Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 513.81

РАДИУС ИНЪЕКТИВНОСТИ И КРАТЧАЙШИЕ СПЛЮСНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

В. Н. Берестовский, А. Мустафа

Аннотация. Найдены геодезические, кратчайшие, множества раздела и радиус инъективности сплюснутого эллипсоида вращения в трехмерном евклидовом пространстве.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.102

Ключевые слова: геодезическая, кратчайшая, множество раздела, правило Клеро, радиус инъективности, эллипсоид вращения.

§ 1. Введение

В следствии 4.14 из [1] доказано, что радиус инъективности $i(M)$ компактного риманова многообразия M равен

$$i(M) = \min\{t_0, l_0/2\}, \tag{1}$$

где t_0 — минимум первых сопряженных значений вдоль всевозможных геодезических на M, параметризованных длиной дуги, l_0 — минимум длин нетривиальных геодезических петель на M.

Один из рецензентов предварительной версии книги [2] задал вопрос о существовании компактных римановых многообразий M таких, что $i(M) = t_0 < l_0/2$.

В теореме 1.5.55 из [2] доказано, что эллипсоид вращения

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad a > 0, \tag{2}$$

обладает этим свойством, если $a < 4/(3\pi)$.

Максимум гауссовой кривизны такого эллипсоида достигается на его экваторе и равен $1/a^2$. Поэтому вследствие известных результатов римановой геометрии t_0 равно πa, т. е. первому сопряженному значению вдоль экватора. Неравенство $l_0/2 > \pi a$ для $0 < a < 4/3\pi$ получается в [2] простой, но достаточно грубой нижней оценкой для l_0 через длины некоторых вписанных ломаных для ортогональных проекций геодезических эллипсоида на плоскость его экватора.

Эллипсоид вращения (2) называется *сплюснутым* (соответственно *вытянутым*), если $0 < a < 1$, $a > 1$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282 от 05.04.2022.

Главный результат этой статьи состоит в том, что $i(M) = \pi a < l_0/2$, если M — эллипсоид (2), $0 < a < 1$, с индуцированной из объемлющего евклидова трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ метрикой. Он доказан в теореме 2.

В теореме 3 найдены кратчайшие сплюснутого эллипсоида вращения, а в следствии 6 — множества раздела для всех его точек.

Ясно, что рассмотренный здесь эллипсоид (метрически) подобен с коэффициентом c сплюснутому эллипсоиду вращения с полуосями $0 < b < c$, где $b/c = a$.

Отметим две статьи, результаты которых связаны со следствием 6.

В [3] доказано, что множество раздела каждой точки на любом эллипсоиде в $\mathbb{R}^3$ есть некоторый отрезок линии кривизны, проходящей через диаметрально противоположную точку. Также доказано, что сопряженное множество для каждой точки эллипсоида с тремя разными полуосями имеет ровно четыре острия, что известно как последнее геометрическое утверждение Якоби.

Заметим, что линии кривизны на эллипсоиде вращения (отличном от сферы) — (только) меридианы и параллели.

В [4] рассматривается поверхность вращения M (класса C^∞) в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле, диффеоморфная 2-сфере с полюсами p и q, зеркально симметричная относительно некоторой параллели (экватора). В основной теореме доказано, что если гауссова кривизна поверхности является неубывающей (соответственно невозрастающей) функцией расстояния до p вдоль меридиана от p до экватора, то множество раздела C_x для каждой точки $x \in M \setminus \{p, q\}$ есть $\{-x\}$ или некоторый отрезок параллели (соответственно меридиана), проходящего через $-x$. Более того, если $C_x = \{-x\}$ для некоторой такой точки x, то гауссова кривизна поверхности M постоянна. Заметим, что гауссова кривизна M в p и q неотрицательна.

В отличие от нашей статьи, размеры отрезков C_x для рассматриваемого нами случая не указаны ни в [3], ни в [4].

§ 2. Основные результаты

Эллипсоид вращения (2) задается параметрическими уравнениями

$$R(u, \varphi) = (\cos u \cos\varphi, \cos u \sin\varphi, a \sin u), \quad 0 < a, \ -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{3}$$

Верхнюю половину эллипсоида можно задать уравнением

$$z = a\sqrt{1 - r^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \cos u, \quad 0 \le r \le 1. \tag{4}$$

Гауссова кривизна поверхности вращения вида $z = z(r)$ вычисляется как в разд. 2.7 из [5]:

$$K(r) = \frac{z'(r) z''(r)}{r(1 + z'^2(r))^2}. \tag{5}$$

Для эллипсоида (4) получаем

$$z'(r) = -ar(1 - r^2)^{-1/2}, \quad z''(r) = -a(1 - r^2)^{-3/2},$$

$$1 + z'^2(r) = (1 + (a^2 - 1)r^2)(1 - r^2)^{-1}, \quad z'(r)z''(r) = a^2 r(1 - r^2)^{-2},$$

$$K(r) = \frac{a^2}{(1 + (a^2 - 1)r^2)^2}, \tag{6}$$

$$a^2 = K(0) \leq K(r) \leq K(1) = \frac{1}{a^2}, \quad 0 < a < 1, \tag{7}$$

$$K(r) \equiv 1, \quad a = 1,$$

$$\frac{1}{a^2} = K(1) \leq K(r) \leq K(0) = a^2, \quad 1 < a. \tag{8}$$

Классическое *правило* (*теорема*) *Клеро* утверждает [5, (2.12.101)], что для любой геодезической $\gamma = \gamma(t)$ на произвольной поверхности вращения

$$r(t)\cos\psi(t) = \frac{r^2(t)\varphi'(t)}{|\gamma'(t)|} = \mathrm{const} := \mathrm{I}\,. \tag{9}$$

Здесь $r(t)$ — радиус параллели (поверхности), проходящей через точку $\gamma(t)$, $\psi(t)$ — угол между касательным вектором геодезической и параллелью в той же точке, $\varphi(t)$ — полярный угол вокруг оси вращения поверхности; мы будем предполагать, что $\varphi'(t) \geq 0$.

Следствие 1. *Каждая геодезическая* $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *на эллипсоиде* (2) *с* $|\gamma'(t)| \equiv 1$, $\mathrm{I} := r_0 > 0$ *и* $\phi'(t) > 0$ *однозначно определяется по* r_0 *— минимальному радиусу параллелей, пересекающих геодезическую — с точностью до сдвига параметра* t. *Эта геодезическая совпадает с экватором при* $r_0 = 1$, *но пересекает экватор и касается обеих параллелей радиусом* r_0 *при* $r_0 \in (0, 1)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что все утверждения этого следствия вытекают из правила Клеро и того факта, что вращения вокруг оси z и зеркальные отражения относительно экваториальных и меридиональных плоскостей — изометрии эллипсоидов. $\square$

Определение 1. Пусть $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — параметризованная длиной дуги геодезическая на полном римановом многообразии (M, g) с началом $\gamma(0) = p$. Точка $\gamma(t)$, $t \neq 0$, называется *сопряженной точкой к* p *вдоль* γ, если дифференциал $d(\mathrm{Exp}_p)_{t\gamma'(0)}(\cdot)$ (Exp_p— экспоненциальное отображение в точке p) — вырожденное линейное отображение. *Первым сопряженным значением к* p *вдоль* γ называется точная нижняя граница чисел $t > 0$, для которых $\gamma(t)$ — сопряженная точка к p вдоль γ.

Следствие 2. *Для любой точки геодезической эллипсоида* (2) *расстояние по этой геодезической до ближайшей сопряженной* (*по отношению к геодезической*) *точки меньше* $\frac{\pi}{a}$ *и не меньше* πa, *если* $0 < a < 1$, *и больше* $\frac{\pi}{a}$ *и не больше* πa, *если* $a > 1$; *оно равно* πa *только для одной геодезической — экватора. Длина любой замкнутой геодезической, состоящей из двух противоположных меридианов* (*двойного меридиана*), *меньше* 2π *и больше* 4, *если* $0 < a < 1$, *и больше* 2π, *если* $a > 1$.

Доказательство. Из (6)–(8) следует, что секционная кривизна эллипсоида является возрастающей положительной функцией от r, достигает максимального значения $\frac{1}{a^2}$ на экваторе, минимального значения a^2 в полюсах, если $0 < a < 1$, и является убывающей положительной функцией от r, достигает минимального значения $\frac{1}{a^2}$ на экваторе, максимального значения a^2 в полюсах, если $a > 1$. Из этого наблюдения, следствия 1 и теоремы 1.5.26 в [2] вытекают обе части первого утверждения.

Последнее утверждение является следствием того, что любой двойной меридиан является замкнутой геодезической по правилу Клеро, проходит через полюсы при $r_0 = 0$, а один из удвоенных меридианов — эллипс $x^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1$, выпуклая плоская кривая, вписанная в окружность единичного радиуса с длиной 2π при $0 < a < 1$ и описанная вокруг этой окружности при $a > 1$. Кроме того, длина двойного меридиана всегда больше 4, удвоенной длины его ортогональной проекции на плоскость экватора. $\square$

Теорема 1. *Рассмотрим любую геодезическую на эллипсоиде* (2), *отличную от экватора и двойных меридианов. Тогда разность двух последующих значений полярного угла φ при пересечении этой геодезической с экватором меньше π, если $0 < a < 1$, и больше π, если $a > 1$.*

Доказательство. Для простоты предположим, что эта геодезическая параметризована длиной дуги, т. е. $|\gamma'(t)| = 1$. Так как $z = a\sqrt{1-r^2}$, достаточно найти ортогональную проекцию геодезической на плоскость $z = 0$ с полярными координатами (r, ϕ), другими словами, найти функцию $r = r(\varphi)$ вдоль геодезической. Из (9) следует, что

$$r\cos\psi = r_0 \Rightarrow \cos\psi = \frac{r_0}{r}, \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r}, \quad \varphi' = \frac{\cos\psi}{r} = \frac{r_0}{r^2}. \tag{10}$$

Кроме того,

$$\gamma'(t) = R'_\varphi(u(t), \varphi(t))\varphi'(t) + R'_u(u(t), \varphi(t))u'(t), \quad \langle R'_\varphi, R'_u\rangle \equiv 0, \tag{11}$$

$$\sin^2\psi = |R'_u|^2 u'^2 = (\sin^2 u + a^2\cos^2 u)u'^2 = (1 + (a^2-1)r^2)u'^2, \; u' = \frac{-\sin\psi}{\sqrt{1+(a^2-1)r^2}},$$

если $u = u(t) > 0$ и $r(t) = \cos u(t)$ возрастает от r_0 до 1. Тогда

$$r' = -\sin u \cdot u' = \frac{\sqrt{1-r^2}\sqrt{r^2-r_0^2}}{r\sqrt{1+(a^2-1)r^2}}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r\sqrt{(1-r^2)(r^2-r_0^2)}}{r_0\sqrt{1+(a^2-1)r^2}}.$$

Последнее выражение больше (меньше) $\frac{r\sqrt{(1-r^2)(r^2-r_0^2)}}{r_0}$ (т. е. $dr/d\varphi$ при $a = 1$ — для единичной сферы), если $0 < a < 1$ ($a > 1$). Поскольку для единичной сферы указанная в теореме разность равна π, теорема 1 доказана. $\square$

Предложение 1. *Пусть геодезическая $\gamma = \gamma(t) = R(u(t), \varphi(t))$ на эллипсоиде* (2), *отличная от экватора и двойных меридианов, начинается на экваторе при $\varphi_0 = 0$. Тогда при возрастании φ эта геодезическая первый раз пересечет экватор при φ_1, где $\pi a < \varphi_1 < \pi$, если $0 < a < 1$, и $\pi < \varphi_1 < \pi a$, если $a > 1$.*

Доказательство. Неравенство $\varphi_1 < \pi$ при $0 < a < 1$ и неравенство $\varphi_1 > \pi$ при $a > 1$ доказаны в теореме 1. Пусть $\varphi = \varphi(r)$ и $\theta = \theta(r)$ — полярные углы для геодезической из предложения при $a \neq 1$ и аналогичной геодезической при $a = 1$, т. е. на единичной сфере $z = \sqrt{1-r^2}$, с начальными данными $\varphi(r=1) = \theta(r=1) = 0$. Вследствие доказательства теоремы 1 при убывании r от 1 до r_0

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-r\sqrt{(1-r^2)(r^2-r_0^2)}}{r_0\sqrt{1+(a^2-1)r^2}}, \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{-r\sqrt{(1-r^2)(r^2-r_0^2)}}{r_0}.$$

Следовательно, можно рассматривать функцию $\varphi(\theta) := \varphi(r(\theta))$. Для нее

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\Big/\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{1+(a^2-1)r^2}. \tag{12}$$

Последнее выражение больше (меньше), чем $\sqrt{1+(a^2-1)} = \sqrt{a^2} = a$, если $0 < a < 1$ ($a > 1$). Хорошо известно, что при уменьшении r от 1 до r_0 получим $\theta(r_0) = \pi/2$ и далее при увеличении r от r_0 до 1 получим $\theta_1 = \theta(1) = \pi$. Тогда

$$\varphi_1 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)}\,d\theta = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)}\,d\theta, \qquad (13)$$

что вследствие сказанного больше πa при $0 < a < 1$ и меньше πa при $a > 1$. $\square$

Лемма 1. *Если* $0 < r_0 < 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$, *то* $r(\theta) = r_0\bigl(1+\bigl(r_0^2-1\bigr)\cos^2\theta\bigr)^{-1/2}$.

Доказательство. По теореме косинусов сферической геометрии для прямоугольного сферического треугольника с катетами θ, $u(\theta)$ и гипотенузой l получаем

$$\cos l = \cos u(\theta)\cdot\cos\theta = r(\theta)\cos\theta.$$

По теореме синусов сферической геометрии

$$\sin l = \sqrt{1-r^2(\theta)\cos^2\theta} = \frac{\sin u(\theta)}{\sin\psi_0} = \frac{\sqrt{1-r^2(\theta)}}{\sqrt{1-r_0^2}}.$$

Отсюда получаем

$$1-r^2(\theta) = (1-r_0^2)(1-r^2(\theta)\cos^2\theta)$$

и затем формулу из леммы 1. $\square$

Следствие 3. *Число* $\varphi_1 = \varphi_1(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, *может быть любым числом в указанных в предложении* 1 *интервалах.*

Доказательство. Из леммы 1 и формулы (13) следует, что $\varphi_1(r_0)$, $0 \le r_0 \le 1$, — непрерывная функция. Теперь следствие 3 вытекает из того, что по лемме 1, $r(\theta) \equiv 0$ при $r_0 = 0$ и $r(\theta) \equiv 1$ при $r_0 = 1$. $\square$

Из леммы 1 прямым вычислением следует

Лемма 2. *Если* $0 < r_0 < 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$, *то*

$$\frac{\partial r(\theta)}{\partial r_0} = \sin^2(\theta)(1+(r_0^2-1)\cos^2\theta)^{-3/2},$$

что равно 0 *при* $\theta = 0$ *и положительно при* $0 < \theta \le \pi/2$.

Далее будет использоваться обозначение $v = \varphi_1$. Ясно, что $v = v(r_0)$.

Лемма 3. *Функция* $v = v(r_0)$ *непрерывно дифференцируема, ее производная* $v'(r_0)$ *отрицательна при* $0 < a < 1$ *и положительна при* $a > 1$. *Существует обратная непрерывно дифференцируемая убывающая (возрастающая) функция* $r_0 = r_0(v)$, *где* $a\pi < v < \pi$ *при* $0 < a < 1$ (*и* $\pi < v < a\pi$ *при* $a > 1$).

Доказательство. Вследствие формулы (13) и лемм 1, 2

$$v'(r_0) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial r_0}(\sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)})\,d\theta$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} (1+(a^2-1)r^2(\theta))^{-1/2}(a^2-1)r(\theta)\frac{\partial r(\theta)}{\partial r_0}\,d\theta$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2}(1+(a^2-1)r^2(\theta))^{-1/2}(a^2-1)r(\theta)\sin^2(\theta)\big(1+\big(r_0^2-1\big)\cos^2\theta\big)^{-3/2}\,d\theta.$$

Отсюда непосредственно вытекают все утверждения леммы 3. □

Лемма 4. *Пусть отрезок параметризованной длиной дуги геодезической $\gamma=\gamma(t)$ на эллипсоиде (2), отличной от двойных меридианов и экватора, начинается и заканчивается на экваторе; $\gamma(0)=R(0,0)$, $\gamma(t(r_0))=R(0,v(r_0))$, где*

$$0<\cos\psi_0=r_0<1,\quad \psi_0=\angle(\gamma'(0),R'_\varphi(0,0)),\quad v(r_0)>0.$$

Тогда длина этого отрезка равна

$$l(r_0)=t(r_0)=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{r_0}{1-\big(1-r_0^2\big)\cos^2\theta}\sqrt{1+\frac{(a^2-1)r_0^2}{1-\big(1-r_0^2\big)\cos^2\theta}}\,d\theta. \tag{14}$$

Доказательство. Последние равенства в (10), равенство (12), лемма 1 влекут

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{dt}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{r^2(\theta)}{r_0}\sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)}$$

$$=\frac{r_0}{1-(1-r_0^2)\cos^2\theta}\sqrt{1+\frac{(a^2-1)r_0^2}{1-(1-r_0^2)\cos^2\theta}}.$$

Отсюда вытекает (14). □

Замечание 1. Используя (14) и неопределенный интеграл **1** в разд. 5.14 из [6], получаем

$$l(r_0)=t(r_0)=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{r_0\,d\theta}{1-(1-r_0^2)\cos^2\theta}=\frac{-2r_0}{\sqrt{r_0^2}}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{r_0^2}\operatorname{ctg}\theta\big)\big|_0^{\pi/2}$$

$$=-2\operatorname{arctg}(r_0\operatorname{ctg}\theta)|_0^{\pi/2}=2(\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(0))=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi,$$

если $0<r_0<1$, $a=1$, как и должно быть.

Замечание 2. Формулу (14) можно записать в следующем кратком виде:

$$l(r_0)=2\int\limits_0^{\pi/2}r_0\big(\sin^2\theta+r_0^2\cos^2\theta\big)^{\frac{-3}{2}}\big(\sin^2\theta+(a^2-\sin^2\theta)r_0^2\big)^{\frac{1}{2}}\,d\theta. \tag{15}$$

Предложение 2. *Геодезические отрезки эллипсоида* (2)

$$\gamma(t,r_0)=\operatorname{Exp}_p\big(t\big(r_0R'_\varphi(0,0)+\big(\sqrt{1-r_0^2}/a\big)R'_u(0,0)\big)\big),\quad 0\le t\le l(r_0), \tag{16}$$

где $p=R(0,0)$, $0<r_0<1$, параметризованы длиной дуги, составляют семейство класса C^∞, начинаются и заканчиваются на экваторе.

Доказательство. Прежде всего, $R'_\varphi(0,0)=(0,1,0)$, $R'_u(0,0)=(0,0,a)$. Отсюда следует, что геодезические отрезки (16) параметризованы длиной дуги. Ясно, что эллипсоид (2) с индуцированной из $\mathbb{R}^3$ метрикой есть компактное вещественно-аналитическое риманово многообразие. Поэтому вследствие предложения 10.5 из [7] экспоненциальное отображение Exp_p вещественно аналитично. Из формулы (15) нетрудно увидеть, что $l(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, — функция класса C^∞. Следовательно, (16) — семейство класса C^∞. Вследствие определения $l(r_0)$ все отрезки семейства (16) начинаются и заканчиваются на экваторе (а их внутренности располагаются внутри верхней половины) эллипсоида (2). $\square$

Следствие 4. *Семейство* $\gamma(t,v) = \gamma(t, r_0(v))$, $0 \le t \le l(r_0(v))$, *где* $\pi a < v < \pi$ *при* $0 < a < 1$ *и* $\pi < v < \pi a$ *при* $a > 1$, *определяемых посредством* (16) *и функцией* $r_0(v)$ *из леммы 3 геодезических отрезков — отображение класса* C^∞. *При этом* $l(v) = l(r_0(v))$ *— длина геодезического отрезка* $\gamma(\cdot, v)$.

Доказательство. Вследствие предложения 2 $v(r_0) = \varphi(\gamma(l(r_0), r_0))$ — C^∞-функция. Тогда определенная по лемме 3 на соответствующем интервале обратная функция $r_0(v)$ бесконечно дифференцируема. Второе утверждение — следствие того, что геодезическая $\gamma(\cdot, v)$ параметризована длиной дуги. $\square$

Замечание 3. На самом деле функция $l(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, и геодезические отрезки из предложения 2 и следствия 4 вещественно аналитические.

Предложение 3. *Существуют производные* $l'(v) = r_0(v) > 0$ *при* $0 < a < 1$, $\pi a < v < \pi$ *и* $l'(v) = r_0(v) > 0$ *при* $a > 1$ *и* $\pi < v < \pi a$.

Доказательство. Выберем произвольно $v_0 \in (\pi a, \pi)$ при $0 < a < 1$ и $v_0 \in (\pi, \pi a)$ при $a > 1$. Определим семейство параметризованных пропорционально длине дуги геодезических $\gamma(t,v)$, $0 \le t \le l(v_0)$, такое, что касательное векторное поле $X = X(t,v) = \frac{\partial \gamma(t,v)}{\partial t} = \gamma_t(t,v)$ к геодезической $\gamma(t,v)$ (при фиксированном v) имеет длину $|X(t,v)| = |\gamma_t(t,v)| = c(v) = l(v)/l(v_0) > 0$. На основании следствия 4 семейство $\gamma(t,v)$, векторное поле $X(t,v)$ и функция $l(v)$ бесконечно дифференцируемы. Ясно, что и векторное поле $Y = Y(t,v) = \frac{\partial \gamma(t,v)}{\partial v} = \gamma_v(t,v)$ вдоль семейства $\gamma(t,v)$ бесконечно дифференцируемо.

По формуле первой вариации длины кривой ((1.58) из [2]) получаем

$$l'(v) = \frac{1}{c(v)} \langle Y, X \rangle \Big|_{t=0}^{t=l(v_0)} - \frac{1}{c(v)} \int\limits_0^{l(v_0)} \langle Y(t,v), \nabla_X X(t,v) \rangle \, dt.$$

При этом $Y(0,v) = 0$ для всех рассматриваемых v, так как $\gamma(0,v) = R(0,0)$, и $\nabla_X X(t,v) = 0$, так как $\gamma(\cdot, v)$ — геодезические. Поэтому

$$l'(v) = \frac{1}{c(v)} \langle Y(l(v_0), v), X(l(v_0), v) \rangle = \cos \psi_0(v) = r_0(v) > 0$$

для $0 < a < 1$ и для $a > 1$. $\square$

Напомним некоторые понятия римановой геометрии.

Определение 2. Пусть (M,g) — полное риманово многообразие с метрическим тензором g. *Радиус инъективности* $i_p(M)$ *многообразия* (M,g) *в точке* $p \in M$ определяется как точная верхняя граница чисел $r > 0$ таких, что экспоненциальное отображение Exp_p многообразия (M,g) в точке p является диффеоморфизмом на открытом шаре $U(0,r) \subset (M_p, g_p)$, где (M_p, g_p) — касательное евклидово пространство к (M,g) в точке p. По определению *радиус инъективности* $i(M)$ *многообразия* (M,g) есть $i(M) = \inf\limits_{p \in M} i_p(M)$.

Определение 3. Пусть (M, g) — полное риманово многообразие, $p \in M$. По определению $t_0(p)$ — точная верхняя граница чисел $r > 0$ таких, что дифференциал $(\mathrm{dExp}_p)_v(\cdot)$ — невырожденное линейное отображение для каждого вектора $v \in U(0, r) \subset (M_p, g_p)$ и $t_0 = \inf\limits_{p \in M} t_0(p)$.

Замечание 4. $t_0(p) > 0$ и $t_0 > 0$, если M компактно.

Теорема 2. *Пусть $0 < a < 1$. Тогда длина каждой геодезической петли на эллипсоиде (2) больше $2\pi a$, а его радиус инъективности равен πa.*

Доказательство. Вследствие (7) гауссова кривизна эллипсоида (2) достигает максимума $1/a^2$ только при $r = 1$. Поэтому вследствие теоремы 1.5.26 из [2] первое сопряженное значение достигает минимума πa на геодезическом луче $R(0, \varphi(t) = t)$, $t \geq 0$, и всякий экваториальный геодезический отрезок $R(0, t)$, $0 \leq t \leq v$, где $v > \pi a$, — не кратчайшая вследствие предложения 1.5.29 из [2].

В доказательстве следствия 3 установлено, что убывающая по лемме 3 функция $v = v(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $v(r_0 = 0) = \pi$, $v(r_0 = 1) = \pi a$. Следовательно, определена обратная убывающая непрерывная функция $r_0(v)$, $v \in [\pi a, \pi]$, причем $r_0(\pi a) = 1$, $r_0(\pi) = 0$.

Из сказанного, предложения 2 и следствия 4 имеем $l(v) = d(R(0, 0), R(0, v))$ для $v \in (\pi a, \pi)$, где d — внутренняя метрика на эллипсоиде (2). Тогда

$$d(R(0, 0), R(0, \pi a)) = l(\pi a) = \pi a, \quad d(R(0, 0), R(0, \pi)) = l(\pi) < \pi,$$

так как d непрерывна. Заметим, что здесь $l(\pi)$ — длина меридиана (половины двойного меридиана). Вследствие предложения 3

$$\pi a < l(v) < l(\pi) < \pi, \quad \pi a < v < \pi,$$

минимальная длина геодезической петли на эллипсоиде (2) $l_0 > 2l(v) > 2\pi a$ и ввиду (1) его радиус инъективности равен $\pi a < l_0/2$. $\square$

Вычислим длину l меридиана эллипсоида (2). Полагая $\varphi = 0$ в (3), получаем

$$l = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'_u)^2 + (z'_u)^2}\, du = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 u + a^2 \cos^2 u}\, du$$
$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (a^2 - 1)\cos^2 u}\, du = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (a^2 - 1) r^2(u)}\, du.$$

Если $a = 1$, то $l = \pi$. Вычислим l при $a > 0$, $a \neq 1$.

Пусть $a > 1$. Тогда с учетом последних двух равенств

$$l = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (a^2 - 1)(1 - \sin^2 u)}\, du = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - 1)\sin^2 u}\, du$$
$$= 2a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - 1/a^2)\sin^2 u}\, du = 2a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}\, du = 2aE(\pi/2, k),$$

где $k^2 = (1-1/a^2) = (a^2-1)/a^2$, $E(u,k)$— *нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода* ((21.6-30) в [8]), $2aE(\pi/2,k) := 2aE(k)$, а

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{k^{2n}}{1-2n} \tag{17}$$

— *полный эллиптический интеграл второго рода* ((21.6-33) в [8]) и $0! = 0^0 := 1$.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда

$$l = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}\,du = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+(a^2-1)\sin^2(\pi/2-u)}\,du$$

$$= -2\int_{\pi/2}^{0}\sqrt{1+(a^2-1)\sin^2(\pi/2-u)}\,d(\pi/2-u) = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2E(\pi/2,k) = 2E(k),$$

где $k^2 = 1 - a^2$.

§ 3. Кратчайшие сплюснутого эллипсоида вращения

Теорема 3. *Для эллипсоида* (2), $0 < a < 1$, *верны такие утверждения.*

1. *Каждый отрезок геодезической, отличной от экватора, расположенный в верхней или нижней части эллипсоида, т. е. при* $[0 \le u \le \pi/2]$ *или при* $[-\pi/2 \le u \le 0]$ *в уравнении* (3), *является кратчайшей. При этом отрезок — единственная кратчайшая с данными концами тогда и только тогда, когда хотя бы один из концов отрезка не лежит на экваторе.*

2. *Отрезок экватора — (единственная) кратчайшая (с данными концами) тогда и только тогда, когда его длина не больше* πa.

3. *Отрезок двойного меридиана — кратчайшая тогда и только тогда, когда его длина не больше* $2E(k)$, $k^2 = 1 - a^2$, (17)*; он — единственная кратчайшая с данными концами тогда и только тогда, когда его длина меньше* $2E(k)$.

4. *Геодезический отрезок длины* l *с концами* $p_1 = R(u_1,\varphi_1)$, $p_2 = R(u_2,\varphi_2)$*:*

$$-\pi/2 < u_1 < 0 < u_2 < \pi/2, \quad 0 < |\varphi_1 - \varphi_2| = \omega < \pi, \tag{18}$$

является кратчайшей тогда и только тогда, когда геодезическая отвечает некоторому параметру r_0, *где*

$$0 < r_0 \le \min(\cos u_1, \cos u_2), \quad \omega \le v(r_0), \quad l \le l(r_0). \tag{19}$$

При этом равносильны следующие равенства:

$$v(r_0) = \omega, \quad l = l(r_0). \tag{20}$$

Этот отрезок — единственная кратчайшая с данными концами тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих (не)равенств:

$$\cos u_1 \ne \cos u_2, \quad \omega < v(r_0), \quad l < l(r_0), \quad r_0 = \cos u_1 = \cos u_2. \tag{21}$$

Доказательство. 1. На основании предложения 1, следствия 3, леммы 3, следствия 4 и инвариантности эллипсоида относительно вращений вокруг оси z и отражения относительно экваториальной плоскости любые две точки на экваторе, являющиеся концами отрезка экватора длины v, где $\pi a < v \leq \pi$, можно соединить только двумя неэкваториальными геодезическими отрезками равной длины $l(v)$, зеркально симметричными друг другу относительно экваториальной плоскости. Отсюда следует нужное утверждение.

Утверждение 2 — следствие второй фразы из доказательства теоремы 2.

Утверждение 3 вытекает из равенств $l(v = \pi) = 2E(k)$ и (7).

4. Применяя, если это необходимо, зеркальное отражение от плоскости, содержащей меридиан с $\varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$, можно считать, что $\varphi_1 < \varphi_2$.

Существует хотя бы одна кратчайшая, соединяющая точки p_1 и p_2; пусть $\gamma = \gamma(t)$, $0 \leq t \leq l$, — одна такая кратчайшая, параметризованная длиной дуги. Заметим, что вследствие условий (18) точки p_1 и p_2 не лежат на экваторе и не могут лежать одновременно на одном двойном меридиане. Поэтому геодезический отрезок γ отвечает некоторому параметру r_0, где $0 < r_0 \leq \min(\cos u_1, \cos u_2)$.

Кроме того, $\omega \leq v(r_0)$. Иначе $\omega > v(r_0)$ и $l(r_0) < l$. Возможны следующие случаи: (a) $r_0 < \min(\cos u_1, \cos u_2)$ или (b) $r_0 = \min(\cos u_1, \cos u_2)$.

В случае (a) рассмотрим кратчайшую

$$\gamma_1 = \gamma(t) = R(u(t), \varphi(t)), \quad 0 \leq t \leq l(r_0). \tag{22}$$

Тогда $\cos(u(l(r_0))) = \cos(u(0))$ и для некоторого $t_1 \in (0, l(r_0))$ будет (α) $r_0 = \cos(u(t_1))$, $u(t_1) < 0$ или (β) $r_0 = \cos(u(t_1))$, $u(t_1) > 0$.

В случае (α) имеем $u(2t_1) = u_1$ и формулы $\gamma_2(t) = R(\widetilde{u}(t), \widetilde{\varphi}(t))$, где

$$(\widetilde{u}(t), \widetilde{\varphi}(t))) = (u(t + 2t_1), \varphi(t + 2t_1) + \varphi_1 - \varphi(2t_1)),\ 0 \leq t \leq l(r_0) - 2t_1,$$

$$(\widetilde{u}(t), \widetilde{\varphi}(t)) = (-u(t - l(r_0) + 2t_1), \varphi(l(r_0)) + \varphi(t - l(r_0) + 2t_1) - \varphi(2t_1)),$$

если $l(r_0) - 2t_1 \leq t \leq l(r_0 q)$, определяют другую непрерывную кривую той же длины $l(r_0)$ с теми же концами $\gamma(0)$, $\gamma(l(r_0))$, что и у γ_1, т. е. кратчайшую. Тогда геодезический отрезок γ не может быть кратчайшей.

Случай (β) рассматривается аналогично.

Пусть выполнено условие (b). Применяя, если это необходимо, композицию зеркальных отражений относительно экваториальной плоскости и некоторой вертикальной плоскости, включающей ось z, можно считать, что $r_0 = \cos u_1$. Пусть $0 < \delta < \min(l(r_0)/2, l - l(r_0))$. Тогда геодезический отрезок

$$\gamma_3(t) = \gamma(t + \delta) = R(u_3(t), \varphi_3(t)), \quad 0 \leq t \leq l(r_0),$$

является кратчайшей и

$$-\pi/2 < u_3(0) < 0 < u_3(l(r_0)) < \pi/2, \quad r_0 < \cos u_3(0) = \cos u_3(l(r_0)).$$

Тем самым эта кратчайшая удовлетворяет условию (a). Было уже доказано, что это невозможно. Таким образом, $\omega \leq v(r_0)$ и $l \leq l(v(r_0)) = l(r_0)$.

Ясно, что при условиях (19) два равенства (20) равносильны.

Докажем, что при условиях (20) соединяющий точки p_1 и p_2 геодезический отрезок с параметром r_0, $0 < r_0 < 1$, вида (22) — кратчайшая.

Заметим прежде всего, что тогда $\cos u_1 = \cos u_2$ и из проведенных рассуждений легко вывести, что существует самое большее два таких геодезических отрезка с параметром r_0 и только один, если и только если $r_0 = \cos u_1 = \cos u_2$.

Предположим, что существует соединяющая точки p_1 и p_2 параметризованная длиной дуги кратчайшая $\gamma_4 = \gamma_4(t) = R(u_4(t), \varphi_4(t))$, $0 \le t \le l_4$, где $l_4 \le l(r_0)$, с параметром $r_4 \ne r_0$, $0 < r_4 < 1$. Вследствие доказанного должно быть $v(r_0) = \omega \le v(r_4)$ и вследствие леммы 3 $v(r_0) = \omega < v(r_4)$, $0 < r_4 < r_0$. На основании предложения 3 $l(r_0) = l(v(r_0)) < l(v(r_4)) = l(r_4)$ и $l_4 < l(r_4)$.

Рассуждая, как выше, можно считать, что $u_1'(0) \ge 0$, $u_4'(0) \ge 0$. Вследствие этого, неравенств $0 < r_4 < r_0 < 1$ и правила Клеро $u_4'(0) > u_1'(0) \ge 0$. Тогда на основании утверждения 1 геодезические отрезки γ_1 и γ_4 пересекаются только в точках p_1 и p_2, а в остальном γ_4 расположена выше γ_1. Поэтому, так как $u_1'(l(r_0)) \le 0$, по правилу Клеро должно быть $u_4'(l_4) < u_1'(l(r_0)) \le 0$. Следовательно, существует $\overline{t}$ такое, что $0 < \overline{t} < l_4$, $u_4(\overline{t}) = u_2$ и $r(\gamma((\overline{t} + l_4)/2)) = r_4$. Отсюда следует, что $u_4(\overline{t}/2) = 0$ и длины геодезических отрезков $\gamma_4(t)$, $0 \le t \le \overline{t}/2$, и $\gamma_4(t)$, $\overline{t}/2 \le t \le \overline{t}$, равны.

Поэтому $l_4 = l(r_4)$; противоречие.

Таким образом, высказанное выше утверждение верно.

Из доказанного следует, что геодезический отрезок с условиями (19) — кратчайшая, и последнее утверждение теоремы доказано. $\square$

Следствие 5. *Отрезок геодезической с параметром r_0 на эллипсоиде вращения (2), $0 < a < 1$, является кратчайшей тогда и только тогда, когда его длина не больше $l(r_0)$, где $l(1) = \pi a$, $l(0) = 2E(k)$, $k^2 = 1 - a^2$.*

Определение 4. Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие, $p \in M$, $0 \ne w \in M_p$, $\mu(w)$ — максимум положительных чисел μ таких, что $\mathrm{Exp}_p(tw)$, $0 \le t \le \mu$, — кратчайшая; $\widetilde{C}_p = \{\mu(w)w,\ 0 \ne w \in M_p\}$ называется *множеством раздела в M_p*, а $C_p = \mathrm{Exp}_p(\widetilde{C}_p)$ — множеством раздела для точки p.

Следствие 6. *Если $p = R(\varphi_0, u_0)$ — точка эллипсоида (2), $0 < a < 1$, то*

$$C_p = \{R(\varphi, -u_0),\ \varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 - v(\cos u_0)] \cup [\varphi_0 + v(\cos u_0), \varphi_0 + \pi]\}$$

при условиях $u_0 \ne \pm\pi/2$, $v(\cos 0) = \pi a$; $C_p = \{(0, 0, \mp a)\}$, если $p = (0, 0, \pm a)$.

Замечание 5. При небольших изменениях теорема 3, следствия 5, 6 и данные здесь доказательства, в том числе утверждений, на которые они опираются, справедливы и для поверхностей из [4], если $v'(r_0) < 0$ для параллелей, отличных от экватора, и гауссова кривизна — неубывающая функция от r_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sakai T. Riemannian geometry. Transl. Math. Monogr. 1996. V. 149.

2. *Berestovskii V., Nikonorov Yu.* Riemannian manifolds and homogeneous geodesics. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. (Springer Monogr. Math.).

3. *Itoh J., Kiyohara K.* The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids // Manuscripta Math. 2004. V. 114. P. 247–264.

4. *Sinclair R., Tanaka M.* The cut locus of a two sphere of revolution and Toponogov's comparison theorem // Tohoku Math. J. 2007. V. 59. P. 379–399.

5. *Топоногов В. А.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2012.

6. *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Физматлит, 2003.

7. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 29 июня 2023 г.
После доработки 29 июня 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Мустафа Али
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
alimostafa19967777@gmail.com