho} rx,$$

$$V^{s(4)} = [V^{s(3)}, V]_s \subseteq \widehat{\rho}[\operatorname{span}(1, x, rx), V]_s = \widehat{\rho}[\operatorname{span}(x, rx), V]_s \subseteq \widehat{\rho} + \widehat{\rho} rx,$$

$$V^{s(5)} = [V^{s(4)}, V]_s = 0.$$

Покажем, что для любого n существуют $x_0 \in V_0$, $x_1, y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n \in V_1$ такие, что

$$[x_1, x_0, x_0, x_0][y_1, z_1]_s \cdots [y_n, z_n]_s \neq 0. \tag{5.1}$$

Имеем

$$[x, r] = -2rx, \quad [[x, r], r] = [-2rx, r] = 4\rho x,$$

$$[[[x, r], r], r] = [4\rho x, r] = 4\rho[x, r] = -8\rho rx.$$

Поскольку $[x, x]_s = 2$ в супералгебре V, соотношение (5.1) доказано.

5.2. Алгебра $W = W^{(5)}$. Пусть $F_6^{(5)}$ — относительно свободная ассоциативная алгебра с единицей с тождеством (2.1) ранга 6, I — ее идеал, порожденный одночленами степени 7, $W = F_6^{(5)}/I$ — фактор-алгебра. Заметим, что алгебра W конечномерна.

В [4] был построен аддитивный базис свободной алгебры многообразия $\mathrm{Ass}^{(5)}$. Для проверки линейной независимости указанной системы многочленов использовалась модельная алгебра. Однако вместо нее можно использовать алгебры $G(V)$ и W. Поэтому справедливо

Предложение 5.2. *Многообразие* $\mathrm{Ass}^{(5)}$ *является объединением многообразий* $\mathrm{var}(G(V))$ *и* $\mathrm{var}(W)$.

5.3. О конечномерных супералгебрах, порождающих заданное многообразие. А. Р. Кемер [16] доказал, что любое многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 порождается грассмановой оболочкой некоторой конечнопорожденной супералгебры.

Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр. Будем говорить, что *супералгебра* M *порождает многообразие* $\mathfrak{M}$, если многообразие $\mathfrak{M}$ порождается ее грассмановой оболочкой $G(M)$.

Теорема 2. *Многообразие* $\mathrm{Alt}^{(5)}$ *альтернативных Ли-нильпотентных степени* 5 *алгебр порождается конечномерной супералгеброй.*

В качестве искомой супералгебры можно взять алгебру $V \oplus W \oplus S$.

Из предложения 5.2 вытекает, что многообразие $\mathrm{Ass}^{(5)}$ порождается конечномерной супералгеброй $V \oplus W$.

А. С. Гордиенко [17] указал конечномерную супералгебру, порождающую многообразие $\mathrm{Ass}^{(4)}$.

§6. Центральные элементы алгебры $A^{(5)}$

Как и прежде, через $A^{(5)}$ обозначается свободная алгебра счетного ранга многообразия $\mathrm{Alt}^{(5)}$.

6.1. Ассоциативный центр алгебры $A^{(5)}$**.**

Теорема 3. *Ассоциативный центр* $N_{\mathrm{Ass}}(A)$ *алгебры* $A = A^{(5)}$ *совпадает с идеалом* $T^{(3)}(A)$, *значит, совпадает с ее ассоциативным ядром* $N^*_{\mathrm{Ass}}(A)$.

Доказательство. В силу леммы 2.5 $T^{(3)}(A) \subseteq N_{\mathrm{Ass}}(A)$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что произведение коммутаторов $w = [y_1, z_1][y_2, z_2] \dots [y_{k+1}, z_{k+1}]$ не лежит в $N_{\mathrm{Ass}}(A)$. В самом деле, в силу леммы 3.3

$$([a', x]_s [x, x]_s^k, x, x) = 2^k([a', x]_s, x, x) \neq 0$$

в супералгебре S, что и требовалось доказать.

6.2. Центральное ядро алгебры $A^{(5)}$**.** Однородные многочлены, являющиеся линейными комбинациями многочленов вида (4.1) и (4.4), назовем *регулярными* D*-элементами.*

Через $\mathrm{vr}(f)$ обозначим набор переменных из X, от которых зависит элемент f.

Лемма 6.1. *Ассоциаторный идеал* $D(A)$ *алгебры* $A = A^{(5)}$ *имеет нулевое пересечение с центральным ядром* $Z^*(A)$*:* $D(A) \cap Z^*(A) = 0$.

Доказательство. Для полноты изложения приведем необходимые соображения, повторяя рассуждения из предложения 5.2 статьи [4]. Пусть f — однородный элемент из $D(A)$. Тогда $f = \sum_{v_i} p(v_i) v_i$, где суммирование ведется по стандартным одночленам v_i, $p(v_i)$ — регулярные D-элементы, причем $\mathrm{vr}(f) = \mathrm{vr}(p(v_i)) \cup \mathrm{vr}(v_i)$. Выполняя набор частичных дифференцирований по переменным из $\mathrm{vr}(v_i)$, получаем $p(v_i) \in Z^*(A)$. Но тогда $p(v_i)[x, y] = 0$ для любых переменных $x, y \in X$. Пусть $\mathrm{vr}(f) < x < y$. Если $p(v_i) \neq 0$, то элемент

$p(v_i)[x,y]$ можно считать ненулевым полилинейным многочленом. Это противоречит разд. 4 (аддитивный базис ассоциаторного идеала). Значит, каждый элемент $p(v_i)$ равен 0 и $f = 0$. Лемма доказана.

В силу [3, следствие из теоремы] и леммы 6.1 справедлива

Теорема 4. *Центральное ядро $Z^*(A)$ алгебры A как* T-*пространство порождается слабым элементом Холла* $[[x_1,x_2]^2,x_2]$.

6.3. Полный центр алгебры $A^{(5)}$. Целью этого пункта является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5. *Полный центр $Z(A)$ алгебры $A = A^{(5)}$ как* T-*пространство порождается элементами*

$$[x_1,x_2,x_3,x_4], \quad [[x_1,x_2,x_3]\cdot x_4,x_5], \quad [[x_1,x_2]^2,x_3]. \tag{6.1}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы. Обозначим через Z_0 T-пространство алгебры A, порожденное элементами (6.1). Заметим, что в силу лемм 2.3–2.5 элементы (6.1) центральны. Учитывая результаты работы [4], достаточно понять, что каждый центральный элемент, содержащийся в ассоциаторном идеале $D(A)$, лежит в Z_0.

Напомним, что в п. 4.1 через F_n обозначалось пространство, порожденное элементами f_n, $f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)}$, $f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)}$ $(i=\overline{4,n})$.

Лемма 6.2. *Пространство F_n не содержит ненулевых элементов из центра $Z(A)$ алгебры $A = A^{(5)}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что F_n порождается элементами

$$f_n = (x_1,x_2,x_3)[x_4,x_5]\dots[x_{n-1},x_n], \quad f_n(4) = f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)},$$

$$f_n(i) = (x_1,x_2,\overline{x_3})[\overline{x_i},x_4][x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{n-6}},x_{j_{n-5}}], \quad 5 \le i \le n,$$

где $j_1 < \dots < j_{n-5}$ и $\{j_1,\dots,j_{n-5}\} \cup \{1,2,3,4,i\} = \{1,2,\dots,n\}$.

В самом деле, в силу леммы 2.5 многочлены $f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)}$ и $f_n(i)$ при $5 \le i \le n$ совпадают с точностью до знака $\pm$.

Рассмотрим элемент вида $k = \alpha f_n + \beta f_n(4) + \sum\limits_{i=5}^{n} \gamma_i f_n(i)$, где $\alpha,\beta,\gamma_i \in \Phi$. Допустим, что $k \in K(A)$. Тогда его значение k' при $x_1 = x_2 = z \in X$ также лежит в $K(A)$. Только второе слагаемое для k в указанной точке отлично от 0, значит, $k' = \beta f_n(4)|_{x_1=x_2=z} \in K(A)$. Отсюда следует, что верно равенство $\beta[(z,x_4,x_3)[z,x_5]v,a] = 0$, где v — произведение коммутаторов, в запись которого не входит ни одна из переменных z, x_3, x_4, x_5, a. D силу лемм 2.4, 2.5 и 2.6

$$0 = \beta[(z,x_4,x_3)[z,x_5]v,a] = \beta[(z,x_4,x_3)[z,x_5],a]v = \beta([x_3,z],x_4,z)[x_5,a]v.$$

Отсюда $\beta = 0$ в силу леммы 3.3 и $k = \alpha f_n + \sum\limits_{i=5}^{n} \gamma_i f_n(i)$. Поскольку $k \in K(A)$, то $[k,x_1] = 0$. Заметим, что если v — коммутаторное слово, то в силу (1.1) и лемм 2.4, 2.6 $(a,b,x)[b,y]v = (a,b,x)[b,yv]$, значит, $[f_n(i),x_1] = 0$ по лемме 2.7, но тогда для $w = [x_4,x_5]\dots[x_{n-1},x_n]$

$$0 = \alpha[f_n,x_1] = \alpha[(x_1,x_2,x_3)w,x_1] = \alpha(x_1,[x_1,x_2],x_3)w.$$

В силу леммы 3.3 имеем $\alpha = 0$ и $k = \sum\limits_{i=5}^{n} \gamma_i f_n(i)$. Выберем фиксированный индекс $i_0 \geq 5$ и рассмотрим равенство $[k, x_{i_0}] = 0$. Поскольку для любого $t \in T^{(3)}(A)$ верно $[t[a,b],a] = [t,a][a,b] = 0$ в силу лемм 2.5 и 2.2, то

$$0 = \sum_{i=5}^{n} \gamma_i [f_n(i), x_{i_0}] = \gamma_{i_0}[f_n(i_0), x_{i_0}]$$
$$= \gamma_{i_0}[(x_1, x_2, x_{i_0})[x_3, x_4][x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{n-6}}, x_{j_{n-5}}], x_{i_0}],$$

где последний элемент полилинеен по всем переменным, кроме x_{i_0}, относительно которой он имеет степень 2. Аналогично предыдущему отсюда получаем $\gamma_{i_0} = 0$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам необходимо также пространство G_n, введенное в п. 4.2. Заметим, что оно центрально, т. е. $G_n \subseteq Z(A)$.

Лемма 6.3. *Пусть a — стандартный одночлен и g — многочлен вида*

$$g = wu_1 \ldots u_s, \tag{6.2}$$

где $w = [v, x]$, $v \in (X, X, X)$, $u_1, \ldots, u_s \in U^{(2)}$, $x \in X$. Тогда существуют элементы f_i вида (4.1) *и стандартные одночлены $a_i \in A$ такие, что*

$$ga + \sum_i f_i a_i \in [D(A), A].$$

Доказательство. Используя теорему 3, преобразуем элемент ga:

$$ga = ([v,x]u_1 \ldots u_s)a = [v,x](u_1 \ldots u_s a) = [v \cdot u_1 \ldots u_s a, x] - vu_1 \ldots u_s[a, x].$$

Первое слагаемое $z = [v \cdot u_1 \ldots u_s a, x]$ лежит в $[D(A), A]$, а второе слагаемое $vu_1 \ldots u_s[a,x]$ в силу леммы 4.1 индукцией по степени одночлена a представимо в виде $\sum f_i a_i$, где f_i — элементы вида (4.1), a_i — стандартные одночлены. Лемма доказана.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 5. В [4] доказано, что центр свободной ассоциативной алгебры Ли-нильпотентной степени 5 как T-пространство порождается элементами (6.1). Поэтому достаточно рассмотреть элемент $f \in Z(A) \cap D(A)$.

Как отмечено выше (см. замечание в конце п. 4.2), произвольный многочлен из $D(A)$ представим в виде $\sum\limits_i f_i a_i$, где f_i — собственные многочлены из $D(A)$, a_i — стандартные одночлены; впрочем, это представление легко получить индукцией по степени элемента f.

Заметим, что многочлены f_i имеют вид (4.1) или (4.4). Всякий многочлен вида (4.4) в силу тождеств (1.4) и (1.9) является линейной комбинацией элементов вида (6.2).

Если $f \in D(A) \cap Z(A)$, то в силу леммы 6.3 по модулю пространства $[D(A), A]$ он представим в виде

$$f \equiv \sum_i f_i a_i, \tag{6.3}$$

где f_i являются линейными комбинациями элементов вида (4.1), a_i — попарно различные стандартные одночлены.

Докажем от противного, что все $f_i = 0$. Ясно, что пространство $[D(A), A]$ инвариантно относительно подстановок $x = 1$ для любого $x \in X$.

Выберем среди стандартных одночленов a_i из сравнения (6.3) элемент a_m максимальной степени и подставим в него $x = 1$ для всех x, входящих в состав a_m. Тогда имеем $f_i \in [D(A), A] \subseteq Z(A)$. Получили противоречие с леммой 6.2. Тем самым доказано, что $D(A) \cap Z(A) \subseteq [D(A), A] \subseteq Z_0$. Теорема 5 доказана.

Благодарность. Автор признателен рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ряд замечаний, способствующих ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гришин А. В., Пчелинцев С. В.* О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 113–130.
2. *Гришин А. В., Пчелинцев С. В.* Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 12. С. 54–72.
3. *Пчелинцев С. В.* Тождества модельной алгебры кратности 2 // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 6. С. 1389–1411.
4. *Пчелинцев С. В.* Аддитивный базис относительно свободной ассоциативной алгебры с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 и его применения // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 1. С. 175–193.
5. *Пчелинцев С. В.* Тождества метабелевых альтернативных алгебр // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 894–915.
6. *Пчелинцев С. В.* Теоремы о произведении для альтернативных алгебр и некоторые их применения // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 383–404.
7. *Пчелинцев С. В.* Ассоциативные и йордановы Ли-нильпотентные алгебры // Алгебра и логика. (В печати).
8. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Academic Press, 1966.
9. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
10. *Sagle A. A.* Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101, N 3. P. 426-458.
11. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.).
12. *Shestakov I. P., Zhukavets N.* The free alternative superalgebra on one odd generator // Internat. J. Algebra Comput. 2007. V. 17, N 5/6. P. 1215–1247.
13. *Ваулин А. Н.* Свободная альтернативная алгебра с тождеством $[[[x, y], z], t] = 0$ // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, № 1. С. 54–60.
14. *Райзер Г. Дж.* Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.
15. *Кемер А. Р.* Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 5. С. 1042–1059.
16. *Гордиенко А. С.* Коразмерности коммутатора длины 4 // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 1. С. 191–192.
17. *Пчелинцев С. В., Шестаков И. П.* Константы частных дифференцирований и примитивные операции // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 3. С. 317–347.

Поступила в редакцию 4 июля 2023 г.
После доработки 4 июля 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович (ORCID 0000-0001-7857-9532)
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр-т, 49/2, Москва 125167;
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербург 199034
pchelinzev@mail.ru