Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 515.145.2+515.148

РАССЛОЕНИЯ БИРМАН — ХИЛЬДЕНА. I

А. В. Малютин

Аннотация. Расслоенное топологическое пространство называется пространством Бирман — Хильдена, если в каждой паре послойных (переводящих каждый слой в некоторый слой) изотопных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны. В работе представлена серия достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена для пространств, расслоенных над окружностью.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.111

Ключевые слова: расслоение, расслоенное пространство, локально тривиальное расслоение, послойный автогомеоморфизм, группа классов отображений, изотопия, гомотопия, гомотопическая эквивалентность, многообразие.

§ 1. Введение

В работе развивается теория расслоений Бирман — Хильдена. Расслоенное топологическое пространство называется *пространством Бирман — Хильдена*, если в каждой паре изотопных послойных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны (здесь и далее в работе под *послойными* отображениями понимаются отображения, переводящие каждый слой в некоторый — не обязательно исходный — слой, а под *изотопиями* автогомеоморфизмов понимаются изотопии в классе автогомеоморфизмов, а не в классе вложений).

Расслоениями Бирман — Хильдена называются расслоения, тотальные пространства которых являются пространствами Бирман — Хильдена. Если расслоенное пространство (расслоение) является пространством (расслоением) Бирман — Хильдена, говорят также, что оно *обладает свойством* Бирман — Хильдена или *относится к классу* Бирман — Хильдена.

Вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена естественно рассматривать в контексте семейства задач о расположении подпространств отображений, сохраняющих ту или иную структуру или обладающих теми или иными дополнительными свойствами, в пространствах отображений более общего вида того или иного объекта (ср. с гипотезой Смейла) и интерпретировать как вопрос об инъективности на уровне π_0 тождественного вложения пространства подгруппы послойных автогомеоморфизмов расслоенного пространства в группу всех его автогомеоморфизмов или, эквивалентно, как вопрос о линейной связности подгруппы, образованной изотопными тождественному отображению послойными автогомеоморфизмами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00299, https://rscf.ru/project/22-11-00299/.

В работах [1–16] вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена изучался для случая разветвленных накрытий поверхностей (обзор и дополнительные ссылки на литературу по этой тематике имеются в [14]). В [17, 18] этот вопрос исследовался для случая слоений Зейферта, а также для случая накрытий трехмерных многообразий. В теории узлов и трехмерных многообразий возникает вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена для расслоенных над окружностью трехмерных многообразий. В настоящей работе доказывается серия теорем о достаточных условиях принадлежности к классу Бирман — Хильдена для локально тривиальных расслоений над окружностью. Содержащиеся в литературе сведения о пространствах отображений многообразий обеспечивают применимость представленных здесь достаточных условий к обширным семействам расслоенных многообразий. В частности, из результатов настоящей работы выводится, что при $n \in \{1, 2, 3\}$ все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью n-мерные многообразия (включая неориентируемые и с непустым краем) обладают свойством Бирман — Хильдена. Поскольку вывод интересующих нас следствий из представленных ниже теорем о достаточных условиях сопряжен с рассмотрением значительного количества подслучаев и требует привлечения существенного объема данных из теории пространств отображений многообразий, доказательство этих следствий вынесено в отдельную работу.

Для формулировки основных результатов работы введем ряд обозначений. Для топологического пространства X обозначим через $Homeo(X)$ группу всех автогомеоморфизмов пространства X (снабженную компактно-открытой топологией). Содержащая тождественное отображение id_X компонента в $Homeo(X)$ обозначается через $Homeo_1(X)$. Через $Map_1(X, X)$ обозначается пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений $X \to X$, гомотопных тождественному.

Теорема 1. *Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Предположим, что у X не имеется гомотопных, но не изотопных автогомеоморфизмов (т. е. $Map_1(X, X) \cap Homeo(X) = Homeo_1(X)$), и что либо пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена.*

Теорема 1 допускает уточнения и обобщения по нескольким направлениям. Так, условие «либо пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп» (как и условия подобного типа в нижеследующих теоремах) ослабляется до более громоздкого условия, формулируемого в терминах инъективности индуцированных включением $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$ отображений классов сопряженности фундаментальных групп и их HNN-расширений. В частности, теорема 1 дополняется случаем, когда группа $\pi_1(Homeo_1(X))$ имеет ровно два класса сопряженности, однако мы не развиваем эту линию в данной статье. Больший интерес для нас представляет уточняющее обобщение теоремы 1 на случай пар (пространство, подпространство).

Если Z — подпространство в X, обозначим через $Map(X, X; Z)$ пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений $X \to X$, переводящих Z в Z, а через $Map_1(X, X; Z)$ — компоненту линейной связности тождественного отображения. Подпространство Z в X назовем *h-инвариант-*

ным, если

(i) $f(Z) = Z$ для любого $f \in Homeo(X)$,

(ii) для всякого локально тривиального расслоения $p : E \to S^1$ над окружностью со слоем X и для каждого $h \in Homeo_1(E)$ выполняется условие $h(\overline{Z}) = \overline{Z}$, где $\overline{Z}$ — отвечающее подпространству Z подрасслоение в E (например, край многообразия h-инвариантен в силу теоремы об инвариантности области).

Теорема 2. *Пусть X — линейно связное пространство, Z — h-инвариантное (возможно, пустое) подпространство в X. Предположим, что*

$$Map_1(X, X; Z) \cap Homeo(X) = Homeo_1(X)$$

(т. е. у X нет неизотопных автогомеоморфизмов, гомотопных в классе отображений, переводящих Z в Z) и что либо пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X; Z)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена.

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2 ($Z = \varnothing$).

Для формулировки еще одного варианта достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена дадим ряд дополнительных обозначений и определений. Если Z — подпространство в X, обозначим через $Map(X, X; [Z])$ подпространство в $Map(X, X; Z)$, состоящее из отображений, тождественных на Z, через $Homeo(X; [Z])$ — подгруппу $Homeo(X) \cap Map(X, X; [Z])$, а через $Map_1(X, X; [Z])$ и $Homeo_1(X; [Z])$ — компоненты линейной связности тождественного отображения в $Map(X, X; [Z])$ и $Homeo(X; [Z])$ соответственно.

Определение. Для расслоенного пространства E обозначим через $Fib(E)$ подгруппу послойных автогомеоморфизмов в $Homeo(E)$, а содержащую тождественное отображение id_E компоненту группы $Fib(E)$ — через $Fib_1(E)$. Будем говорить, что расслоение $p : E \to B$ *обладает свойством эпиморфности*, если включение $Fib_1(E) \subset Homeo_1(E)$ индуцирует эпиморфизм на уровне фундаментальных групп.

Теорема 3. *Пусть $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X, где X — связное компактное многообразие с непустым краем ∂X. Предположим, что выполнены следующие условия*:

— у X нет пары автогомеоморфизмов, связанных тождественной на крае гомотопией, но не связанных тождественной на крае изотопией, т. е.

$$Map_1(X, X; [\partial X]) \cap Homeo(X; [\partial X]) = Homeo_1(X; [\partial X]),$$

— либо пространство группы $Homeo_1(X; [\partial X])$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X; [\partial X]) \subset Map_1(X, X; [\partial X])$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп,

— сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности.

Тогда p обладает свойством Бирман — Хильдена.

Оставшаяся часть работы ориентирована на доказательство теорем 2 и 3. Структура работы такова. В § 2 доказываются несколько вспомогательных лемм. В § 3 доказывается теорема 2. В § 4 доказывается предложение о продолжении послойной изотопии, используемое в доказательстве теоремы 3. В § 5 доказывается теорема 3.

§ 2. Внутрислойные гомотопии и гомотопные сечения

В настоящем разделе доказаны несколько вспомогательных лемм.

Определение. Гомотопию (в частности, изотопию) отображения произвольного пространства в тотальное пространство расслоения будем называть *внутрислойной* или *внутрислоевой*, если проекция этой гомотопии в базу расслоения дает тождественную гомотопию. Послойный автогомеоморфизм расслоенного пространства будем называть *внутрислойным* или *внутрислоевым*, если каждый слой переводится этим автогомеоморфизмом в тот же слой. Гомотопию (в частности, изотопию) отображения произвольного пространства в тотальное пространство расслоения будем называть *специальной*, если проекция в базу сужения этой гомотопии на каждую точку отображаемого пространства является стягиваемой петлей.

Лемма 1. *Два непрерывных отображения топологического пространства в пространство локально тривиального расслоения над окружностью внутрислойно гомотопны, если и только если они связаны специальной гомотопией.*

Доказательство. Внутрислойная гомотопия по определению является специальной. Для проверки обратной импликации заметим, что локально тривиальное расслоение над окружностью представимо в виде тора некоторого автогомеоморфизма f слоя F заданного расслоения:

$$E = \frac{F \times [0,1]}{(x,1) \sim (f(x),0)}.$$

Такое представление индуцирует одномерное локально тривиальное слоение ξ на пространстве расслоения, каждый слой которого накрывает базу. Проектируя каждый путь специальной гомотопии на слой F', содержащий концевые точки пути, вдоль слоев слоения ξ, мы переводим специальную гомотопию во внутрислойную. $\square$

Замечание. У леммы 1 имеется путь доказательства (причем для не обязательно локально тривиальных расслоений) через «аксиому о накрывающей гомотопии» (см. [19, 11.7. Second covering homotopy theorem]), однако такой путь менее удобен при работе с подрасслоениями (см. шаг 1.3 в доказательстве теоремы 2).

Лемма 2. *Два сечения локально тривиального расслоения над окружностью изотопны в классе сечений, если и только если они гомотопны в классе произвольных непрерывных отображений.*

Доказательство. Сечения, изотопные в классе сечений, гомотопны в классе произвольных непрерывных отображений. Докажем обратное. Если два сечения гомотопны, то проекция в базу связывающей их гомотопии дает гомотопию тождественного отображения базы, т. е. петлю в $Map_1(S^1, S^1)$. Гомотопия тождественного отображения пространства ставит в соответствие каждой точке пространства петлю в пространстве. Для петель в окружности как для отображений из окружности в окружность выбором ориентации определена степень отображения (в одномерном случае называемая также индексом). Индекс принимает целые значения и зависит от точки непрерывно. Следовательно, у всех петель заданной гомотопии индекс одинаков. Отсюда вытекает, что заданные гомотопные сечения связаны и специальной гомотопией — такая гомотопия получается, к примеру, в результате композиции заданной гомотопии с (обратной к индексу) степенью гомотопии, «поворачивающей» кривую сечения «вдоль самой себя», т. е. являющейся, в свою очередь, композицией отображения сечения с полным поворотом базы. По лемме 1 связанные специальной гомотопией сечения внутрислойно гомотопны. Внутрислойная гомотопия сечений является изотопией в классе сечений. Лемма доказана. □

Замечание. У леммы 2, как и у леммы 1, имеется путь доказательства (причем для не обязательно локально тривиальных расслоений) через «аксиому о накрывающей гомотопии» (см. [19, 11.7. Second covering homotopy theorem]). Этот альтернативный метод доказательства обобщается на случай, когда в качестве базы расслоения выступает пространство B, обладающее следующим свойством (ср. со свойствами слоя в теоремах 1–3):

• включение $Homeo_1(B) \subset Map_1(B,B)$ индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп.

Замечание. Лемму 2 имеет смысл рассматривать как определенного рода обобщение вырожденного до однониточных кос известного результата о том, что замкнутые косы в полнотории изотопны, если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос (см. [20; 21, теорема 1; 22, предложение 10.16; 23, теорема 2.1]).

Лемма 3. *Пусть X — топологическое пространство, Z — подпространство в X, а $f : X \to X$ — автогомеоморфизм с $f(Z) = Z$. Пусть $\mathscr{X}_f$ — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X, отвечающее автогомеоморфизму f, т. е. расслоение, тотальное пространство которого есть тор для f:*

$$\mathscr{X}_f = \frac{X \times [0,1]}{(x,1) \sim (f(x),0)},$$

а $\mathscr{Z}_f$ — подрасслоение[1)] *в $\mathscr{X}_f$, отвечающее подпространству Z. Предположим, что Z и X линейно связны. Тогда если включение $Z \subset X$ индуцирует эпиморфизм (мономорфизм) фундаментальных групп, то и включение $\mathscr{Z}_f \subset \mathscr{X}_f$ индуцирует эпиморфизм (мономорфизм) фундаментальных групп.*

Доказательство прямо следует из некоммутативного варианта так называемых 4-лемм (в применении к коммутативной диаграмме, образованной двумя точными последовательностями расслоений). □

Замечание. Утверждение леммы 3 обобщается на случай расслоения и подрасслоения над произвольной нормальной компактной линейно связной базой.

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 включение $Z \subset X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, то два сечения подрасслоения $\mathscr{Z}_f$ изотопны в классе сечений этого подрасслоения, если и только если они изотопны в классе сечений расслоения $\mathscr{X}_f$.*

Доказательство. В силу леммы 3 включение $\mathscr{Z}_f \subset \mathscr{X}_f$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Если два сечения подрасслоения $\mathscr{Z}_f$ изотопны в классе сечений расслоения $\mathscr{X}_f$, то они представляют один и тот же класс сопряженности в группе $\pi_1(\mathscr{X}_f)$, а значит, и в группе $\pi_1(\mathscr{Z}_f)$. Отсюда в силу леммы 2 следует, что эти сечения изотопны в классе сечений расслоения $\mathscr{Z}_f$. □

[1)] В некоторых случаях, как это принято, мы для краткости ссылаемся на тотальное пространство расслоения как на расслоение.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение со слоем X, а $h : E \to E$ — послойный автогомеоморфизм, изотопный тождественному отображению id_E. Требуется показать, что в предположениях теоремы автогомеоморфизм h послойно изотопен тождественному.

Шаг 1.1. *Сведение к случаю внутрислойного автогомеоморфизма.*

Заметим, что послойный автогомеоморфизм пространства локально тривиального расслоения индуцирует автогомеоморфизм базы[2)]. Обозначим через h_B автогомеоморфизм базы S^1, индуцированный заданным автогомеоморфизмом h. Пусть $q : S^1 \to E$ — произвольное сечение заданного расслоения p (сечение существует в силу предположения о линейной связности слоя, см., например, [24, теорема 7.1]). Применив к q изотопию, переводящую id_E в h, и спроектировав получившуюся изотопию кривой в базу, получаем гомотопию между тождественным отображением базы (id_B) и h_B. Как следует из классических конструкций, гомотопные автогомеоморфизмы окружности изотопны. Подняв изотопию между h_B и id_B до послойной изотопии пространства E (существование такого поднятия для локально тривиального расслоения следует, например, из [19, 11.3. First covering homotopy theorem]), получаем послойную изотопию, связывающую h с автогомеоморфизмом h', дающим тождественное отображение базы. Тем самым ситуация сведена к случаю автогомеоморфизма, индуцирующего тождественное отображение на базе: поскольку h и h' связаны послойной изотопией, для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что h' и id_E послойно изотопны.

Шаг 1.2. *Сведение к случаю автогомеоморфизма, связанного с тождественным отображением* id_E *специальной*[3)] *изотопией.*

Заметим, что при всякой изотопии $E \times [0,1] \to E$, связывающей тождественное отображение id_E и внутрислойный автогомеоморфизм, проекция в базу пути каждой точки из E является петлей, причем в силу предположения о линейной связности свободный гомотопический тип этой петли и ее индекс от выбора точки не зависят (этот аргумент обсуждается в бо́льших подробностях в доказательстве леммы 2). Поднимем до послойной изотопии $E \times [0,1] \to E$ полный оборот окружности (см. [19, 11.3. First covering homotopy theorem]). Дополнив h' определенным количеством таких поворотов, получаем автогомеоморфизм $h'' : E \to E$, послойно изотопный с h' и связанный с id_E изотопией, у которой проекции в S^1 всех путей являются петлями индекса 0, т. е. специальной изотопией.

Шаг 1.3. *Сведение к случаю автогомеоморфизма, связанного с* id_E *внутрислойной гомотопией.*

Поскольку полученный на предыдущем шаге автогомеоморфизм h'' и тождественный автогомеоморфизм id_E связаны специальной изотопией, в силу леммы 1 эти автогомеоморфизмы связаны и внутрислойной гомотопией. При этом из конструкции доказательства леммы 1 в силу предполагаемой инвариантности множества Z следует, что связывающая h'' и id_E внутрислойная гомотопия

2) Действительно, из определения топологии прямого произведения вытекает, что локально тривиальное расслоение является открытым отображением. Отсюда следует, что автобиекция на базе, индуцированная послойным автогомеоморфизмом пространства локально тривиального расслоения, переводит открытые множества в открытые, т. е. является автогомеоморфизмом.

3) Определение специальной изотопии дано в § 2.

может быть построена таким образом, что в каждый момент в каждом слое X' эта гомотопия переводит подмножество $Z' \subset X'$, соответствующее подмножеству $Z \subset X$, в Z' (поскольку слоение ξ в конструкции доказательства леммы 1 таково, что каждый из его слоев содержится либо в подрасслоении, либо в дополнении к нему).

Шаг 2. *Переход к индуцированному расслоению со слоем* $Map_1(X, X; Z)$.

Локально тривиально расслаиваясь над окружностью, пространство E представимо в виде тора некоторого автогомеоморфизма $f : X \to X$ слоя X:

$$E = \frac{X \times [0,1]}{(x,1) \sim (f(x),0)}.$$

Автогомеоморфизму f отвечает автоморфизм A_f моноида $Map_1(X, X; Z)$, отправляющий отображение $m \in Map_1(X, X; Z)$ в отображение $f \circ m \circ f^{-1}$. Рассмотрим определяемое автоморфизмом A_f локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем $Map_1(X, X; Z)$:

$$\mathscr{E} := \frac{Map_1(X, X; Z) \times [0,1]}{(m,1) \sim (f \circ m \circ f^{-1}, 0)}.$$

Поскольку A_f переводит подпространство $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X; Z)$ в него же, подпространству $Homeo_1(X)$ отвечает подрасслоение в $\mathscr{E}$, которое обозначим через $\mathscr{H}_1$. Рассмотрим также подрасслоение $\mathscr{H}'$ со слоем $Map_1(X, X; Z) \cap Homeo(X)$ (это подрасслоение корректно определено в силу предполагаемой h-инвариантности подпространства Z). В силу условия теоремы о том, что $Map_1(X, X; Z) \cap Homeo(X) = Homeo_1(X)$, имеем $\mathscr{H}' = \mathscr{H}_1$.

Из конструкции следует, что имеется естественная биекция между сечениями расслоения $\mathscr{E}$ и непрерывными отображениями $E \to E$, переводящими каждый слой X' в тот же слой отображением, связанным с тождественным отображением $\mathrm{id}_{X'}$ гомотопией (в слое), в каждый момент переводящей подпространство $Z' \subset X'$, отвечающее инвариантному подпространству $Z \subset X$, в Z'. В частности, поскольку h'' и id_E связаны гомотопией такого вида, автогомеоморфизму h'' отвечает некоторое сечение расслоения $\mathscr{E}$ (обозначим это сечение через $\gamma_{h''}$), а гомотопии указанного вида отвечает изотопия — в классе сечений — между сечением $\gamma_{h''}$ и «*тривиальным*» сечением γ_0 (под тривиальным сечением мы понимаем сечение, состоящее из точек слоев в $\mathscr{E}$, отвечающих тождественным отображениям соответствующих слоев в E).

Поскольку точки в $\gamma_{h''}$ суть автогомеоморфизмы соответствующих слоев из E, сечение $\gamma_{h''}$ лежит в подрасслоении $\mathscr{H}'$, которое, как объясняется выше, совпадает с $\mathscr{H}_1$. Для того чтобы убедиться, что h'' и id_E связаны послойной изотопией, достаточно убедиться, что $\gamma_{h''}$ и γ_0 изотопны в классе сечений подрасслоения $\mathscr{H}_1$.

В случае, если пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, $\gamma_{h''}$ и γ_0 изотопны, поскольку в таком случае любые два сечения подрасслоения $\mathscr{H}_1$ изотопны. (Любые два сечения локально тривиального расслоения изотопны, если база — окружность, а слой односвязен (см., например, [24, теорема 7.1]): в качестве базы рассмотрим пространство $S^1 \times [0,1]$, а в качестве частично определенного сечения — объединение сечений над $S^1 \times \{0\}$ и над $S^1 \times \{1\}$.)

В случае, если включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X; Z)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, изотопность сечений $\gamma_{h''}$ и γ_0 в классе сечений подрасслоения $\mathscr{H}_1$ следует из их изотопности в классе сечений расслоения $\mathscr{E}$ в силу леммы 4.

Итак, показано, что произвольный послойный и изотопный тождественному автогомеоморфизм h всякого локально тривиального расслоения E над окружностью со слоем X послойно изотопен автогомеоморфизму h'', который послойно изотопен тождественному отображению. Это доказывает, что всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена. Теорема доказана.

Дополнение. Для удобства ссылок сформулируем в виде отдельного предложения утверждение, частный случай которого возникает на шаге 2 приведенного выше доказательства теоремы 2.

Предложение 1. *Пусть* $p : E \to S^1$ *— локально тривиальное расслоение со слоем* X, $h : E \to E$ *— внутрислойный автогомеоморфизм. Пусть* $G(X)$ *— нормальная подгруппа в* $Homeo(X)$ *(например,* $G(X) = Homeo_1(X)$ *или* $G(X) = Homeo_1(X, [Z])$*, где* Z *— какое-нибудь* h*-инвариантное подпространство в* X*). Тогда если* $G(X)$ *односвязна, а в каждом слое* X' *расслоения* p *сужение* $h|_{X'}$ *гомеоморфизма* h *на* X' *лежит*[4)] *в* $G(X')$*, то* h *и* id_E *связаны внутрислойной изотопией, у которой сужение на каждый слой* X' *лежит в* $G(X')$*.*

Доказательство. Утверждение доказывается конструкцией из шага 2 приведенного выше доказательства теоремы 2: по расслоению p строится отвечающее ему расслоение $\mathscr{H} \to S^1$ со слоем $Homeo(X)$. В этом расслоении имеется подрасслоение $\mathscr{G}$ со слоем $G(X)$. Автогомеоморфизмам h и id_E отвечают сечения подрасслоения $\mathscr{G}$, в силу односвязности слоя $G(X)$ эти сечения изотопны в $\mathscr{G}$, изотопии между сечениями в $\mathscr{G}$ отвечает искомая внутрислойная изотопия между id_E и h. □

§ 4. О продолжении послойной изотопии

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется вариант обобщения на расслоенные пространства теоремы о продолжении изотопии (с края многообразия на все многообразие). Доказываемое в настоящем параграфе предложение 2 представляет собой такое обобщение. В литературе имеется несколько версий теоремы о продолжении изотопии для многообразий и их подмногообразий и подмножеств, эти версии имеют различные варианты обобщений на расслоенные пространства, имеется также несколько различных естественных подходов к доказательству подобных утверждений. Отметим, что в приведенном варианте утверждения (предложение 2) как уровень обобщения, так и метод доказательства выбраны в некоторой степени произвольно. С одной стороны, достаточно было бы более частных утверждений с более короткими вариантами доказательств. Например, в случае, когда база является окружностью, имеется вариант доказательства, использующий тор отображения, а если ограничиться случаем, когда база является многообразием, доказательство предложения 2 можно сократить с учетом классического результата [25, следствие 1.3] о том, что изотопия компактного многообразия раскладывается в произведение изотопий, носитель каждой из которых содержится в одном из элементов заданного открытого покрытия. С другой стороны, приведенное утверждение обобщается и на более широкие классы подмногообразий, на не обязательно компактную

[4)] Поскольку подгруппа $G(X)$ предполагается нормальной в $Homeo(X)$, подгруппа $G(X')$ и соответственно принадлежность элемента $g \in Homeo(X')$ подгруппе $G(X')$ корректно определены безотносительно к выбору гомеоморфизма между X' и X.

базу (к примеру, на случай нормальной локально компактной линделефовой[5]) базы; см. C_σ-пространства в [19], теорему [19, 11.3. First covering homotopy theorem] и метод ее доказательства) и т. п., но мы не приводим этих обобщений в настоящей работе, ориентируясь на то, что для доказательства теоремы 3 такая степень общности не требуется.

Предложение 2 (о продолжении послойной изотопии). *Пусть F — компактное многообразие с непустым краем ∂F, B — нормальное компактное пространство, $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, $E_\partial \subset E$ — подрасслоение, отвечающее краю ∂F. Тогда всякая послойная изотопия тождественного отображения подрасслоения E_∂ продолжается до послойной изотопии тождественного отображения пространства E.*

Доказательство. В настоящем доказательстве для упрощения проверки свойств конструируемых отображений удобно интерпретировать изотопии всякого подпадающего под рассмотрение пространства W как сохраняющие вторую координату автогомеоморфизмы произведения $W \times [0,1]$ (как в [26, 27]).

Кроме того, поскольку здесь нас интересуют исключительно изотопии тождественных отображений пространств, далее в доказательстве под изотопиями понимаются именно такие изотопии: сохраняющие вторую координату автогомеоморфизмы $W \times [0,1] \to W \times [0,1]$, тождественные на $W \times \{0\}$.

Под *произведением* изотопий $\tau : W \times [0,1] \to W \times [0,1]$ и $\rho : W \times [0,1] \to W \times [0,1]$ понимается при этом композиция этих изотопий как автогомеоморфизмов пространства $W \times [0,1]$, т. е. произведение в смысле группы $Homeo(W \times [0,1])$. Во избежание путаницы в дальнейшем будем обозначать такое произведение через $\tau \star \rho$:

$$\tau \star \rho = \tau \circ \rho.$$

Обратная изотопия понимается в соответствующем смысле — как обратный элемент в группе $Homeo(W \times [0,1])$.

Множество всех изотопий тождественного отображения пространства W (образующее с указанной операцией произведения группу) обозначим через $\Lambda_1(W)$.

Под *продолжимыми* изотопиями имеются в виду послойные изотопии из $\Lambda_1(E_\partial)$, продолжимые до послойных изотопий из $\Lambda_1(E)$.

Заметим, что произведение продолжимых изотопий является продолжимой изотопией, поскольку произведение продолжений является продолжением произведения. Таким образом, для доказательства предложения достаточно показать, что каждая послойная изотопия τ из $\Lambda_1(E_\partial)$ разлагается в произведение продолжимых.

Послойная изотопия пространства расслоения индуцирует изотопию базы. Обозначим через $\overline{\tau}$ изотопию базы B, индуцированную послойной изотопией τ. В силу классических конструкций теории расслоений (см., например, [19, 11.3. First covering homotopy theorem]), изотопия тождественного отображения базы локально тривиального расслоения с нормальной компактной базой поднимается до послойной изотопии тождественного отображения всего пространства расслоения, так что в $\Lambda_1(E)$ найдется послойная изотопия $\widetilde{\tau}$, индуцирующая изотопию $\overline{\tau}$. Исходная изотопия τ разлагается в произведение сужения изотопии $\widetilde{\tau}$ на E_∂ (эта изотопия-сужение по построению продолжима) и некоторой

[5]Пространство называется *линделефовым* или *финально компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

внутрислойной изотопии $\dot\tau \in \Lambda_1(E_\partial)$. Тем самым доказательство свелось к случаю внутрислойной изотопии $\dot\tau$.

В оставшейся части доказательства сначала покажем, что внутрислойные изотопии продолжимы в случае прямых произведений, а затем выведем из этого общий случай внутрислойной изотопии $\dot\tau$, воспользовавшись нормальностью базы и разлагая $\dot\tau$ в произведение внутрислойных изотопий с «достаточно малыми» носителями, продолжимость которых прямо вытекает из продолжимости в случае прямых произведений.

Итак, докажем сперва, что внутрислойные изотопии $\ddot\tau \in \Lambda_1(B' \times \partial F)$ продолжимы с $B' \times \partial F$ на $B' \times F$ в случае прямого произведения. (Вообще говоря, это выполняется для произвольной базы B', но нам понадобится лишь случай $B' \subset B$.) Из классического результата [28] о воротниковой окрестности края метризуемого многообразия следует, что у края ∂F найдутся открытая окрестность $U(\partial F)$ в F и переводящий $\partial F \times \{0\}$ в ∂F гомеоморфизм $h : \partial F \times [0,2) \to U(\partial F)$. Отождествим посредством h окрестность $U(\partial F)$ с произведением $\partial F \times [0,2)$, введя тем самым на $U(\partial F)$ координаты, а окрестность $B' \times U(\partial F)$ — с произведением $B' \times \partial F \times [0,2)$. Для внутрислоевой изотопии $\ddot\tau$ из $\Lambda_1(B' \times \partial F)$ определим отображение

$$\widehat\tau : B' \times \partial F \times [0,2) \times [0,1] \to B' \times \partial F \times [0,2) \times [0,1]$$

формулой

$$\widehat\tau(b,x,r,t) = \begin{cases} (b,x,r,t) & \text{при } t \le r, \\ \bigl(b, \ddot\tau^b_{t-r}(x), r, t\bigr) & \text{при } t \ge r, \end{cases} \tag{1}$$

где b, x, r, t — координаты в B', ∂F, $[0,2)$, $[0,1]$ соответственно, а через $\ddot\tau^b$ обозначено сужение изотопии $\ddot\tau$ на слой $\{b\} \times \partial F$. Из формулы ясно, что $\widehat\tau$ непрерывно, биективно и имеет непрерывное обратное, откуда заключаем, что $\widehat\tau$ есть внутрислоевая изотопия из $\Lambda_1(B' \times \partial F \times [0,2))$, продолжающая изотопию $\ddot\tau$. Изотопия $\widehat\tau$ тождественна на $B' \times \partial F \times [1,2)$, так что, дополнив ее тождественной изотопией на $B' \times (F \setminus U(\partial F))$, получаем внутрислоевую изотопию $\widehat\tau^+$ из $\Lambda_1(B' \times F)$, продолжающую изотопию $\ddot\tau$. Отметим (это используется в дальнейшем), что, как видно из определяющей формулы, проекция в базу B' носителя $\operatorname{supp}(\widehat\tau^+)$ полученного продолжения совпадает с проекцией носителя $\operatorname{supp}(\ddot\tau)$ исходной изотопии.

Вернемся к внутрислоевой изотопии $\dot\tau$ на E_∂. Наша цель — разложить $\dot\tau$ в произведение изотопий, у которых носители в определенном смысле «малы» и продолжимость которых легко устанавливается. В силу компактности базы B найдется такое конечное открытое покрытие $\{U_1, \dots, U_k\}$ для B, что над каждым U_i расслоение p тривиально, а в силу нормальности найдутся такие открытые подпокрытия $\{U_1', \dots, U_k'\}$ и $\{U_1'', \dots, U_k''\}$ для B, что U_i содержит $\operatorname{clos}(U_i')$, а U_i' содержит $\operatorname{clos}(U_i'')$ для всех i (см. так называемую «сжимающую лемму» как одно из эквивалентных определяющих свойств нормального пространства в [29, с. 446]). Вдобавок в силу леммы Урысона для нормальных пространств (также см. [29, с. 446]), найдется такой набор функций $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, $\varphi_i : B \to [0,1]$, что $\varphi_i(U_i'') = \{1\}$ и $\varphi_i(B \setminus U_i') = \{0\}$.

Представим изотопию $\dot\tau$ в виде произведения изотопий, проекции носителей которых содержатся в носителях функций набора $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$. Для этого введем понятие *частичной изотопии*, определяемой по изотопии и функции на пространстве. Для изотопии $\rho \in \Lambda_1(E_\partial)$ и непрерывной функции $\widetilde\varphi : E_\partial \to [0,1]$ определим отображение $\rho^{\widetilde\varphi} : E_\partial \times [0,1] \to E_\partial \times [0,1]$, полагая

$$\rho^{\widetilde\varphi}(e,t) = (\operatorname{pr}_{E_\partial}(\rho(e, \widetilde\varphi(e) \cdot t)), t),$$

где через pr_{E_∂} обозначена проекция $E_\partial \times [0,1] \to E_\partial$. В эквивалентном виде $\rho_t^{\widetilde{\varphi}}(e) = \rho_{\widetilde{\varphi}(e)\cdot t}(e)$. Отображение $\rho^{\widetilde{\varphi}}$ непрерывно, поскольку его первая проекция есть сложная функция от непрерывных функций (включая произведение $(e,t) \mapsto \widetilde{\varphi}(p(e)) \cdot t$). Таким образом, $\rho^{\widetilde{\varphi}}$ можно рассматривать как гомотопию. Если изотопия ρ внутрислойна, а $\widetilde{\varphi}$ постоянна на каждом слое, то отображение $\rho^{\widetilde{\varphi}}$, как нетрудно видеть, еще и биективно, а обратное отображение $E_\partial \times [0,1] \to E_\partial \times [0,1]$ описывается формулой

$$(\rho^{\widetilde{\varphi}})^{-1}(e,t) = (\mathrm{pr}_{E_\partial}(\rho^{-1}(e, \widetilde{\varphi}(e)\cdot t)), t).$$

Это показывает, что в оговоренном случае $(\rho^{\widetilde{\varphi}})^{-1}$ непрерывно, откуда заключаем, что для внутрислойной изотопии ρ и постоянной на каждом слое функции $\widetilde{\varphi}$ гомотопия $\rho^{\widetilde{\varphi}}$ является внутрислойной изотопией.

Заметим, что, как прямо следует из формулы данного определения, для внутрислойной изотопии ρ и постоянной на каждом слое функции $\widetilde{\varphi}$ выполняются условия

$$\mathrm{supp}(\rho^{\widetilde{\varphi}}) \subset \mathrm{supp}(\rho) \cap \mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}), \tag{2}$$

$$\mathrm{supp}((\rho \star \rho^{\widetilde{\varphi}})^{-1}) \subset \mathrm{supp}(\rho) \setminus \widetilde{\varphi}^{-1}(1). \tag{3}$$

Вернемся к изотопии $\dot{\tau}$ и набору функций $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Определим функции $\widetilde{\varphi}_i : E_\partial \to [0,1]$ правилом $\widetilde{\varphi}_i(e) = \varphi_i(p(e))$. Поскольку изотопия $\dot{\tau}$ внутрислойна, а функции $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_k$ в силу определения постоянны на слоях, корректно определены изотопии

$$\rho_{(0)} := \dot{\tau}, \quad \rho_{(1)} := \dot{\tau} \star (\dot{\tau}^{\widetilde{\varphi}_1})^{-1}, \quad \rho_{(i)} := \rho_{(i-1)} \star \big(\rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}\big)^{-1}. \tag{4}$$

Эти изотопии дают разложение

$$\dot{\tau} = (\dot{\tau} \star (\dot{\tau}^{\widetilde{\varphi}_1})^{-1}) \star \dot{\tau}^{\widetilde{\varphi}_1} = \rho_{(1)} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1} = \rho_{(2)} \star \rho_{(1)}^{\widetilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1} = \ldots$$
$$= \rho_{(k)} \star \rho_{(k-1)}^{\widetilde{\varphi}_k} \star \cdots \star \rho_{(1)}^{\widetilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1}.$$

Из определения (4) в силу (3) получаем, что

$$\mathrm{supp}(\rho_{(i)}) \subset \mathrm{supp}(\rho_{(i-1)}) \setminus \widetilde{\varphi}_i^{-1}(1) = \mathrm{supp}(\rho_{(i-1)}) \setminus p^{-1}(U_i'').$$

Отсюда, так как $\{U_1'', \ldots, U_k''\}$ — покрытие базы, вытекает, что $\mathrm{supp}(\rho_{(k)}) = \varnothing$, так что $\rho_{(k)}$ есть тождественная (тривиальная) изотопия, т. е. $\dot{\tau} = \rho_{(k-1)}^{\widetilde{\varphi}_k} \star \cdots \star \rho_{(1)}^{\widetilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1}$. Из (2) получаем, что для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется условие

$$\mathrm{supp}\big(\rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}\big) \subset \mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}_i) \subset p^{-1}(U_i').$$

Таким образом, изотопия $\dot{\tau}$ разлагается в произведение внутрислоевых изотопий $\chi_{(i)} = \rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}$, у каждой из которых замыкание носителя лежит в множестве вида $p^{-1}(U_i)$, на котором расслоение имеет структуру прямого произведения. Остается показать, что изотопии $\chi_{(i)}$ продолжимы. Пусть $\ddot{\chi}_{(i)}$ — сужение изотопии $\chi_{(i)}$ на $E_\partial \cap p^{-1}(U_i)$. Поскольку на $p^{-1}(U_i)$ расслоение имеет структуру прямого произведения, с помощью вышеприведенной конструкции (1) можно продолжить изотопию $\ddot{\chi}_{(i)}$ на $p^{-1}(U_i)$, причем так, что проекция в U_i носителя $\mathrm{supp}(\widehat{\chi}_{(i)})$ продолжения $\widehat{\chi}_{(i)}$ совпадает с проекцией в U_i носителя $\mathrm{supp}(\ddot{\chi}_{(i)})$ самой изотопии $\ddot{\chi}_{(i)}$:

$$p(\mathrm{supp}(\widehat{\chi}_{(i)})) = p(\mathrm{supp}(\ddot{\chi}_{(i)})) \ \subset\ U_i'.$$

Тогда $\mathrm{supp}(\widehat{\chi}_{(i)}) \subset p^{-1}(U_i')$, так что

$$\mathrm{clos}(\mathrm{supp}(\widehat{\chi}_{(i)})) \subset \mathrm{clos}\left(p^{-1}(U_i')\right) = p^{-1}\left(\mathrm{clos}(U_i')\right) \subset p^{-1}(U_i).$$

Пусть $\widetilde{\chi}_{(i)}$ — отображение, совпадающее с $\widehat{\chi}_{(i)}$ на $p^{-1}(U_i)\times[0,1]$ и тождественное на $(E\setminus p^{-1}(U_i))\times[0,1]$. Тогда $\widetilde{\chi}_{(i)}$ — изотопия, поскольку непрерывны ее сужения на элементы двухэлементного открытого покрытия

$$\{p^{-1}(U_i)\times[0,1],\ (E\setminus \mathrm{clos}(\mathrm{supp}(\widetilde{\chi}_{(i)})))\times[0,1]\}.$$

Итак, $\widetilde{\chi}_{(i)}$ — внутрислойная изотопия из $\Lambda_1(E)$, продолжающая изотопию $\chi_{(i)} = \rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}$. Это завершает доказательство. $\square$

§ 5. Доказательство теоремы 3

Докажем теорему 3 как частный случай следующего предложения.

Предложение 3. *Пусть X — линейно связное пространство, Z — непустое* h*-инвариантное подпространство в X, $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение со слоем X, а $\overline{Z}$ — отвечающее подпространству Z подрасслоение в E. Предположим, что выполнены следующие условия:*

— $Map_1(X,X;[Z]) \cap Homeo(X;[Z]) = Homeo_1(X;[Z])$ (т. е. у X нет автогомеоморфизмов, связанных тождественной на Z гомотопией, но не связанных тождественной на Z изотопией),

— либо пространство группы $Homeo_1(X;[Z])$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X;[Z]) \subset Map_1(X,X;[Z])$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Предположим также, что

(C1) *пара $(E,\overline{Z})$ является парой Борсука,*

(C2) *естественная проекция $Fib_1(E) \to Fib_1(\overline{Z})$ сюръективна и индуцирует эпиморфизм фундаментальных группоидов,*

(C3) *количество компонент линейной связности пространства $\overline{Z}$ конечно, каждая из этих компонент компактна и как подрасслоение в $\overline{Z}$ обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности.*

Тогда p обладает свойством Бирман — Хильдена.

Доказательство предложения 3. Требуется показать, что произвольный послойный и изотопный тождественному автогомеоморфизм $h : E \to E$ послойно изотопен тождественному.

Шаг 1.1. *Сведение ситуации к случаю гомеоморфизма $h' : E \to E$, у которого сужение на $\overline{Z}$ тождественно и который связан с id_E изотопией, при сужении на $\overline{Z}$ дающей стягиваемую в $Homeo_1(\overline{Z})$ петлю.*

Пусть $\widetilde{\lambda}$ — путь в $Homeo_1(E)$ из id_E в h, а λ — отвечающий ему путь в $Homeo_1(\overline{Z})$ из $\mathrm{id}_{\overline{Z}}$ в $h|_{\overline{Z}}$. В силу условия о свойствах Бирман — Хильдена и эпиморфности из (C3), для каждой компоненты связности $\overline{Z}^c$ пространства $\overline{Z}$ выполняется равенство $Homeo_1(\overline{Z}^c) \cap Fib(\overline{Z}^c) = Fib_1(\overline{Z}^c)$ (свойство Бирман — Хильдена), а индуцированный тождественным включением гомоморфизм $\pi_1(Fib_1(\overline{Z}^c)) \to \pi_1(Homeo_1(\overline{Z}^c))$ сюръективен (свойство эпиморфности), так что сужение λ^c изотопии λ на $\overline{Z}^c$ можно послойной изотопией продлить до стягиваемой петли λ_+^c в $Homeo_1(\overline{Z}^c)$. Поскольку слой линейно связен, а h послоен, то при всякой изотопии из id_E в h для любых двух точек x, y из

E с $p(x) = p(y)$ (и, в частности, для любых двух точек x, y из разных компонент связности пространства $\overline{Z}$, но лежащих в одном и том же слое, т. е. с $p(x) = p(y)$), проекции путей этих точек в базу S^1 связаны гомотопией с закрепленными концами. Отсюда в силу конечности числа компонент и их компактности (условие (C3)) нетрудно вывести, что продления λ_+^c для разных компонент $\overline{Z}^c$ пространства $\overline{Z}$ можно согласовать в смысле проекции на базу, так что и путь λ послойной изотопией продляется до стягиваемой петли λ_+ в $Homeo_1(\overline{Z})$. В силу (C2) путь $\widetilde{\lambda}$ можно послойной изотопией продлить до такого пути $\widetilde{\lambda}_+$ в $Homeo_1(E)$, у которого сужение на $\overline{Z}$ является петлей, гомотопной петле λ_+, т. е. стягиваемой петлей. Пусть h' — концевая точка пути $\widetilde{\lambda}_+$. Тогда по построению сужение $h'|_{\overline{Z}}$ автогомеоморфизма h' на $\overline{Z}$ тождественно и h' связан с id_E изотопией, сужение которой на $\overline{Z}$ дает стягиваемую в $Homeo_1(\overline{Z})$ петлю λ_+. Поскольку h и h' связаны послойной изотопией, для демонстрации того, что h и id_E послойно изотопны, достаточно показать, что h' и id_E послойно изотопны.

Шаг 1.2. *Переход от изотопии (между h' и id_E) к гомотопии (между теми же h' и id_E), тождественной на $\overline{Z}$.*

Пусть $\tau : E \times [0,1] \to E$ — такая изотопия с $\tau_0 = \mathrm{id}_E$ и $\tau_1 = h'$, у которой сужение на $\overline{Z}$ дает стягиваемую в $Homeo_1(\overline{Z})$ петлю (см. шаг 1.1). Условие о стягиваемости означает, что для изотопии-сужения $\tau|_{\overline{Z}}$ как для петли в $Homeo_1(\overline{Z})$ найдется неподвижная на концах гомотопия, стягивающая эту петлю в точку, т. е. найдется непрерывное отображение

$$\rho : \overline{Z} \times [0,1] \times [0,1] \to \overline{Z}$$

такое, что

— сужение отображения ρ на $\overline{Z} \times [0,1] \times \{0\}$ совпадает с сужением отображения τ на $\overline{Z} \times [0,1]$,

— обозначив через $\rho_{s,t}$ сужение отображения ρ на $\overline{Z} \times \{s\} \times \{t\}$, для каждого $r \in [0,1]$ получим $\rho_{0,r} = \rho_{r,1} = \rho_{1,r} = \mathrm{id}_{\overline{Z}}$.

Поскольку пара $(E, \overline{Z})$ является парой Борсука (условие (C1)), то и пара $(E \times [0,1], \overline{Z} \times [0,1])$ является парой Борсука (импликация видна, к примеру, из известного критерия, гласящего, что пара (S,T) является парой Борсука, если и только если подпространство $(S \times \{0\}) \cup (T \times [0,1])$ является ретрактом для пространства $S \times [0,1]$, см., например, [30, с. 14]). Отсюда следует, что для изотопии τ (рассматриваемой как отображение из $E \times [0,1]$ в E) найдется гомотопия $\kappa : E \times [0,1] \times [0,1] \to E$ такая, что

— сужение отображения κ на $E \times [0,1] \times \{0\}$ совпадает с τ,

— сужение отображения κ на $\overline{Z} \times [0,1] \times [0,1]$ совпадает с ρ.

Обозначая через $\kappa_{s,t}$ сужение отображения κ на $E \times \{s\} \times \{t\}$, определим гомотопию $\tau' : E \times [0,3] \to E$ правилом (проход по трем сторонам квадрата)

$$\tau'_t = \begin{cases} \kappa_{0,t} & \text{при } t \in [0,1], \\ \kappa_{t-1,1} & \text{при } t \in [1,2], \\ \kappa_{1,3-t} & \text{при } t \in [2,3]. \end{cases}$$

По построению τ' связывает h' и id_E и тождественна на $\overline{Z}$.

Шаг 1.3. *Переход к гомотопии (между h' и id_E), не только тождественной на $\overline{Z}$, но и внутрислойной, т. е. на всем протяжении сохраняющей каждую точку в одном слое.* (Ср. с построениями шага 1.3 в доказательстве теоремы 2.)

Заметим, что, поскольку h' переводит слои в слои, $\overline{Z}$ непусто (так как Z предполагается непустым), а слой X — линейно связен, то гомотопия, переводящая id_E в h' и тождественная на $\overline{Z}$, является специальной. Отсюда в силу леммы 1 следует, что id_E и h' связаны и внутрислойной гомотопией. При этом из конструкции доказательства леммы 1 видно, что внутрислойная гомотопия, переводящая id_E в h', может быть выбрана и тождественной на $\overline{Z}$.

Шаг 2. *Индуцированное расслоение со слоем* $Map_1(X, X; [Z])$.

Таким образом, шаги 1.1–1.3 сводят ситуацию к случаю гомеоморфизма $h' : E \to E$, у которого сужение на $\overline{Z}$ тождественно и который связан с id_E тождественной на $\overline{Z}$ внутрислойной гомотопией. (Ср. с доказательством теоремы 2, в котором ситуация сводится к случаю автогомеоморфизма $h'' : E \to E$, связанного с id_E внутрислойной гомотопией, в каждый момент переводящей подпространство $Z' \subset X'$, отвечающее инвариантному подпространству $Z \subset X$, в Z'.) Завершающий шаг доказательства воспроизводит конструкцию завершающего шага 2 из доказательства теоремы 2 с заменой моноида $Map_1(X, X; Z)$ и группы $Homeo_1(X; Z)$ моноидом $Map_1(X, X; [Z])$ и группой $Homeo_1(X; [Z])$ соответственно: по заданному расслоению p строится индуцированное расслоение со слоем $Map_1(X, X; [Z])$ и т. д. $\square$

Доказательство теоремы 3. Теорема 3 является частным случаем предложения 3. Укажем, из каких результатов вытекает, что условия предложения 3 в теореме 3 выполняются. (Мы не упоминаем условия, непосредственно оговоренные в формулировке теоремы 3.)

• То, что край многообразия является его h-инвариантным подпространством, вытекает из теоремы об инвариантности области.

• То, что пара, состоящая из многообразия и его края, является парой Борсука (условие (C1) в формулировке предложения 3), следует, например, из результата [28] о воротниковой окрестности края (см. также [30, пример 0.15]).

• То, что в теореме 3 естественная проекция $Fib_1(E) \to Fib_1(\partial E)$ сюръективна и индуцирует эпиморфизм фундаментальных группоидов (условие (C2) предложения 3), вытекает из предложения 2, в силу которого всякая послойная изотопия края локально тривиально расслоенного над окружностью многообразия с краем продолжается до послойной изотопии всего многообразия. $\square$

Благодарности. Автор признателен Ю. С. Белоусову, И. А. Дынникову, С. С. Подкорытову и Е. А. Фоминых за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birman J. S., Hilden H. M.* On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces // Ann. Math. Stud. 1971. V. 66. P. 81–115.
2. *Birman J. S., Hilden H. M.* Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin's braid group // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78, N 6. P. 1002–1004.
3. *Birman J. S., Hilden H. M.* Lifting and projecting homeomorphisms // Arch. Math. (Basel). 1972. V. 23. P. 428–434.
4. *Birman J. S., Hilden H. M.* On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces // Ann. Math. (2). 1973. V. 97. P. 424–439.
5. *Birman J. S., Hilden H. M.* Erratum to 'Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces' // Ann. Math. (2). 2017. V. 185. P. 345.
6. *Zieschang H.* On the homeotopy group of surfaces // Math. Ann. 1973. V. 206. P. 1–21.
7. *Maclachlan C., Harvey W. J.* On mapping-class groups and Teichmüller spaces // Proc. Lond. Math. Soc. 1975. V. 30. P. 496–512.

8. *Berstein I., Edmonds A. L.* On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 247. P. 87–124.
9. *Fuller T.* On fiber-preserving isotopies of surface homeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. P. 1247–1254.
10. *Aramayona J., Leininger C. J., Souto J.* Injections of mapping class groups // Geom. Topol. 2009. V. 13. P. 2523–2541.
11. *Winarski R. R.* Symmetry, isotopy, and irregular covers // Geom. Dedicata. 2015. V. 177. P. 213–227.
12. *Ghaswala T., Winarski R. R.* Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres // Michigan Math. J. 2017. V. 66. P. 885–890.
13. *Atalan F., Medetogullari E.* The Birman–Hilden property of covering spaces of nonorientable surfaces // Ukraïn. Mat. Zh. 2020. V. 72, N 3. P. 307–315.
14. *Margalit D., Winarski R. R.* Braids groups and mapping class groups: The Birman–Hilden theory // Bull. London Math. Soc. 2021. V. 53, N 3. P. 643–659.
15. *Kolbe B., Evans M. E.* Isotopic tiling theory for hyperbolic surfaces // Geom. Dedicata. 2021. V. 212. P. 177–204.
16. *Dey S., Dhanwani N. K., Patil H., Rajeevsarathy K.* Generating the liftable mapping class groups of regular cyclic covers. 2021. 14 p. arXiv:2111.01626v1 [math.GT].
17. *Vogt E.* Projecting isotopies of sufficiently large P^2-irreducible 3-manifolds // Arch. Math. (Basel). 1977. V. 29, N 6. P. 635–642.
18. *Ohshika K.* Finite subgroups of mapping class groups of geometric 3-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39, N 3. P. 447–454.
19. *Steenrod N. E.* The topology of fibre bundles. Princeton: Princeton Univ. Press, 1951. (Princeton Math. Ser.; V. 14).
20. *Artin E.* Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
21. *Morton H. R.* Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial // Topology. 1978. V. 17. P. 101–104.
22. *Burde G., Zieschang H.* Knots. Berlin: Walter de Gruyter, 1985. (de Gruyter Stud. Math.; V. 5).
23. *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. New York: Springer, 2008. (Grad. Texts Math.; V. 247).
24. *Husemoller D.* Fibre bundles. 3rd ed. New York: Springer-Verl., 1994. (Grad. Texts Math.; V. 20).
25. *Edwards R. D., Kirby R.* Deformations of spaces of imbeddings // Ann. Math. (2). 1971. V. 93. P. 63–88.
26. *Epstein D. B. A.* Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. 1966. V. 115. P. 83–107.
27. *Чернавский А. В.* Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия // Мат. сб. 1969. Т. 79, № 3. С. 307–356.
28. *Brown M.* Locally flat imbeddings of topological manifolds // Ann. Math. (2). 1962. V. 75. P. 331–341.
29. *Schechter E.* Handbook of analysis and its foundations. San Diego: Acad. Press, Inc., 1997.
30. *Hatcher A.* Algebraic topology. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2002.

Поступила в редакцию 3 августа 2023 г.
После доработки 27 ноября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Малютин Андрей Валерьевич (ORCID 0000-0002-4512-0124)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
ул. Губкина, 8, Москва 119991;
Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
`malyutin@pdmi.ras.ru`